Posons, en effet:

$$Q_k = \underset{p}{\mathrm{E}}[\varrho(p,0) \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon], \qquad S_{k-1} = \underset{p}{\mathrm{E}}[\varrho(p,0) = \tfrac{1}{2}\varepsilon],$$

$$X = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \in Q_k], \qquad X_0 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \in S_{k-1}].$$

En vertu du théorème démontré, il existe un ensemble $E \subset X - X_0$ de dimension $\leqslant n-k$, fermé dans X, et un prolongement $f^* \epsilon S_{k-1}^{X-E}$ de la fonction f (considerée seulement dans X_0). On voit sans peine que la fonction

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour} \quad x \in M - X, \\ \dfrac{\varrho(x,E)}{\varrho(x,E) + \varrho(x,X_0)} \cdot f^*(x) & \text{pour} \quad x \in X - E, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in E, \end{cases}$$

satisfait à la thèse du corollaire 2.

Sur un théorème d'existence dans la théorie des ensembles projectifs.

Par

K. Kunugi (Sapporo, Japon).

1. L'existence effective des classes d'ensembles, dans la théorie des ensembles projectifs, se démontrait en général par la méthode de la diagonale [1]). Étant donnée une famille $\mathfrak{R}$ d'ensembles linéaires ou plans, qui possède un ensemble universel et qui jouit de certaines conditions supplémentaires, on peut affirmer qu'il existe des ensembles de $\mathfrak{R}$ dont les complémentaires (par rapport à la droite ou au plan) ne sont pas des ensembles de $\mathfrak{R}$. Cependant ce procédé ne nous fournit aucun renseignement sur la construction de la partie commune de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{R}_C$ (famille des ensembles complémentaires de ceux de $\mathfrak{R}$). Or, nous allons voir que la méthode introduite par M. Kuratowski pour l'évaluation des classes projectives des ensembles définis par l'induction transfinie [2]) nous donne un moyen de constater l'existence des ensembles qui sont simultanément de la classe $\mathfrak{R}$ et de la classe $\mathfrak{R}_C$, sans être des ensembles d'une classe $\mathfrak{L}(\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}_C)$ donnée d'avance et satisfaisant à certaines conditions.

---

1) Voir W. Sierpiński: *Sur l'existence de diverses classes d'ensembles*, Fund. Math. XIV, pp. 82—91; O. Nikodym: *Sur les diverses classes d'ensembles*, ibid. pp. 145—204; L. Kantorovitch et E. Livenson: *Memoir on the analytical operations and projective sets* (I), Fund. Math. XVIII, pp. 256—271.

2) Voir C. Kuratowski et A. Tarski: *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. XVII, pp. 240—248; C. Kuratowski: *Evaluation de la classe borelienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, ibid. pp. 249—272; *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 243; *Sur un problème concernant l'induction transfinie*, C. R. Paris 202, pp. 1239—1241; *Les ensembles projectifs et l'induction transfinie*, Fund. Math. XXVII, pp. 269—276; C. Kuratowski et J. v. Neumann, *On some analytic sets defined by transfinite induction*, Annals of Math. 38, p. 521—525; C. Kuratowski: *Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable*, Fund. Math. XXVIII, pp. 165—185.

Définition 1. Soient: $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ un système de Souslin d'ensembles, N un sous-ensemble de l'ensemble J de tous les nombres irrationnels $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ entre 0 et 1 ou bien un ensemble de points de l'espace de Baire à 0 dimensions *tels que* $n_1, n_3, \ldots, n_{2k-1}, \ldots$ *sont arbitraires.* Nous appelons alors l'opération $S_N(E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = \sum_{\nu \in N} \prod_k E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ *opération de Souslin quasi-généralisée.*

Une opération de Souslin quasi-généralisée est une opération de Souslin généralisée [1]).

Définition 2. Soit $\mathfrak{G}$ la famille de tous les ensembles ouverts dans J. Si tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de $S_N\{\mathfrak{G}\}$ appartient à $S_N\{\mathfrak{G}\}$, l'opération S_N est dite *δ-multiplicative.*

Théorème. *Soient: Φ_N une opération de Hausdorff à base N et $\mathfrak{R}$ une famille d'ensembles de l'espace cartésien $OXYZ$ assujettie aux conditions suivantes:*

(1) $$\mathfrak{R}_C \subset \Phi_N\{\mathfrak{R}\},$$

(2) $$\mathfrak{R} \supset \mathfrak{G},$$

(3) *si une fonction $y = f(x)$, définie dans un ensemble M de $OXYZ$, est continue dans M $(y \in OXYZ)$, on a $f^{-1}(E) \in \mathfrak{R}$ dans M* [2]) *pour tout ensemble $E \in \mathfrak{R}$,*

(4) *il existe un ensemble plan appartenant à $\mathfrak{R}$, universel pour tous les ensembles linéaires appartenant à $\mathfrak{R}$.*

Soit, en outre:

$$\Phi_0 = \Phi_N\{\mathfrak{R}\}, \qquad \Phi_1 = (\Phi_0)_C,$$

$$\Phi_\alpha = \Phi_N\Big\{\sum_{0 \leqslant \beta < \alpha} \Phi_\beta\Big\} \qquad \text{pour } \alpha \text{ pair},$$

$$\Phi_\alpha = (\Phi_{\alpha-1})_C \qquad \text{pour } \alpha \text{ impair}.$$

---

[1]) Si N est un ensemble arbitraire de nombres de J, nous appelons, avec M. W. Sierpiński, l'opération $S_N(E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = \sum_{\nu \in N} \prod_k E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ *opération de Souslin généralisée. N* est dit sa *base.* Étant donnée une famille d'ensembles $\mathfrak{R}$, nous désignons par $S_N\{\mathfrak{R}\}$ la famille de tous les ensembles de la forme $\sum_{\nu \in N} \prod_k E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ où $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \in \mathfrak{R}$ (voir W. Sierpiński: *Sur une généralisation des opérations* (*A*), C. R. Soc. Sc. de Varsovie, t. XXII, p. 74).

[2]) Un ensemble est dit $\mathfrak{R}$ *dans M*, s'il est le produit d'un ensemble E tel que $E \in \mathfrak{R}$ et de M.

Soit enfin S_Θ une opération de Souslin quasi-généralisée et δ-multiplicative, telle que $S_\Theta\{\mathfrak{R}\}$ contient tous les ensembles complémentaires analytiques et que:

(5) $$S_\Theta\{\mathfrak{G}\} \supseteq \Phi_N\{\mathfrak{G}\}, \qquad \Phi_{N^C}\{\mathfrak{G}\}$$ [1]).

Dans ces conditions, il existe dans l'espace $OXYZ$ ou dans un plan quelconque un ensemble qui appartient simultanément à $S_\Theta\{\mathfrak{R}\}$ et à $(S_\Theta\{\mathfrak{R}\})_C$ et qui est universel pour la famille de tous les ensembles linéaires Φ_α où $0 \leqslant \alpha < \Omega$.

2. ***Lemme 1.*** *Soient: R un espace quelconque, S un espace métrique séparable, $\mathfrak{R}$ une famille multiplicative d'ensembles de R et Φ celle des ensembles fermés dans S. Tout ensemble donné par l'opération de Souslin quasi-généralisée sur les ensembles de la forme $\mathfrak{R} \times \Phi$* [2]) *peut être obtenu par la même opération sur le système $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ où les ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \in \mathfrak{R} \times \Phi$ satisfont aux deux conditions suivantes:*

1) $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \supseteq E_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}$ *pour tout k et $n_1, n_2, \ldots, n_k$,*

2) *la projection de $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sur l'espace S a un diamètre tendant vers 0 avec $1/k$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $M = \sum_{\nu \in N} \prod_k M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, où $M_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \in \mathfrak{R} \times \Phi$, un ensemble donné. La famille $\mathfrak{R}$ étant multiplicative, nous pouvons supposer que $M_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \supseteq M_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}$ pour tout k et $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Comme l'espace métrique S est séparable, il est, pour tout $k = 1, 2, 3, \ldots$, une somme d'une infinité au plus dénombrable de sphères fermées $S_n^{(k)}$ de diamètre inférieur à $1/k$: en formules

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(k)} \quad \text{où} \quad d(S^{(k)}) < 1/k.$$

Nous pouvons donc poser:

$$M_{n_1, n_2, \ldots, n_{2k-1}} = \sum_{n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(k)}} E_{2^{n_1-1}(2n^{(1)}-1), n_2, 2^{n_3-1}(2n^{(2)}-1), n_4, \ldots, 2^{n_{2k-1}-1}(2n^{(k)}-1)},$$

$$E_{2^{n_1-1}(2n^{(1)}-1), n_2, \ldots, 2^{n_{2k-1}-1}(2n^{(k)}-1)} = \\ = M_{n_1, n_2, \ldots, n_{2k-1}}(R \times S^{(1)}_{n^{(1)}})(R \times S^{(2)}_{n^{(2)}}) \ldots (R \times S^{(k)}_{n^{(k)}}).$$

---

[1]) N^C désigne la base de l'opération de Hausdorff telle que $(\Phi_N\{\mathfrak{A}\})_C = \Phi_{N^C}\{\mathfrak{A}_C\}$ pour toute famille $\mathfrak{A}$.

[2]) Nous désignons par $\mathfrak{R} \times \Phi$ la famille de tous les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$ où $A_1 \in \mathfrak{R}$ et $A_2 \in \Phi$.

Posons enfin

$$E_{2^{n_1-1}(2n^{(1)}-1),\, n_2,\, \dots,\, 2^{n_{2k-1}-1}(2n^{(k)}-1),\, n_{2k}} = M_{n_1, n_2, \dots, n_{2k}}(R\times S^{(1)}_{n^{(1)}})\,(R\times S^{(2)}_{n^{(2)}})\dots(R\times S^{(k)}_{n^{(k)}}).$$

Il est évident que le systeme $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ satisfait aux conditions 1) et 2). Nous pouvons d'ailleurs démontrer facilement que $M=\sum_{\nu\in N}\prod_k E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ où $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\in\Re\times\Phi$, c. q. f. d.

Lemme 2. *Pour toute famille d'ensembles $\Re$, on a $S_N\{\Re\}=S_N\{\Re_A\}$* [1]*, où S_N est une opération de Souslin quasi-généralisée.*

Démonstration. Montrons que $S_N\{\Re\}\supseteq S_N\{\Re_A\}$. Soit M un ensemble de $S_N\{\Re_A\}$. Nous pouvons poser:

$$M=\sum_{\nu\in N}\prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \qquad M_{n_1, n_2, \dots, n_k}=\sum_{p\in J}\prod_{k'} E^{p_1, p_2, \dots, p_{k'}}_{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

Le terme général de la somme aura la forme suivante:

$$E^{a_1}_{n_1}\cdot E^{a_1, a_2}_{n_1}\cdot E^{a_1, a_2, a_3}_{n_1}\cdot\ldots\cdot E^{b_1}_{n_1, n_2}\cdot E^{b_1, b_2}_{n_1, n_2}\cdot\ldots\cdot E^{c_1}_{n_1, n_2, n_3}\cdot\ldots \tag{6}$$

Rangeons d'abord les suites doubles $n_k, a_k, b_k, \dots$ en une suite simple $\mu=(m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$ comme il suit: $n_k=m_{2k-1}$, $a_k=m_{2(2k-1)}$, $b_k=m_{2^2(2k-1)}, \dots$ Le terme général (6) deviendra alors

$$E^{m_2}_{m_1}\cdot E^{m_2 m_6}_{m_1}\cdot E^{m_2 m_6 m_{14}}_{m_1}\cdot\ldots\cdot E^{m_4}_{m_1 m_3}\cdot E^{m_4 m_{12}}_{m_1 m_3}\cdot\ldots\cdot E^{m_8}_{m_1 m_3 m_5}\cdot\ldots$$

et il peut être désigné par $E(1)\cdot E(3)\cdot E(5)\cdot\ldots\cdot E(2)\cdot E(6)\cdot\ldots\cdot E(4)\cdot\ldots$.

Rangeons d'autre part la suite k-ple de tous les nombres entiers positifs $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ en une suite simple et désignons par $\varphi(n_1, n_2, \dots, n_k)$ le numéro de $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ dans cette suite.

Posons: $A_{\nu_1}=A_{\nu_1, \nu_2}=E^{m_2}_{m_1}$ où $\nu_1=\varphi(m_1, m_2)$ et $\nu_2=m_3$, ensuite $A_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}=A_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}=E^{m_4}_{m_1, m_3}$ où $\nu_4=m_7$ et $\nu_3=\varphi(m_4)$. En général, posons $A_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n-1}}=A_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n}}=E(n)$ suivant les règles:

[2]) $\Re_A$ désigne la famille de tous les ensembles qui s'obtiennent des ensembles de $\Re$ par l'opération (A) de Souslin, c. à d. $\Re_A=S_J\{\Re\}$. Le lemme 2 est une généralisation du théorème de Souslin. Cf. p. ex. F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin—Leipzig 1927 u. 1935, p. 92.

1) $\nu_{2n}=m_{4n-1}$ pour $n=1,2,\dots$;

2) si $E(n)$ à des nouveaux indices $m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_\lambda}$ (où $k_i\neq 4j-1$, $i=1,2,\dots,\lambda$ et $j=1,2,\dots$) qui ne se présentent dans aucun des ensembles $E(1), E(2), \dots, E(n-1)$, alors $\nu_{2n-1}=\varphi(m_1, m_2, \dots, m_{k_\lambda})$;

3) si tous les indices m_k de $E(n)$ se présentent dans un des ensembles $E(1), E(2), \dots, E(n-1)$, on mettra pour tous les ν_{2n-1}

$$A_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n-1}}=A_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n-1}, \nu_{2n}}=E(n).$$

Il est maintenant évident que $\sum_{\nu\in N}\prod_k A_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}=\sum_{\nu\in N}\prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, c. q. f. d.

Lemme 3 *(Théorème de projection). Soient: R un espace quelconque, S un espace métrique, séparable et complet, $\Re$ une famille quelconque d'ensembles de R et Φ la famille de tous les ensembles fermés dans S.*

Alors la projection de tout ensemble M de la forme $S_N\{\Re_A\times\Phi_A\}$ sur R appartient à $S_N\{\Re\}$ où S_N est une opération de Souslin quasi-généralisée [1]).

Démonstration. On sait qu'il existe une et une seule famille $\Re^*$ qui est la plus petite parmi les familles multiplicatives contenant $\Re$. Mais $\Re^*_A=\Re_A$ et, d'après le lemme 2, $S_N\{\Re^*_A\}=S_N\{\Re^*\}$ et $S_N\{\Re_A\}=S_N\{\Re\}$; donc $S_N\{\Re^*\}=S_N\{\Re\}$. Par conséquent, nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que la famille $\Re$ est elle-même multiplicative. D'autre part, nous avons $\Re_A\times\Phi_A\subseteq(\Re\times\Phi)_A$ [2]). Par suite, d'après le lemme 2, $S_N\{\Re_A\times\Phi_A\}\subset S_N\{(\Re\times\Phi)_A\}=S_N\{\Re\times\Phi\}$. Donc, l'ensemble donné M peut être mis sous la forme:

$$M=\sum_{\nu\in N}\prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

où

$$M_{n_1, n_2, \dots, n_k}=F_{n_1, n_2, \dots, n_k}\times H_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \quad F_{n_1, n_2, \dots, n_k}\in\Re$$

et

$$H_{n_1, n_2, \dots, n_k}\in\Phi.$$

[1]) Cf. K. Kunugui: *La théorie des ensembles analytiques et les espaces abstraits*, The Journal of the Faculty of Science, Hokkaïdo Imperial University, Series I, vol. IV, pp. 1—40. Le lemme 3 est une généralisation du Théorème 6 de ce travail.

[2]) K. Kunugui, l. c., pp. 2—3, th. 1.

Or, d'après le lemme 1, nous pouvons supposer de plus que

1) $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq M_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ pour tout k et $n_1, n_2, \dots, n_k$,

2) le diamètre de $H_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ tend vers 0 avec $1/k$.

Soit P la projection de M sur R. La projection de $M_{n_1, n_2, \dots n_k}$ sur R sera $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Il est maintenant facile de démontrer que $P = \sum_{\nu \in N} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. En effet, d'abord il est clair que $P \subseteq \sum_{\nu \in N} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Montrons qu'on a également $P \supseteq \sum_{\nu \in N} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Soit p un point de $\sum_{\nu \in N} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Il existe alors une suite de nombres entiers positifs $\nu = (n_1, n_2, \dots) \in N$, telle que $p \in \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Soit

$$A_k = M_{n_1, n_2, \dots, n_k}(p \times S).$$

Nous avons, d'après 1), $A_k \supseteq A_{k+1}$ et $A \neq 0$. D'autre part,

$$A_k = p \times H_{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

L'ensemble A_k est donc fermé dans $p \times S$. Enfin, le diamètre de A_k tend vers 0 avec $1/k$. L'espace $p \times S$ étant métrique et complet, il existe au moins un point (p, q) commun à tous les A_k. Ce point (p, q) appartient donc à $\prod_k M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et par suite à M. Par conséquent, p est un point de P. Ainsi $P \supseteq \sum_{\nu \in N} \prod_k F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, c. q. f. d.

Définition 3. Désignons par D_q^p l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ tels que $n_p = q$ et par $\{\mathcal{E}\}$ la famille de tous les ensembles D_q^p $(p, q = 1, 2, \dots)$.

Lemme 4. *Soit S_N une opération de Souslin généralisée. Tout ensemble $M \neq 0$ de $S_N\{\mathcal{E}\}$ peut être obtenu par la formule:*

$$M = \sum_{\nu \in N} \prod_k D_{q(n_1, n_2, \dots, n_k)}^{p(n_1, n_2, \dots, n_k)} \tag{7}$$

avec la condition supplémentaire

$$\prod_k D_{q(n_1, n_2, \dots, n_k)}^{p(n_1, n_2, \dots, n_k)} \neq 0 \qquad \text{pour tout } \nu \in N. \tag{C}$$

Démonstration. En effet, si $\prod_k D_{q(n_1, n_2, \dots, n_k)}^{p(n_1, n_2, \dots, n_k)} = 0$ pour un nombre $\nu_0 \in N$, il existe un indice $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ tel que, pour tout $\nu \in D_{n_1}^1 \cdot D_{n_2}^2 \cdot \ldots \cdot D_{n_k}^k \cdot N$, nous avons $\prod_{k'} D_{q(n_1, n_2, \dots, n_{k'})}^{p(n_1, n_2, \dots, n_{k'})} = 0$. Nous dirons que cet indice est *inutile*. Si un indice $(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$ n'est pas inutile, il existe au moins une suite $n_k^0, n_{k+1}^0, \dots$ telle que $(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k^0, n_{k+1}^0, \dots) \in N$ et que

$$D_{q(n_1)}^{p(n_1)} \cdot D_{q(n_1, n_2)}^{p(n_1, n_2)} \cdot \ldots \cdot D_{q(n_1, n_2, \dots, n_k^0)}^{p(n_1, n_2, \dots, n_k^0)} \cdot \ldots \neq 0.$$

Pour tout indice inutile $(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k)$, nous remplacerons

$$D_{q(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+k'})}^{p(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+k'})} \qquad \text{par} \qquad D_{q(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k^0, n_{k+k'}^0)}^{p(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k^0, n_{k+k'}^0)}$$

où $k' = 0, 1, 2, 3, \dots$. Pour $D_{q(n_1, n_2, \dots, n_k)}^{p(n_1, n_2, \dots, n_k)}$ ainsi obtenu, la condition (C) sera remplie, sans altérer l'égalité (7).

Lemme 5. *Étant données deux opérations de Hausdorff Φ_{N_1} et Φ_{N_2} supposons que*

$$N_1 = \sum_{\nu \in N_2} \prod_k D_{q(n_k)}^{p(n_k)} \qquad \textit{et} \qquad \prod_k D_{q(n_k)}^{p(n_k)} \neq 0 \qquad \textit{pour tout } \nu \in N_2.$$

Alors, pour toute famille d'ensembles $\mathfrak{R}$, on a $\Phi_{N_1}\{\mathfrak{R}\} \subseteq \Phi_{N_2}\{\mathfrak{R}\}$.

Démonstration. Soit E un ensemble de $\Phi_{N_1}\{\mathfrak{R}\}$. E peut être donné par la formule $E = \sum_{\nu \in N_1} \prod_k E_{n_k}$ où $E_n \in \mathfrak{R}$ pour $n = 1, 2, \dots$. Posons $E_n^* = E_{q(n)}$ pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$ et montrons que $E = \sum_{\nu \in N_2} \prod_k E_{n_k}^*$. Il est évident que $E \subseteq \sum_{\nu \in N_2} \prod_k E_{n_k}^*$. D'autre part, nous avons $E \supseteq \sum_{\nu \in N_2} \prod_k E_{n_k}^*$. En effet, soit a un point de $\sum_{\nu \in N_2} \prod_k E_{n_k}^*$. Il existe alors un nombre irrationnel $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \in N_2$, tel que $a \in \prod_k E_{n_k}^*$. Par hypothèse, $E_{n_k}^* = E_{q(n_k)}$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k'}, \dots)$ un nombre irrationnel tel que $\lambda_{p(n_k)} = q(n_k)$ et que $\lambda_{k'} = q(n_1)$ pour tout k' qui n'est égal à aucun $p(n_k)$ où $k = 1, 2, \dots$. Comme $\prod_k D_{q(n_k)}^{p(n_k)} \neq 0$, nous avons toujours $q(n_{k_1}) = q(n_{k_2})$ pour deux k_1 et k_2 tels que $p(n_{k_1}) = p(n_{k_2})$. Ainsi $\lambda \in \prod_k D_{q(n_k)}^{p(n_k)} \subseteq N_1$ et $q \in \prod_{k'} E_{\lambda_{k'}}$, c. q. f. d.

Lemme 6. *Étant données une opération de Hausdorff Φ_{N_1} et une opération de Souslin quasi-généralisée S_N telle que $N_1 \in S_N\{\mathfrak{G}\}$*[1]*, on a*

$$\Phi_{N_1}\{\mathfrak{R}\} \subseteq S_N\{\mathfrak{R}\} \qquad \textit{pour toute famille d'ensembles } \mathfrak{R}.$$

[1]) $\mathfrak{G}$ désigne la famille de tous les ensembles ouverts dans J; nous pouvons évidemment remplacer $\mathfrak{G}$ par la famille $\mathfrak{F}$ de tous les ensembles fermés dans J.

Démonstration. S_N étant une opération de Souslin quasi-généralisée, nous avons d'après le lemme 2 $S_N\{\mathcal{E}\}=S_N\{\mathcal{E}_A\}\supseteq S_N\{\mathfrak{G}\}$ (cf. déf. 3); donc $S_N\{\mathcal{E}\}=S_N\{\mathfrak{G}\}$. Par suite, d'après l'hypothèse, $N_1\in S_N\{\mathcal{E}\}$. Nous pouvons donc poser $N_1=\sum\limits_{\nu\in N}\prod\limits_k D^{p(n_1,n_2,\dots,n_k)}_{q(n_1,n_2,\dots,n_k)}$. D'après le lemme 4, $\left\{D^{p(n_1,n_2,\dots,n_k)}_{q(n_1,n_2,\dots,n_k)}\right\}$ peut être supposé satisfaisant à la condition (C). Or, rangeons tous les indices des systèmes $(n_1,n_2,\dots,n_k)$ où $k=1,2,\dots$ en une suite simple P [1]) et faisons correspondre à $\xi=(n_1,n_2,n_3,\dots)\in J$ le nombre $\varphi(\xi)=(\nu(n_1),\nu(n_1,n_2),\dots)$, où $\nu(n_1,n_2,\dots n_k)$ désigne le numéro de $(n_1,n_2,\dots,n_k)$ dans P. En posant

$D^{\alpha(n)}_{\beta(n)}=D^{p(n_1,n_2,\dots,n_k)}_{q(n_1,n_2,\dots,n_k)}$, lorsque $n=\nu(n_1,n_2,\dots,n_k)$, et $N'=\varphi(N)$, nous aurons $N_1=\sum\limits_{\nu\in N'}\prod\limits_k D^{\alpha(n)}_{\beta(n)}$. D'ailleurs, la condition (C) entraîne $\prod\limits_k D^{\alpha(n_k)}_{\beta(n_k)}\neq 0$ pour tout $\nu\in N'$. Le lemme 5 donne donc $\Phi_{N_1}\{\mathfrak{R}\}\subseteq\Phi_{N'}\{\mathfrak{R}\}=S_N\{\mathfrak{R}\}$, c. q. f. d.

Lemme 7. *Si l'opération de Souslin quasi-généralisée S_N est δ-multiplicative, l'opération S_N est normale,* c. à d. telle que l'on a $S_N\{S_N\{\mathfrak{R}\}\}=S_N\{\mathfrak{R}\}$ pour toute famille d'ensembles $\mathfrak{R}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $S_N\{S_N\{\mathfrak{R}\}\}\subseteq S_N\{\mathfrak{R}\}$. Or, il existe un ensemble N' de nombres irrationnels, homéomorphe à N et tel que $\Phi_{N'}\{\mathfrak{R}\}=S_N\{\mathfrak{R}\}$ pour toute famille d'ensembles $\mathfrak{R}$. D'autre part, M. Sierpiński [2]) a montré qu'il existe une base N_1 telle que $\Phi_{N'}\{\Phi_{N'}\{\mathfrak{R}\}\}=\Phi_{N_1}\{\mathfrak{R}\}$ pour tout $\mathfrak{R}$. Donc, d'après le lemme 6, il nous suffit de montrer qu'il existe un pareil N_1, appartenant d'ailleurs à $S_N\{\mathfrak{G}\}$. MM. Kantorovitch et Livenson [3]) ont montré qu'un N_1 peut être obtenu à partir de N' (et par suite de N) par les opérations: 1) somme d'une infinité dénombrable d'ensembles, 2) produit d'une infinité dénombrable d'ensembles, 3) transformation homéomorphe, 4) produit cartésien [4]) $E\times J$, où E $(E\subseteq J)$ est l'ensemble donné et J l'ensemble de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1 (en transformant $J\times J$ en J par homéomorphie, nous considérons au lieu de $E\times J$ le transformé $[E\times J]$ de $E\times J$, de sorte que $[E\times J]\subseteq J$).

[1]) Cf. L. Kantorovitch et E. Livenson, Fund. Math. XX, p. 55.

[2]) W. Sierpiński: *Sur les opérations de M. Hausdorff*, Fund. Math. XV, pp. 199-211.

[3]) L. Kantorovitch et E. Livenson, Fund. Math. XVIII, pp. 242-244.

[4]) Voir C. Kuratowski: *Topologie I*, p. 7 et p. 148.

Il suffit donc de constater que la famille d'ensembles $S_N\{\mathfrak{G}\}$ est invariante par rapport à toutes ces quatre opérations.

Ad 1) Si $E_n=\sum\limits_{\nu\in N}\prod\limits_k E^{(n)}_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, en posant

$$E^*_{\varphi(n,n_1),n_2,\dots,n_k}=E^{(n)}_{n_1,n_2,\dots,n_k},$$

nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty}E_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu\in N}\prod_k E^*_{\varphi(n,n_1),n_2,n_3,\dots,n_k}=\sum_{\nu'\in N}\prod_k E^*_{\varphi(n,n_1),n_2,\dots,n_k}$$

où $\nu'=(\varphi(n,n_1),n_2,n_3,\dots)$. Donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ appartient à $S_N\{\mathfrak{G}\}$ avec E_n $(n=1,2,\dots)$.

Ad 2) S_N est une opération δ-multiplicative.

Ad 3) D'après un théorème de M. Sierpiński, la famille obtenue de $\mathfrak{G}$ par l'opération $\Phi_{N'}$ de Hausdorff est un invariant topologique, si tous les nombres $\nu=(n_1,n_2,\dots,n_k,\dots)$ de N' possèdent une infinité d'indices k pour lesquels n_k sont différents [1]). Cette condition est remplie dans notre cas.

Ad 4) L'égalité $E=\sum\limits_{\nu\in N'}\prod\limits_k E_{n_k}$, où $E_n\in\mathfrak{G}$, entraîne l'égalité $[E\times J]=\sum\limits_{\nu\in N'}\prod\limits_k [E_{n_k}\times J]$ pour toute opération $\Phi_{N'}$ de Hausdorff et les ensembles $[E_n\times J]$ sont ouverts dans J. Le lemme est ainsi établi.

3. *Démonstration du théorème.* D'abord, il existe par hypothèse un ensemble plan $\mathfrak{R}$, universel pour la famille de tous les ensembles linéaires appartenant à $\mathfrak{R}$. Nous désignons par $A(y_0)$ l'intersection de cet ensemble avec la droite $y=y_0$. Pour tout ensemble linéaire $K\in\mathfrak{R}$, il existe au moins un nombre irrationnel y_0 tel que $K=A(y_0)$. Pour l'opération donnée Φ_N de Hausdorff, il existe d'après un théorème de M. Sierpiński [2]) une opération de Hausdorff Φ_{N^C} telle que, pour toute famille d'ensembles $\mathfrak{A}$, nous avons $(\Phi_N\{\mathfrak{A}\})_C=\Phi_{N^C}\{\mathfrak{A}_C\}$. Désignons par Φ_M l'opération de Hausdorff composée $\Phi_{N^C}\{\Phi_N\{\mathfrak{A}\}\}$.

Posons $\Psi_1=\Phi_M\{\mathfrak{R}\}$ et $\Psi_\alpha=\Phi_M\left\{\sum\limits_{1\leqslant\beta<\alpha}\Psi_\beta\right\}$ pour $2\leqslant\alpha<\Omega$. Il est facile de voir que, pour tout α où $1\leqslant\alpha<\Omega$, nous avons $\Phi_\alpha\subseteq\Psi_\alpha\subseteq\Phi_{4\alpha+3}$. Il suffit donc de considérer les ensembles Ψ_α au lieu de Φ_α.

[1]) W. Sierpiński: *Sur les ensembles mesurables* (*B*), C. R. de Paris, t. 171, (1920), pp. 24—26.

[2]) W. Sierpiński, l. c., Fund. Math. XV, p. 209.

Appelons maintenant *ensemble de Kuratowski* (à base M) l'ensemble défini par l'induction transfinie comme il suit [1]: $L(0,y)=A(y)$; $L(x,y)=\sum\limits_{\nu\in M}\prod\limits_{k}L(x^{(n_k)},y_{(n_k)})$ pour $0\leqslant\bar{x}<\Omega$; $L(x,y)=$ l'ensemble vide pour les autres $x\in C$; enfin $\mathfrak{Z}=\underset{x,y,z}{E}[z\in L(x,y)]$. L'ensemble $\mathfrak{Z}$ est un sous-ensemble de l'espace $C\times J\times J=OXYZ$.

Nous allons voir que l'ensemble de Kuratowski $\mathfrak{Z}$ ainsi défini satisfait à nos conditions [2]. Il est d'abord évident que $\mathfrak{Z}$ est un ensemble universel pour la famille de tous les ensembles linéaires Ψ_α où $0\leqslant\alpha<\Omega$. D'autre part, l'ensemble $C\mathfrak{Z}$, complémentaire de $\mathfrak{Z}$ par rapport à l'espace $C\times J\times J$, est donné par la formule

$$C\mathfrak{Z}=\{C\underset{x,y,z}{E}[0\leqslant\bar{x}<\Omega]\}+\mathfrak{Z}' \tag{8}$$

où $\mathfrak{Z}'=\underset{x,y,z}{E}[z\in L'(x,y)]$, $L'(0,y)=J-A(y)$ et $L'(x,y)=\sum\limits_{\nu\in M^C}\prod\limits_{k}L'(x^{(n_k)},y_{(n_k)})$ pour $0\leqslant\bar{x}<\Omega$, M^C désignant la base de l'opération de Hausdorff Φ_{M^C}, telle que $(\Phi_M\{\mathfrak{A}\})_C=\Phi_{M^C}\{\mathfrak{A}_C\}$ pour toute famille d'ensembles $\mathfrak{A}$; enfin $L'(x,y)=$ l'ensemble vide pour les autres $x\in C$. En effet, nous avons d'abord $C\mathfrak{Z}=\{C\underset{x,y,x}{E}[0\leqslant\bar{x}<\Omega]\}+\sum\limits_{0\leqslant\alpha<\Omega}\underset{x,y,z}{E}\{\bar{x}=\alpha,\ z\in J-L(x,y)\}$ et, pour $\alpha=0$, $J-L(0,y)=L'(0,y)$. Supposons que $J-L(x,y)=L'(x,y)$ pour tout β tel que $0\leqslant\beta<\alpha$. Alors

$$\underset{x,y,z}{E}[\bar{x}=\alpha,\ z\in J-L(x,y)]=\underset{x,y,z}{E}[\bar{x}=\alpha,\ z\in\sum_{\nu\in M^C}\prod_{k}\{J-L(x^{(n_k)},y_{(n_k)})\}]$$

[1]) Nous employons les notations introduites par M. C. Kuratowski dans ses ouvrages cités. Nous en reproduirons ici quelques unes.

Imaginons tous les nombres rationnels rangés en une suite bien déterminée $r_1,r_2,r_3,\dots$; étant donné un point $t=c_1/3+c_2/3^2+c_3/3^3+\dots$ de l'ensemble C de Cantor, c. à d. où $c_i=0$ où 2, envisageons l'ensemble M_t composé des nombres r_i tels que $c_i=2$. L'ensemble M_t étant ordonné selon la grandeur des nombres rationnels, son type d'ordre est nommé le *type d'ordre du nombre* t et désigné par $\bar{t}$. Pour tout point t de l'ensemble C, désignons par $t^{(n)}$ le point de l'ensemble C défini comme il suit: s'il existe dans M_t un $r_k\geqslant r_n$, l'ensemble $M_{t(n)}$ se compose des r_i tels que $r_i<r_n$ et $r_i\in M_t$; dans le cas contraire $t^{(n)}=0$. On voit que $t^{(n)}$ est une fonction de Baire de t telle que $0^{(n)}=0$ et $\bar{t}^{(n)}<\bar{t}$ pour $0<\bar{t}<\Omega$. Posons encore, pour tout nombre irrationnel $y=(y_1,y_2,\dots,y_k,\dots)$ entre 0 et 1, $y_{(n)}=(y_{1\cdot 2^n},y_{3\cdot 2^n},y_{5\cdot 2^n},\dots,y_{(2k-1)\cdot 2^n},\dots)$. Alors $y(n)$ est une fonction continue de y.

[2]) En transformant $C\times J$ en un sous-ensemble de J, nous obtenons facilement l'ensemble plan désiré.

et $J-L(x^{(n_k)},y_{(n_k)})=L'(x^{(n_k)},y_{(n_k)})$. Donc

$$\underset{x,y,z}{E}[\bar{x}=\alpha,\ z\in L(x,y)]=\underset{x,y,z}{E}[\bar{x}=\alpha,\ z\in L'(x,y)],$$

d'où la formule (8).

Afin de prouver que $\mathfrak{Z}$ (de même que $C\mathfrak{Z}$) est un ensemble de $S_\Theta\{\mathfrak{R}\}$, considérons l'espace $C\times J\times J\times J=OXYZU$, dont les points seront désignés par (x,y,z,u), et la fonction $\nu(n_1,n_2,\dots,n_k)$, que nous avons introduite dans le lemme 6. Désignons par T l'ensemble de tous les nombres irrationnels $u=(u_1,u_2,\dots,u_k,\dots)$ tels que:

$$(u_{\nu(1)},u_{\nu(2)},\dots,u_{\nu(m)},\dots)\in M,$$

$$(u_{\nu(n_1,n_2,\dots,n_k,1)},u_{\nu(n_1,n_2,\dots,n_k,2)},\dots,u_{\nu(n_1,n_2,\dots,n_k,m)},\dots)\in M$$

pour tout système d'entiers positifs $n_1,n_2,\dots,n_k$ où $k=1,2,\dots$.

Si $p=(x_0,y_0,z_0)$ est un point de $\mathfrak{Z}$, il existe un nombre α $(0\leqslant\alpha<\Omega)$ tel que $\bar{x}_0=\alpha$ et $z_0\in L(x_0,y_0)$. Si $\alpha\neq 0$, on a $z_0\in\sum\limits_{\nu\in M}\prod\limits_{k}L(x_0^{(n_k)},y^0_{(n_k)})$; il existe donc un nombre irrationnel $\nu=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\dots)$ tel que $\nu\in M$ et $z_0\in\prod\limits_{k}L(x_0^{(\lambda_k)},y^0_{(\lambda_k)})$. Posons: $\lambda_1=u_{\nu(1)}$, $\lambda_2=u_{\nu(2)}$, ..., $\lambda_m=u_{\nu(m)}$, ... Si $x_0^{(\lambda_k)}\neq 0$, on a $z_0\in\sum\limits_{\nu\in M}\prod\limits_{k'}L((x_0^{(\lambda_k)})^{(n_{k'})},(y^0_{(\lambda_k)})_{(n_{k'})})$; par suite, il existe un nombre irrationnel $\nu_0=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m,\dots)$ tel que $\nu_0\in M$ et $z_0\in\prod\limits_{k'}L((x_0^{(\lambda_k)})^{(\mu_{k'})},(y^0_{(\lambda_k)})_{(\mu_{k'})})$. Posons: $\mu_1=u_{\nu(k,1)}$, $\mu_2=u_{\nu(k,2)}$, ... et continuons ainsi de suite. Prenons, d'autre part, un point fixe $(p_1,p_2,\dots,p_n,\dots)\in M$ et, lorsque $\bar{x}_0=0$ ou $\bar{x}^{(\lambda_k)}=0$ etc., posons $u_{\nu(1)}=p_1$, $u_{\nu(2)}=p_2,\dots$, $u_{\nu(k,1)}=p_1$, $u_{\nu(k,2)}=p_2,\dots$ etc. Ainsi, il existe toujours un point $u=(u_1,u_2,u_3,\dots)$ de T.

Considérons donc dans l'espace $OXYZU$, l'ensemble $\mathfrak{S}$ défini par la formule suivante [1]:

$$\begin{aligned}(xyzu\in\mathfrak{S})\equiv(0\leqslant\bar{x}<\Omega)(u\in T)\cdot\\ \cdot\Big[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{(k_1,k_2,\dots,k_n)}\{(x^{u(k_1,k_2,\dots,k_{n-1})}\neq 0)\ (x^{u(k_1,k_2,\dots,k_n)}=0)\to(z\in L(0,y_{u(k_1,k_2,\dots,k_n)}))\}\Big]\cdot\\ \cdot[(x=0)\to(z\in L(0,y))],\end{aligned} \tag{9}$$

où

$$x^{(n_1,n_2,\dots,n_k)}=(\dots((x^{(n_1)})^{(n_2)})\dots)^{(n_k)},\qquad y_{(n_1,n_2,\dots,n_k)}=(\dots((y_{(n_1)})_{(n_2)})\dots)_{(n_k)},$$

$$u(k_1,k_2,\dots,k_n)=(u_{\nu(k_1)},\ u_{\nu(k_1,k_2)},\dots,\ u_{\nu(k_1,k_2,\dots,k_n)})\qquad\text{et}\qquad x^{u(k_0)}=x.$$

[1]) Cf. C. Kuratowski et J. v. Neumann, l. c., Annals of Math. **38**, p. 523.

Nous avons vu plus haut que, pour tout point (x,y,z) de $\mathfrak{Z}$, il existe au moins un u irrationnel tel que $(x,y,z,u)\in\mathfrak{S}$. Inversement, s'il existe un point $(x,y,z,u)\in\mathfrak{S}$, le point (x,y,z) appartient à $\mathfrak{Z}$. Pour obtenir l'ensemble de Kuratowski $\mathfrak{Z}$, il suffit donc de projeter $\mathfrak{S}$ sur l'espace $OXYZ$.

Or, l'ensemble T peut être défini par l'équivalence

$$(t\epsilon T)\equiv\Big[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{(k_1,k_2,\dots,k_n)}\{(u_{\nu(k_1,k_2,\dots,k_n,1)},u_{\nu(k_1,k_2,\dots,k_n,2)},\dots)\,\epsilon M\}\Big]\cdot[(u_{\nu(1)},u_{\nu(2)},\dots)\,\epsilon M].$$

Soit Φ la famille de tous les ensembles fermés dans $J=OU$. Nous pouvons supposer que $M=\Phi_M(D_n)$ où $D_n=\sum_{k=1}^{\infty}D_n^k$ (voir déf. 3). Donc, $M\epsilon\Phi_M\{\mathfrak{G}\}$ et, d'après (5), $\Phi_M\{\mathfrak{G}\}\subseteq S_\Theta\{\mathfrak{G}\}=S_\Theta\{\Phi\}$. Ainsi $M\epsilon S_\Theta\{\Phi\}$ et, par suite, nous pouvons écrire

$$M=\sum_{\nu\epsilon\Theta}\prod_{k'}H_{n_1,n_2,\dots,n_{k'}}\quad\text{où}\quad H_{n_1,n_2,\dots,n_{k'}}\epsilon\,\Phi.$$

Si nous fixons le système $(k_1,k_2,\dots,k_n)$, le nombre irrationnel $\xi=g(u)=(u_{\nu(k_1,k_2,\dots,k_n,1)},u_{\nu(k_1,k_2,\dots,k_n,2)},\dots)$, de même que le nombre $\xi=h(u)=(u_{\nu(1)},u_{\nu(2)},\dots)$, est une fonction de u continue dans J. D'après (3), l'ensemble $g^{-1}(M)=\sum_{\nu\epsilon\Theta}\prod_{k'}g^{-1}(H_{n_1,n_2,\dots,n_{k'}})$, de même que $h^{-1}(M)$, appartient aussi à $S_\Theta\{\Phi\}$. L'opération étant δ-multiplicative par hypothèse, T appartient encore à $S_\Theta\{\Phi\}$.

D'autre part, $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ étant fixe, $u_{\nu(k_1)},u_{\nu(k_1,k_2)},\dots$ et $u_{\nu(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ sont des fonctions continues de u. Par suite, $x^{u(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ est une fonction de Baire de deux variables u et x. Les ensembles des x tels que $x^{u(k_1,k_2,\dots,k_n)}=0$ et $x^{u(k_1,k_2,\dots,k_n)}\neq0$, de même que leurs complémentaires par rapport à l'espace OXU, sont des ensembles mesurables B dans OXU. D'après le lemme 2, ils appartiennent donc à $(\mathfrak{R}\times\Phi)_A\subseteq S_\Theta\{\mathfrak{R}\times\Phi\}$. Enfin, $y_{u(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ est une fonction continue de y et l'espace OU se décompose en une infinité dénombrable d'intervalles où elle est constante par rapport à la variable u. L'ensemble $\underset{u,z}{E}[z\,\epsilon L(0,y_{u(k_1,k_2,\dots,k_n)})]$ est donc une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la forme $\underset{u,z}{E}[z\,\epsilon L(0,y_{u(k_1,k_2,\dots,k_n)})]\cdot[u\,\epsilon(\alpha,\beta)]$ où (α,β) désigne un intervalle de OU dans lequel $y_{u(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ est indépendant de u. D'après l'hypothèse (3), on a $L(0,y_{u(k_1,k_2,\dots,k_n)})\,\epsilon\,\mathfrak{R}$; il en résulte que

$L(0,y_{u(k_1,k_2,\dots,k_n)})\,\epsilon\,(S_\Theta\{\mathfrak{R}\times\Phi\})_\sigma=S_\Theta\{\mathfrak{R}\times\Phi\}$. D'après le lemme 7, l'opération S_Θ est normale et l'ensemble

$$\prod_{n=k}^{\infty}\prod_{(k_1,\dots,k_n)}\underset{x,y,z,u}{E}\Big\{(x^{u(k_1,\dots,k_{n-1})}\neq0)\,(x^{u(k_1,\dots,k_n)}=0)\to z\,\epsilon L(0,y_{u(k_1,\dots,k_n)})\Big\},$$

comme produit d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à $S_\Theta\{\mathfrak{R}\times\Phi\}$ appartient encore à $S_\Theta\{\mathfrak{R}\times\Phi\}$. On constate de la même manière que l'ensemble $\underset{x,y,z,u}{E}\{(x=0)\to z\,\epsilon L(0,y)\}$ appartient aussi à $S_\Theta\{\mathfrak{R}\times\Phi\}$ et, par suite, que l'ensemble $\mathfrak{S}$ lui appartient également. En vertu de notre théorème de projection (lemme 3), l'ensemble $\mathfrak{Z}$ appartient donc à $S_\Theta\{\mathfrak{R}\}$, en regardant OU comme l'espace de Baire.

D'une façon analogue. nous pouvons conclure que $\mathfrak{Z}'$ appartient aussi à $S_\Theta\{\mathfrak{R}\}$. D'après (2), les ensembles analytiques linéaires appartiennent à $S_\Theta\{\mathfrak{R}\}$. De là, nous somme ammenés à la conclusion (voir (8)) que $\mathfrak{Z}$, ainsi que $C\mathfrak{Z}$, appartiennent à $S_\Theta\{\mathfrak{R}\}$, c. q. f. d.

4. *Cas particuliers. Exemple 1* (un problème de M. E. Sélivanowski). MM. E. Sélivanowski et O. Nikodym ont considéré une classification des ensembles qui s'obtiennent à partir des ensembles analytiques — d'abord au moyen de deux opérations:

(α) soustraction des deux ensembles,

(β) addition d'une infinité dénombrable des ensembles,

ce qui nous donne la famille des ensembles que nous désignons par S_1 — et ensuite au moyen de l'opération (A) de Souslin, ce qui nous donne la famille A_2. La famille S_1 peut être dite *famille borelienne à base* $\mathfrak{G}_A$ et la famille A_2 peut s'exprimer par $A_2=(\mathfrak{G}_A)_{CA}$.

M. E. Sélivanowski a démandé si tous les ensembles disjoints de la classe A_2 sont séparables au moyen des ensembles S_1 [1]).

La réponse y est négative. Pour le voir, considérons l'opération de Hausdorff Φ_J, qui correspond à l'addition d'une infinité dénombrable d'ensembles. $\Phi_J\{\mathfrak{R}\}$ peut donc être désignée par $\mathfrak{R}_\sigma$. Prenons comme $\mathfrak{R}$ la famille de tous les ensembles A_ϱ [2]). Il est facile de voir

[1]) Voir C. R. de Paris, t. 184 (1927), p. 1313. Deux ensembles A et B sont dits *séparables au moyen des ensembles de la famille* $\mathfrak{R}$, s'il existe dans $\mathfrak{R}$ deux ensembles disjoints A_1 et B_1 tels que $A_1\supseteq A$ et $B_1\supseteq B$. Cf. N. Lusin: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, p. 156.

[2]) Nous appelons A_ϱ tout ensemble qui est une différence de deux ensembles analytiques.

que la famille $\mathfrak{R}$ satisfait aux conditions (1)—(4) de notre théorème. Considérons enfin comme S_Θ l'opération analytique (A) de Souslin. Nous avons évidemment $\mathfrak{G}_A \supseteq \mathfrak{G}_\delta$, donc la condition (5). Ainsi, d'après notre théorème, il existe (dans un plan) un ensemble $\mathfrak{Z}$ qui appartient simultanément à A_2 et A_{2C} et qui est universel pour tout ensemble linéaire S_1. Ainsi $\mathfrak{Z}$ et $C\mathfrak{Z}$ ne sont pas séparables au moyen des ensembles de S_1.

MM. E. Sélivanowski et O. Nikodym ont considéré aussi les familles d'ensembles de classes supérieures. Soit α un nombre ordinal tel que $2 \leqslant \alpha < \Omega$. La famille A_α est définie par l'opération $(\sum_{1 \leqslant \beta < \alpha} S_\beta)_A$ et S_α est celle des ensembles qui s'obtiennent à partir des familles A_α par les opérations (α) et (β) indéfiniment répétées. Le problème de E. Sélivanowski a été posé sous une forme générale: tous les ensembles $A_{\alpha+1}$ disjoints sont-ils toujours séparables au moyen des ensembles S_α? En procédant comme auparavant, on parvient à la réponse négative [1]).

Exemple 2 (un théorème de MM. L. Kantorovitch et E. Livenson). MM. L. Kantorovitch et E. Livenson ont démontré que les ensembles des familles A_α, considérées plus haut, sont des ensembles qui appartiennent à la fois aux classes projectives P_2 et C_2 [2]); ils ont signalé aussi l'existence d'un ensemble appartenant à la fois aux classes P_2 et C_2 sans appartenir à la famille A_α [3]) où $1 \leqslant \alpha < \Omega$.

Nous allons déduire de notre théorème la deuxième partie de cette proposition. En effet, nous n'avons qu'à prendre pour Φ_N l'opération (A) de Souslin, pour $\mathfrak{R}$ la famille de tous les ensembles A_ϱ,

[1]) D'autre part, tous les ensembles $A_{\alpha+1}$ disjoints sont toujours séparables au moyen des ensembles appartenant à la fois aux classes $A_{\alpha+1}$ et $(A_{\alpha+1})_C$. De plus, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Soit $\mathfrak{R}$ une famille d'ensembles de l'espace R, telle que $\mathfrak{R}_C \subseteq \mathfrak{R}_A$ et $R \in \mathfrak{R}$. Alors deux ensembles disjoints de $\mathfrak{R}_A$ sont toujours séparables au moyen des ensembles appartenant à la fois aux familles $\mathfrak{R}_A$ et $\mathfrak{R}_{AC}$. Cf. K. Kunugui, l. c., p. 19, th. 10.

[2]) L. Kantorovitch et E. Livenson: *Sur les ensembles projectifs de M. N. Lusin*, C. R. de Paris, t. 190 (1927), pp. 1113—1115. C. Kuratowski: *Les ensembles projectifs et l'opération* (A), C. R. de Paris 203 (1936), pp. 911—913; *Les suites transfinies d'ensembles et les ensembles projectifs*, Fund. Math. XXVIII, pp. 186—196.

[3]) L. Kantorovitch et E. Livenson, l. c., Fund. Math. XVIII, p. 217; *Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs*, C. R. de Paris 204 (1937), pp. 466—467.

enfin, pour Θ l'ensemble linéaire $[J \times \Theta_1]$ où Θ_1 est une base de l'opération de Souslin généralisée, telle que $S_{\Theta_1}\{\mathfrak{F}\} = P_2$. Nous pouvons supposer que Θ_1 est un complémentaire analytique. Il est évident que $S_{\Theta_1}\{\mathfrak{G}\} = S_\Theta\{\mathfrak{R}\} = P_2$, de sorte que S_Θ est une opération de Souslin quasi-généralisée, qui est d'ailleurs δ-multiplicative. Les conditions (1)—(4) et la condition (5) $P_2 \supset \mathfrak{G}_{AC}$ sont réalisées trivialement. Il existe donc en vertu de notre théorème un ensemble plan $\mathfrak{Z}$ appartenant à la fois aux classes P_2 et C_2 et qui est universel pour tous les ensembles linéaires A_α où $1 \leqslant \alpha < \Omega$. L'ensemble $\mathfrak{Z}$ n'est forcément aucun de ces ensembles, c. q. f. d.

Du reste, notre méthode s'applique également à l'étude des propositions analogues concernant les ensembles projectifs des classes α supérieures ($2 \leqslant \alpha < \Omega$).

Université Impériale de Hokkaïdo, 10. IV. 1937.