3. Nous nous appuyerons sur les propositions suivantes:

(1) Etant donnée une transformation $f \epsilon S_1^{X \times Y}$ du produit cartésien $X \times Y$, où X est un espace métrique quelconque et Y un espace métrique, connexe et localement connexe, si

$$f \sim 1 \text{ sur } (x) \times Y \quad \text{pour } tout \quad x \epsilon X$$

et

$$f \sim 1 \text{ sur } X \times (y_1) \text{ au moins pour } un \; y_1 \epsilon Y,$$

on a

$$f \sim 1 \text{ sur } X \times Y$$ [5]).

(2) Pour qu'un ensemble $X \subset S_2 - (0) - (\infty)$ ne coupe pas S_2 entre les points 0 et ∞, il faut et il suffit que l'on ait $r \sim 1$ sur X [6]).

(3) Pour qu'un sous-ensemble localement connexe Y de S_2 ne coupe pas S_2, il faut et il suffit que l'on ait $f \sim 1$ sur Y, quelle que soit la fonction $f \epsilon S_1^Y$ [7]).

4. Le théorème énoncé au début revient au suivant:

Tout sous-ensemble Y de S_2 qui est connexe, localement connexe et qui ne coupe pas S_2, est un semicontinu.

Démonstration. Posons $X = S_2 - Y$. Soient $y_1, y_2 \epsilon Y$ deux points différents quelconques. On peut admettre sans restreindre la généralité que $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$ et $1 \epsilon X$. Posons pour $(x,y) \epsilon X \times Y$:

$$f(x,y) = r\left(\frac{xy - x}{y - x}\right), \quad \text{si} \quad y \neq \infty \quad \text{et} \quad f(x, \infty) = r(x).$$

On vérifie facilement que $f \epsilon S_1^{X \times Y}$. En vertu de (3), on a $f \sim 1$ sur $(x) \times Y$ pour tout $x \epsilon X$. Comme $f(x,0) = 1$, on a aussi $f \sim 1$ sur $X \times (0)$. Il en résulte en vertu de (1) que $f \sim 1$ sur $X \times Y$, d'où $f \sim 1$ sur $X \times (\infty)$, c. à d. que $r \sim 1$ sur X.

En vertu de (2), il existe donc un continu $K \subset S_2 - X = Y$ tel que $0, \infty \epsilon K$, c. q. f. d.

[5]) ibid., p. 66, (8).
[6]) ibid., p. 75, th. 1.
[7]) ibid., p. 106, th. 20.

Un théorème sur les prolongements des transformations.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Soit X_0 un sous-ensemble fermé d'un espace [1]) X. Parmi les transformations continues de X_0 en sous-ensembles d'un autre espace Y, il y en a en général qui n'admettent pas de prolongements continus sur l'espace X tout entier avec les valeurs appartenant à Y. La question s'impose quel est l'ensemble $E \subset X - X_0$ qu'il suffit de supprimer, afin de pouvoir trouver un prolongement continu de f sur $X - E$. Or, M. Eilenberg a démontré récemment [2]) que dans le cas où X est compact et la dimension de $X - X_0$ ne surpasse pas n, Y étant une surface sphérique euclidienne S_k de dimension k, on peut trouver, pour chaque fonction donnée $f \epsilon S_k^{X_0}$, un ensemble fermé $E \subset X - X_0$ de dimension $< n - k$, tel que f admette un prolongement $f' \epsilon S_k^{X-E}$. De plus, dans le cas où $X - X_0$ est un polytope [3]), l'ensemble E peut être, lui aussi, supposé un polytope.

[1]) Tout espace est entendu dans ce travail dans le sens d'espace métrique séparable.

[2]) S. Eilenberg, *Un théorème de dualité*, Fund. Math. 26 (1936), p. 280.

[3]) Un polytope (infini) est un ensemble P qui se laisse représenter sous forme d'un *complexe géométrique infini* (nommé aussi *décomposition simpliciale de P*), c. à d. d'une somme $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, où Δ_i sont des simplexes géométriques assujettis aux conditions: 1) $\Delta_i \cdot \Delta_j$ est une face (de dimension $\geqslant -1$) de Δ_i et Δ_j; 2) aucun point de P n'est point d'accumulation d'une suite de points appartenant à des différents termes de la suite $\{\Delta_i\}$.

Le but de ce travail est de montrer que, dans le théorème de M. Eilenberg, l'hypothèse $Y = S_k$ se laisse remplacer par une hypothèse moins restrictive, à savoir que Y est un espace localement connexe en dimensions $<n$ [4]) et connexe en dimensions $<k$ [5]). De plus, l'hypothèse que l'espace X est compact se montre superflue.

Théorème. *Soient: X_0 un sous-ensemble fermé d'un espace X,* $\dim (X - X_0) \leqslant n$, *$Y$ un espace localement connexe en dimensions $<n$ et connexe en dimensions $<k$.*

Il existe alors, pour toute fonction $f \in Y^{X_0}$, un ensemble $E \subset X - X_0$ de dimension $<n-k$ [6]), fermé dans X et tel que f admet un prolongement $f' \in Y^{X-E}$.

Si, en outre, $X - X_0$ est un polytope, E peut aussi en être supposé un.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $X - X_0$ est un polytope donné sous la forme d'un complexe infini K. L'espace Y étant localement connexe en dimensions $<n$, la fonction f admet un prolongement continu f^* sur un entourage U de X_0 [7]). On peut admettre [8]) que la décomposition simpliciale K de $X - X_0$ est assez fine pour qu'il existe un sous-complexe géométrique H de K, fermé

[4]) Un espace M est dit *localement connexe en dimension m* au point x, lorsqu'à chaque entourage U de x correspond un entourage V de x tel que chaque fonction continue φ transformant la surface S_m d'une sphère euclidienne $(m+1)$-dimensionnelle Q_{m+1} en un sous-ensemble de V admet un prolongement $\varphi' \in U^{Q_{m+1}}$. L'espace M est *localement connexe en dimension m*, lorsqu'il l'est en chacun de ses points.

[5]) L'espace M est dit *connexe en dimension m*, lorsque toute fonction $\varphi \in M^{S_m}$ admet un prolongement $\varphi' \in M^{Q_{m+1}}$. D'après un théorème de M. Hurewicz, les espaces connexes en dimensions $<k$ se laissent caractériser parmi les espaces compacts localement connexes en dimensions $<k$ par la condition que leurs groupes de Betti de dimensions $<k$, de même que leur groupe fondamental (dans le cas $k>0$), disparaissent. Voir W. Hurewicz, *Beiträge zur Topologie der Deformationen II* et *IV*, Proc. Akad. Amsterdam, vol. 38 (1935), p. 522 et vol. 39 (1936), p. 117, renvoi [4]). Les espaces à la fois connexes en dimensions $<k$ et localement connexes en mêmes dimensions coïncident aussi avec les espaces *„péaniens en dimensions $<k$“* de M. C. Kuratowski, *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*, Fund. Math. 24 (1935), p. 270.

[6]) Dans le cas où $k<n$, l'inégalité $\dim E < k - n$ signifie que l'ensemble E est vide.

[7]) Voir C. Kuratowski, l. c., p. 273, th. 1, I.

[8]) Voir le livre de M. M. P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935, p. 164, th. III.

dans X et tel que $\overline{X-H} \subset U$. L'espace Y étant connexe en dimensions $<k$, la fonction f^*, considerée seulement dans $\overline{X-H}$, admet [9]) un prolongement continu f'' sur l'ensemble $\overline{X-H} + T_k$, où T_k désigne la somme de tous les simplexes de H de dimensions $\leqslant k$.

Nous allons montrer qu'il existe un polytope $E \subset H$ de dimension $<n-k$, fermé dans X, et une fonction $r(x)$ rétractant $X - E$ en $\overline{X-H} + T_k$. Cette démonstration faite, il ne restera qu'à poser $f'(x) = f''r(x)$, pour obtenir la fonction f' satisfaisant à la thèse du théorème.

Dans le cas où la dimension de $X - \overline{X-H}$ est $\leqslant k$, l'ensemble $\overline{X-H} + T_k$ coïncide avec X et il n'y a rien à démontrer. Admettons donc l'existence du polytope et de la rétraction demandée dans le cas où $X - \overline{X-H}$ est un polytope de dimension $<n$. Il existe alors un polytope $E' \subset T_{n-1}$ de dimension $<n-1-k$ et une fonction $r'(x)$ rétractant $\overline{X-H} + T_{n-1} - E'$ en $\overline{X-H} + T_k$. Désignons, pour tout simplexe n-dimensionnel Δ du complexe H, par $A(\Delta)$ la somme de tous les segments qui réunissent le centre barycentrique $b(\Delta)$ de Δ avec les points du polytope $E' \cdot \Delta$; dans le cas où $E' \cdot \Delta = 0$, posons $A(\Delta) = b(\Delta)$. La dimension de $E' \cdot \Delta$ étant $<n-1-k$, on a $\dim A(\Delta) < n-k$ et par conséquent la dimension du polytope $E = E' + \Sigma A(\Delta)$ (où la sommation s'étend à tous les simplexes n-dimensionnels Δ du complexe H) est $<n-k$.

Désignons enfin, pour tout $x \in \Delta - E$, où Δ est un simplexe n-dimensionnel de H, par $r''(x)$ la projection de x du centre $b(\Delta)$ sur la frontière de Δ et posons $r''(x) = x$ pour tout $x \in \overline{X-H} + T_{n-1} - E'$. Ainsi définie, $r''(x)$ est une fonction rétractant l'ensemble $X - E$ en $\overline{X-H} + T_{n-1} - E'$. Par conséquent, la fonction $r(x) = r'r''(x)$ constitue une rétraction de $X - E$ en $\overline{X-H} + T_k$, ce qui achève la démonstration du théorème dans le cas où $X - X_0$ est un polytope infini.

Soit maintenant $X - X_0$ un ensemble arbitraire de dimension $\leqslant n$. Supposons d'abord que Y est une surface sphérique S_k.

Lorsque $k=0$, l'espace Y ne contient que deux points y_1 et y_2. Comme les ensembles $X'_i = \underset{x \in X_0}{\mathrm{E}} [f(x) = y_i]$ sont fermés dans X, disjoints et la dimension de l'ensemble $X - (X'_1 + X'_2) = X - X_0$ est $\leqslant n$, il existe [10]) une décomposition de X en deux ensembles fermés X_1

[9]) Voir C. Kuratowski, l. c., p. 276, th. 1', I'.

[10]) Voir W. Hurewicz, *Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre*, Fund. Math. 24 (1935), p. 146.

et X_2 tels que $X_i' \subset X_i$ et $\dim X_1 \cdot X_2 \leqslant n-1$. Il ne reste donc qu'à poser $E = X_1 \cdot X_2$ et $f'(x) = y_i$ pour tout $x \in X_i - E$, afin d'obtenir le prolongement en question.

Lorsque $k \geqslant 1$, le théorème étant supposé vrai pour tout $k' < k$, décomposons S_k en deux hemisphères Y_1 et Y_2 telles que $Y_1 \cdot Y_2 = S_{k-1}$; les ensembles $X_i' = \underset{x \in X_0}{\mathrm{E}}[f(x) \in Y_i]$ étant fermés et la dimension de $X - (X_1' + X_2') = X - X_0$ étant $\leqslant n$, il existe[10]) une décomposition de X en deux ensembles fermés X_1 et X_2 tels que $X_i' \subset X_i$ et $\dim (X_1 \cdot X_2 - X_1' \cdot X_2') \leqslant n-1$. La fonction f transformant $X_1' \cdot X_2'$ en S_{k-1}, il existe un sous-ensemble E de dimension $<(n-1)-(k-1) = n-k$ de $X_1 \cdot X_2 - X_1' \cdot X_2'$, fermé dans $X_1 \cdot X_2$ (et par suite aussi dans X) et tel que f admet un prolongement continu sur $X_1 \cdot X_2 - E$ avec les valeurs appartenant à S_{k-1}. Or, l'ensemble $T_i = X_i' + (X_1 \cdot X_2 - E)$ constitue un sous-ensemble fermé de $X_i - E$ et les valeurs de la fonction f, prolongée sur T_i, appartiennent à Y_i. Il en résulte que cette fonction se laisse prolonger d'une manière continue sur l'ensemble $X_i - E$ tout entier avec les valeurs appartenant à Y_i. En prolongeant ainsi f sur chacun des ensembles $X_i - E$, on parvient à un prolongement demandé $f' \in S_k^{X-E}$ de f.

Ceci établi, passons au cas général de Y. D'après un théorème de M. Kuratowski[11]), il existe un sur-espace Z de Y, tel que Y est fermé dans Z, que $Z - Y$ est un polytope de dimension $\leqslant n$ et que f admet un prolongement $f^* \in Z^X$. L'espace Y étant localement connexe en dimensions $<n$, il existe[7]) une fonction $r(x)$ rétractant un entourage U de Y (dans l'espace Z) en Y. On peut admettre que le polytope $Z - Y$ est donné avec une décomposition simpliciale K assez fine pour qu'il existe un sous-complexe H de K, fermé dans X et tel que $\overline{X - H} \subset U$. Soit $k+l$ la dimension de H. Dans le cas où $l \leqslant 0$, la rétraction $r(x)$ admet[9]) un prolongement $r' \in Y^Z$ et la fonction $f'(x) = r'f^*(x)$ satisfait à la thèse du théorème. Admettons donc que le théorème est vrai dans le cas où l'espace Z, l'entourage U et le polytope H peuvent être choisis de manière que la dimension de H soit $<k+l$ et passons au cas où $\dim H = k+l$ avec $l \geqslant 1$. Soient: Δ un simplexe de dimension $k+l$ de H et Δ' sa frontière. Posons:

$$X_\Delta = \underset{x \in X}{\mathrm{E}}[f^*(x) \in \Delta], \qquad X_{\Delta'} = \underset{x \in X}{\mathrm{E}}[f^*(x) \in \Delta'].$$

[11]) C. Kuratowski, *Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes*, Fund. Math. 24 (1935), p. 266, th. 2.

Le théorème étant établi pour les transformations en surfaces sphériques, il existe un ensemble $E_\Delta \subset X_\Delta - X_{\Delta'}$, fermé dans X_Δ (et par conséquent aussi dans X), tel que $\dim E_\Delta < n - (k+l-1) \leqslant n-k$ et que la fonction f^*, considerée dans X_Δ, admet un prolongement $f_\Delta \in \Delta'^{X_\Delta - E_\Delta}$. On voit aisément que l'ensemble $E' = \sum_\Delta E_\Delta$, où la sommation s'étend à tous les simplexes Δ de dimension $k+l$ de H, est fermé dans H et par conséquent aussi dans Z, et que sa dimension est $<n-k$. En posant donc $f_0(x) = f^*(x)$ pour tout $x \in Z - \sum_\Delta \Delta$ et $f_0(x) = f_\Delta(x)$ pour tout $x \in \Delta - E_\Delta$, on obtient une transformation continue de $X - E'$ en $Z' = Z - \sum_\Delta (\Delta - \Delta')$.

Or, l'ensemble Z' est un sous-ensemble de Z tel que $\overline{Z' - Y}$ est un polytope, la fonction $r(x)$ constitue une rétraction de $\overline{Z' - H}$ en Y et $Z' \cdot H$ est un polytope de dimension $<k+l$. Conformément à l'hypothèse que le théorème est vrai dans ce dernier cas, il existe donc un ensemble E'' de dimension $<n-k$, contenu dans $X - E' - X_0$, fermé dans $X - E'$ et tel que f admet un prolongement $f' \in Y^{X - E' - E''}$. Il en résulte que l'ensemble $E = E' + E''$ et la fonction f' satisfont à la thèse du théorème, c. q. f. d.

En appliquant le théorème qui vient d'être démontré à la transformation de l'ensemble X_0 en lui-même par l'identité, on parvient au

Corollaire 1. *X_0 étant un sous-ensemble fermé, localement connexe en dimensions $<n$ et connexe en dimensions $<k$, d'un espace X satisfaisant à la condition $\dim (X - X_0) \leqslant n$, il existe un ensemble $E \subset X - X_0$ de dimension $<n-k$, fermé dans X et tel que X_0 est un rétracte de $X - E$.*

Dans le cas où $X - X_0$ est un polytope, E peut aussi en être supposé un.

Enfin, on a le suivant

Corollaire 2. *Soit f une transformation continue d'un espace M de dimension $\leqslant n$ en un sous-ensemble de l'espace euclidien R_k à k-dimensions. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors des transformations $f' \in R_k^M$ telles que $\varrho(f(x), f'(x)) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in M$ et que $\dim \underset{x}{\mathrm{E}}[f'(x) = 0] \leqslant n-k$* [12]).

[12]) Dans le cas où l'espace M est compact, la thèse du corollaire 2 est contenue dans un théorème plus précis, dû à M. W. Hurewicz (*Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume*, Sitzungsber. Preussischen Akad. 34, 1933, p. 765), d'après lequel les fonctions f' satisfaisant à la condition $\dim \underset{x}{\mathrm{E}}[f'(x) = p] \leqslant n-k$ pour tout $p \in R_k$, constituent un ensemble dense dans l'espace R_k^M. La question si ce dernier théorème subsiste aussi sans l'hypothèse que M est compact reste ouverte.

Posons, en effet:

$$Q_k = \underset{p}{\mathrm{E}}[\varrho(p,0) \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon], \qquad S_{k-1} = \underset{p}{\mathrm{E}}[\varrho(p,0) = \tfrac{1}{2}\varepsilon],$$

$$X = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \in Q_k], \qquad X_0 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \in S_{k-1}].$$

En vertu du théorème démontré, il existe un ensemble $E \subset X - X_0$ de dimension $\leqslant n-k$, fermé dans X, et un prolongement $f^* \in S_{k-1}^{X-E}$ de la fonction f (considerée seulement dans X_0). On voit sans peine que la fonction

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour} \quad x \in M - X, \\ \dfrac{\varrho(x,E)}{\varrho(x,E)+\varrho(x,X_0)} \cdot f^*(x) & \text{pour} \quad x \in X - E, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in E, \end{cases}$$

satisfait à la thèse du corollaire 2.

Sur un théorème d'existence dans la théorie des ensembles projectifs.

Par

K. Kunugi (Sapporo, Japon).

1. L'existence effective des classes d'ensembles, dans la théorie des ensembles projectifs, se démontrait en général par la méthode de la diagonale [1]). Étant donnée une famille $\mathfrak{K}$ d'ensembles linéaires ou plans, qui possède un ensemble universel et qui jouit de certaines conditions supplémentaires, on peut affirmer qu'il existe des ensembles de $\mathfrak{K}$ dont les complémentaires (par rapport à la droite ou au plan) ne sont pas des ensembles de $\mathfrak{K}$. Cependant ce procédé ne nous fournit aucun renseignement sur la construction de la partie commune de $\mathfrak{K}$ et de $\mathfrak{K}_C$ (famille des ensembles complémentaires de ceux de $\mathfrak{K}$). Or, nous allons voir que la méthode introduite par M. Kuratowski pour l'évaluation des classes projectives des ensembles définis par l'induction transfinie [2]) nous donne un moyen de constater l'existence des ensembles qui sont simultanément de la classe $\mathfrak{K}$ et de la classe $\mathfrak{K}_C$, sans être des ensembles d'une classe $\mathfrak{L}(\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}_C)$ donnée d'avance et satisfaisant à certaines conditions.

---

[1]) Voir W. Sierpiński: *Sur l'existence de diverses classes d'ensembles*, Fund. Math. XIV, pp. 82—91; O. Nikodym: *Sur les diverses classes d'ensembles*, ibid. pp. 145—204; L. Kantorovitch et E. Livenson: *Memoir on the analytical operations and projective sets* (I), Fund. Math. XVIII, pp. 256—271.

[2]) Voir C. Kuratowski et A. Tarski: *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. XVII, pp. 240—248; C. Kuratowski: *Evaluation de la classe borelienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, ibid. pp. 249—272; *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 243; *Sur un problème concernant l'induction transfinie*, C. R. Paris 202, pp. 1239—1241; *Les ensembles projectifs et l'induction transfinie*, Fund. Math. XXVII, pp. 269—276; C. Kuratowski et J. v. Neumann, *On some analytic sets defined by transfinite induction*, Annals of Math. 38, p. 521—525; C. Kuratowski: *Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable*, Fund. Math. XXVIII, pp. 165—185.