semble Φ_α, si en posant pour $\xi<\Omega$ et $\eta<\Omega$:

$$\varphi(\xi,\eta)=\begin{cases}1, & \text{lorsque } f(x,y)=1 \text{ où } x\in X_{\omega+\xi} \text{ et } y\in X_{\omega+\eta},\\ 0 & \text{dans tous les autres cas,}\end{cases}$$

l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$ est bien ordonné en type α par la fonction φ.

En posant encore $\Phi_0=F-\sum_{\Omega\leqslant\alpha<\omega_2}\Phi_\alpha$, on a alors la décomposition effective de la famille F:

$$F=\Phi_0+\sum_{\Omega\leqslant\alpha<\omega_2}\Phi_\alpha \tag{3}$$

en $\aleph_2$ ensembles disjoints non vides, et la démonstration de l'existence de cette décomposition n'a pas recours à l'axiome du choix.

En effet, soit α un nombre ordinal, tel que $\Omega\leqslant\alpha<\omega_2$. On a donc $\bar{\alpha}=\aleph_1$ et il existe une fonction $\varphi(\xi,\eta)$ définie pour $\xi<\Omega$ et $\eta<\Omega$ et par laquelle l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$ est bien ordonné en type α. Définissons maintenant la fonction $f(x,y)$ de deux variables réelles comme il suit. Si $x\in X-X_0$ et $y\in X-X_0$, il existe, d'après (2), deux nombres ordinaux bien déterminés (par x et y) $\xi<\Omega$ et $\eta<\Omega$, tels que $x\in X_{\omega+\xi}$ et $y\in X_{\omega+\eta}$; si l'on a encore $\varphi(\xi,\eta)=1$, posons $f(x,y)=1$. Dans tous les autres cas, posons $f(x,y)=0$. Il résulte aussitôt de la définition de la famille Φ_α que $f\in\Phi_\alpha$. Il est ainsi établi sans l'axiome du choix que $\Phi_\alpha\neq0$ pour $\Omega\leqslant\alpha<\omega_2$, c. q. f. d.

Remarque. A tout sous-ensemble T de l'ensemble $Q=\underset{\alpha}{E}[\Omega\leqslant\alpha<\omega_2]$ correspond un sous-ensemble $S(T)=\sum_{\alpha\in T}\Phi_\alpha$ de l'ensemble F et (les termes de la série (3) étant disjoints) on a $S(T_1)\neq S(T_2)$ pour $T_1\neq T_2$. Il en résulte que $2^{\overline{\overline{Q}}}\leqslant 2^{\overline{\overline{F}}}$, donc, comme $\overline{\overline{Q}}=\aleph_2$ et $\overline{\overline{F}}=2^{2^{\aleph_0}}$, que $2^{\aleph_2}\leqslant 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, d'où $\aleph_2<2^{2^{2^{\aleph_0}}}$. Cette inégalité peut donc être démontrée sans faire appel à l'axiome du choix. Il est à remarquer qu'on peut aussi démontrer sans faire appel à cet axiome l'inégalité $\aleph_2<2^{2^{\aleph_1}}$ et, d'après M. Tarski (l. c., th. 81), même l'inégalité $2^{\aleph_{\alpha+1}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ où α est un nombre ordinal arbitraire.

Sur un problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations.

Par

Sophie Piccard (Neuchâtel).

M. S. Ruziewicz a posé récemment[1]) le problème suivant:

E étant un ensemble de puissance $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal $<\mathfrak{m}$ et R une relation entre les éléments de l'ensemble E, telle qu'il existe, pour tout élément x de E, moins que $\mathfrak{n}$ éléments y de E pour lesquels on a xRy, existe-t-il toujours un sous-ensemble H de E de puissance $\mathfrak{m}$ et dont aucun couple d'éléments distincts n'est lié par la relation R? (c. à d. un $H\subset E$ tel qu'on n'a ni xRy ni yRx pour $x\in H$ et $y\in H$)[2]).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *La réponse au problème de M. Ruziewicz est affirmative pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}$ régulier* (c. à d. qui n'est pas une somme de $<\mathfrak{m}$ nombres cardinaux $<\mathfrak{m}$) [3]).

Démonstration. Posons pour $x\in E$:

$$V(x)=\underset{y}{E}[y\in E,\ xRy], \tag{1}$$

$$Z(x)=\underset{y}{E}[y\in E,\ yRx]. \tag{2}$$

---

[1]) Publ. Math. Univ. Belgrade V, p. 5.

[2]) Pour $\mathfrak{n}=\aleph_0$ on en obtient le problème de M. Sierpiński (*Fund. Math.* 28, p. 71) que j'ai résolu affirmativement pour tous les nombres cardinaux $\mathfrak{m}>\aleph_0$ dans *Fund. Math.* 28, p. 197.

[3]) Pour $\mathfrak{n}=\aleph_0$ on en obtient le théorème de M. Sierpiński, *Fund. Math.* t. 28, p. 73, Th. 3.

Deux cas sont à distinguer:

a) Il existe un ensemble $K \subset E$ de puissance $<\mathfrak{m}$, tel que pour tout ensemble $M \subset E-K$ de puissance $<\mathfrak{m}$ l'ensemble $E-(K+\sum_{x \in M} Z(x))$ est de puissance $\mathfrak{m}$.

b) Quel que soit l'ensemble $K \subset E$ de puissance $<\mathfrak{m}$, il existe un ensemble $M \subset E-K$ de puissance $<\mathfrak{m}$, tel que l'ensemble $E-(K+\sum_{x \in M} Z(x))$ est de puissance $<\mathfrak{m}$.

Je vais prouver que c'est seulement le cas a) qui est possible.

Supposons en effet qu'on ait le cas b). Soit ν le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{n}$. Nous définirons par l'induction transfinie deux suites transfinies du type ν d'ensembles M_ξ et K_ξ (où $\xi<\nu$) comme il suit.

D'après b), il existe pour $K=0$ un ensemble $M_1 \subset E$ tel que $\overline{\overline{M}}_1<\mathfrak{m}$ et que l'ensemble $E-\sum_{x \in M_1} Z(x)$ est de puissance $<\mathfrak{m}$. Posons

$$K_1=E-\sum_{x \in M_1} Z(x).$$

Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\nu$, et supposons que nous avons déjà défini les ensembles M_ξ et K_ξ pour $\xi<\alpha$, de façon à avoir $M_\xi \subset E$, $K_\xi \subset E$ pour $\xi<\alpha$ et

$$(3) \qquad \overline{\overline{M}}_\xi<\mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{K}}_\xi<\mathfrak{m} \quad \text{pour} \quad \xi<\alpha.$$

D'après $\alpha<\nu$, on a $\bar{\alpha}<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$. Posons $K=\sum_{\xi<\alpha}(M_\xi+K_\xi)$. 'Daprès (3), le nombre cardinal $\mathfrak{m}$ étant régulier, on trouve donc $\overline{\overline{K}}<\mathfrak{m}$ et, d'après b), il existe un ensemble M_α tel que

$$(4) \qquad M_\alpha \subset E-\sum_{\xi<\alpha}(M_\xi+K_\xi), \qquad \overline{\overline{M}}_\alpha<\mathfrak{m}$$

et qu'en posant

$$(5) \qquad K_\alpha=E-[\sum_{\xi<\alpha}(M_\xi+K_\xi)+\sum_{x \in M_\alpha} Z(x)],$$

on ait $\overline{\overline{K}}_\alpha<\mathfrak{m}$.

Les suites transfinies d'ensembles M_ξ et K_ξ $(\xi<\nu)$ sont ainsi définies par l'induction transfinie et on a:

$$\overline{\overline{M}}_\xi<\mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{K}}_\xi<\mathfrak{m} \quad \text{pour} \quad \xi<\nu.$$

Comme $\bar{\nu}=\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$, le nombre cardinal $\mathfrak{m}$ étant régulier, l'ensemble $E-\sum_{\xi<\nu}(M_\xi+K_\xi)$ est de puissance $\mathfrak{m}$, donc non vide. Soit x_0 un élément de cet ensemble. On a donc $x_0 \in E$, x_0 non $\in M_\xi$ et x_0 non $\in K_\xi$ pour $\xi<\nu$, d'où selon (5) $x_0 \in \sum_{x \in M_\alpha} Z(x)$ pour $\alpha<\nu$. Il existe donc d'après (2), pour tout $\alpha<\nu$, un élément x_α de M_α, tel que $x_0 R x_\alpha$. Or, les ensembles $M_\alpha (\alpha<\nu)$ sont d'après (4) disjoints. Les éléments x_α $(\alpha<\nu)$ sont donc tous différents et leur ensemble est de puissance $\bar{\nu}=\mathfrak{n}$; par conséquent $\overline{\overline{V}}(x_0) \geqslant \mathfrak{n}$. Or, c'est incompatible avec la définition de la relation R.

Le cas b) est ainsi impossible et on a nécessairement le cas a).

Ceci établi, soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}$ et soit

$$(6) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi)$$

une suite transfinie de tous les éléments de l'ensemble $E-K$ (qui est évidemment de puissance $\mathfrak{m}$).

Nous définirons par l'induction transfinie une suite transfinie du type φ d'éléments de $E-K$:

$$(7) \qquad p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi)$$

comme il suit.

Posons $p_1=x_1$. Soit α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\varphi$, et supposons que nous avons déjà défini tous les éléments p_ξ de $E-K$, où $\xi<\alpha$. L'ensemble P_α de tous ces éléments p_ξ $(\xi<\alpha)$ est de puissance $<\mathfrak{m}$ (puisque $\alpha<\varphi$). D'après la définition de la relation R, on a (en vertu de (1)): $\overline{\overline{V}}(x)<\mathfrak{n}$ pour $x \in E$ et, comme $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ et $\overline{\overline{P}}_\alpha<\mathfrak{m}$, le nombre cardinal $\mathfrak{m}$ étant régulier, on en conclut que l'ensemble

$$Q_\alpha=\sum_{\xi<\alpha} V(p_\xi)=\sum_{x \in P_\alpha} V(x)$$

est de puissance $<\mathfrak{m}$.

Posons $T_\alpha=\sum_{\xi<\alpha} Z(p_\xi)$. Comme $\overline{\overline{P}}_\alpha<\mathfrak{m}$, l'ensemble

$$(E-K)-T_\alpha=E-(K+\sum_{\xi<\alpha} Z(p_\xi))$$

est, d'après a), de puissance $\mathfrak{m}$. Par conséquent, l'ensemble

$$E-(K+P_\alpha+Q_\alpha+T_\alpha)$$

est aussi de puissance $\mathfrak{m}$, donc non vide. Nous définirons p_α comme premier élément de la suite (6) qui appartient à cet ensemble.

La suite (7) se trouve ainsi définie par l'induction transfinie.

Soit H l'ensemble de tous les éléments de cette suite.

Je dis qu'aucun couple d'éléments distincts de H n'est lié par la relation R.

En effet, soit $x \epsilon H$, $y \epsilon H$ et $x \neq y$. Il existe donc deux nombres ordinaux distincts $\alpha < \varphi$ et $\beta < \psi$, tels que $x = p_\alpha$ et $y = p_\beta$. Supposons que $\beta > \alpha$. Si l'on avait xRy, il en découlerait d'après (1) que $p_\beta \epsilon V(p_\alpha)$. Or, comme $\alpha < \beta$, on a $V(p_\alpha) \subset Q_\beta$ et, par suite, on aurait $p_\beta \epsilon Q_\beta$, ce qui est impossible, puisque, par définition, $p_\beta \epsilon E - (K + P_\beta + Q_\beta + T_\beta)$. Si l'on avait yRx, il en résulterait d'après (2) que $p_\beta \epsilon Z(p_\alpha)$, donc, comme $Z(p_\alpha) \subset T_\beta$ (puisque $\alpha < \beta$), on aurait $p_\beta \epsilon T_\beta$, ce qui est également en contradiction avec la définition de p_β. Les éléments x et y ne sauraient donc être liés par la relation R. Le raisonnement est tout à fait analogue si l'on suppose que $\beta < \alpha$.

Or, il résulte de la définition de la suite (7) que les éléments $p_\alpha (\alpha < \varphi)$ sont tous distincts et appartiennent à l'ensemble E: d'après $\overline{\varphi} = \mathfrak{m}$, on a par conséquent $\overline{\overline{H}} = \mathfrak{m}$ et $H \subset E$. L'ensemble H satisfait donc aux conditions du problème de M. Ruziewicz et notre théorème est démontré.

Il en résulte tout de suite ce

Corollaire. *La réponse au problème de M. Ruziewicz est affirmative pour* $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$, *où* α *est un nombre ordinal quelconque*[1].

En ce qui concerne les autres nombres cardinaux, je démontrerai ailleurs[2]) que la réponse au problème de M. Ruziewicz est affirmative pour tout nombre cardinal infini $\mathfrak{m} < \aleph_\Omega$.

[1]) Il en résulte la solution du problème de M. Sierpiński, posé dans *Fund. Math.* t. 28, p. 73, renvoi [1]).

[2]) Voir *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXX (1937) (à paraître).

Sur la non-existence d'opération universelle pour les ensembles dénombrables.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

On dit qu'une *opération* (univoque) $\bigcirc$ dans l'ensemble E est définie, si l'on a fait correspondre à tout couple ordonné de deux éléments a, b de E (distincts ou non) un élément $c = a \bigcirc b$ de l'ensemble E (bien déterminé par le couple a, b); en d'autres termes — si l'on a défini une fonction de deux variables $f(a, b)$ pour $a \epsilon E$, $b \epsilon E$ et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble E.

Deux opérations $\bigcirc$ et $\odot$, définies respectivement dans deux ensembles E_1 et E_2, sont dites *isomorphes*, s'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles E_1 et E_2, telle que les résultats des opérations $\bigcirc$ et $\odot$ effectuées respectivement sur des couples d'éléments correspondants de E_1 et de E_2 sont toujours des éléments correspondants; en d'autres termes — s'il existe une transformation biunivoque φ de E_1 en $E_2 = \varphi(E_1)$, telle que l'on ait

$$\varphi(a) \odot \varphi(b) = \varphi(a \bigcirc b) \qquad \text{pour} \quad a \epsilon E_1,\ b \epsilon E_1.$$

Je me propose de démontrer ici qu'*il n'existe pas d'opération* $\bigcirc$ *définie dans un ensemble dénombrable* E *qui soit universelle, c. à d. telle qu'il y ait, pour chaque opération* $\odot$ *définie dans un ensemble dénombrable, un sous-ensemble dénombrable* H *de* E *dans lequel l'opération* $\bigcirc$ *soit isomorphe à l'opération* $\odot$.

Je vais démontrer notamment ce

Théorème. $\bigcirc$ *étant une opération définie dans l'ensemble dénombrable* E, *il existe toujours une opération* $\odot$ *définie dans l'ensemble* N *de tous les nombres naturels qui, pour aucun sous-ensemble dénombrable de* E, *n'est isomorphe à l'opération* $\bigcirc$ *considérée dans ce sous-ensemble.*