Beweis der Hinlänglichkeit[1]). Ein separabler 0-dimensionaler Raum X hat eine abzählbare Basis, aus offenen und zugleich abgeschlossenen Mengen U_l von Durchmessern $<\delta$ bestehend; es ist $X=\Sigma U_l$ oder, mit $D_l=U_l-(U_1+\ldots+U_{l-1})$, $X=\Sigma D_l$ mit disjunkten, gleichfalls offenen und abgeschlossenen Summanden D_l von Durchmessern $<\delta$. Es kommt nun wieder darauf an, alle (oder unendlich viele) $D_l\neq 0$ zu erhalten; dies ist unmöglich oder möglich, je nachdem X kompakt ist oder nicht. Wenn nämlich X nicht kompakt ist und also eine Folge a_h (paarweise verschiedener Punkte) ohne Häufungspunkt enthält, so gebe man jedem a_h eine zugleich offene und abgeschlossene Umgebung D_h vom Durchmesser $<\delta/h$ derart, dass die D_h disjunkt sind; $D=\Sigma D_h$ ist offen und, wie leicht zu sehen, auch abgeschlossen; $X-D=\Sigma D_k$ in disjunkte (endlich oder unendlich viele) D_k von Durchmessern $<\delta$ zerlegbar, die in $X-D$, also in X offen und abgeschlossen sind, und $X=\Sigma D_h+\Sigma D_k=\Sigma D_l$ leistet das Verlangte. Hat X die Eigenschaft K, so ist D_l nicht kompakt und $D_l=\sum\limits_m D_{l_m}$ mit lauter disjunkten $D_{l_m}\neq 0$ (von beliebig kleinen Durchmessern), die in D_l, also in X offen und abgeschlossen sind. So gelangen wir zu

$$X=\sum_{l_1} D_{l_1}, \qquad D_{l_1}=\sum_{l_2} D_{l_1 l_2}, \qquad \ldots,$$

$D_{l_1\ldots l_k}\neq 0$ von Durchmessern $<1/k$; ist X nun noch vollständig, so gibt (wegen der Abgeschlossenheit der D) $x=D_{l_1}D_{l_1l_2}\ldots=f(\lambda)$ eine schlichte stetige Abbildung von N auf X, bei der $f(N_{l_1\ldots l_k})=D_{l_1\ldots l_k}$ offen und demnach jedes $f(G)$ offen ist, also eine Homöomorphie.

[1]) Herr Kuratowski hat mir einen kürzeren Beweis auf Grund des Satzes (6) von Herrn Mazurkiewicz mitgeteilt.

Sur les ensembles plans localement connexes.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

1. Le but de cette note est d'établir le suivant

Théorème. *Si un ensemble plan, borné, connexe et localement connexe ne coupe*[1]) *pas le plan, il est un semicontinu*[2]).

L'hypothèse que l'ensemble ne coupe pas le plan est essentielle, comme le montre un exemple de MM. Knaster et Kuratowski[3]), où un ensemble plan borné, connexe et localement connexe ne contient aucun ensemble parfait, donc à plus forte raison aucun continu.

2. S_2 désignant le plan des nombres complexes, complété par le point ∞, et S_1 l'ensemble des points z de S_2 tels que $|z|=1$, soit pour tout $z\in S_2-(0)-(\infty)$

$$r(z)=z/|z|.$$

X étant un espace métrique quelconque, S_1^X désigne la classe des transformations continues de X en sous-ensembles de S_1. Ainsi p. ex. $r\in S_1^{S_2-(0)-(\infty)}$. Etant donnée une fonction $f\in S_1^X$, nous écrirons

$$f\sim 1 \text{ sur l'ensemble } Y \qquad (Y\subset X),$$

lorsqu'il existe une fonction φ à valeurs réelles, définie pour tout $x\in Y$, continue et telle que $f(x)=e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x\in Y$ [4]).

[1]) On dit que Y *coupe* X entre les points $x_1,x_2\in X$, lorsque $X-Y$ ne contient aucun continu K tel que $x_1,x_2\in K$. On dit que Y ne coupe pas X, lorsque Y ne coupe X entre aucun couple $x_1,x_2\in X-Y$.

[2]) X s'appelle un *semicontinu*, lorsqu'il existe, pour tout couple $x_1,x_2\in X$, un continu $K\subset X$ tel que $x_1,x_2\in K$.

[3]) Bull. Amer. Math. Soc. 1927, p. 106.

[4]) cf. S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), p. 63.

3. Nous nous appuyerons sur les propositions suivantes:

(1) Etant donnée une transformation $f \epsilon S_1^{X\times Y}$ du produit cartésien $X\times Y$, où X est un espace métrique quelconque et Y un espace métrique, connexe et localement connexe, si

$$f\sim 1 \text{ sur } (x)\times Y \quad \text{pour } \textit{tout} \quad x\epsilon X$$

et

$$f\sim 1 \text{ sur } X\times(y_1) \text{ au moins pour } \textit{un} \quad y_1\epsilon Y,$$

on a

$$f\sim 1 \text{ sur } X\times Y$$ [5]).

(2) Pour qu'un ensemble $X\subset S_2-(0)-(\infty)$ ne coupe pas S_2 entre les points 0 et ∞, il faut et il suffit que l'on ait $r\sim 1$ sur X [6]).

(3) Pour qu'un sous-ensemble localement connexe Y de S_2 ne coupe pas S_2, il faut et il suffit que l'on ait $f\sim 1$ sur Y, quelle que soit la fonction $f\epsilon S_1^Y$ [7]).

4. Le théorème énoncé au début revient au suivant:

Tout sous-ensemble Y de S_2 qui est connexe, localement connexe et qui ne coupe pas S_2, est un semicontinu.

Démonstration. Posons $X=S_2-Y$. Soient $y_1, y_2 \epsilon Y$ deux points différents quelconques. On peut admettre sans restreindre la généralité que $y_1=0$, $y_2=\infty$ et $1\epsilon X$. Posons pour $(x,y)\epsilon X\times Y$:

$$f(x,y)=r\left(\frac{xy-x}{y-x}\right), \quad \text{si} \quad y\neq\infty \quad \text{et} \quad f(x,\infty)=r(x).$$

On vérifie facilement que $f\epsilon S_1^{X\times Y}$. En vertu de (3), on a $f\sim 1$ sur $(x)\times Y$ pour tout $x\epsilon X$. Comme $f(x,0)=1$, on a aussi $f\sim 1$ sur $X\times(0)$. Il en résulte en vertu de (1) que $f\sim 1$ sur $X\times Y$, d'où $f\sim 1$ sur $X\times(\infty)$, c. à d. que $r\sim 1$ sur X.

En vertu de (2), il existe donc un continu $K\subset S_2-X=Y$ tel que $0,\infty\,\epsilon K$, c. q. f. d.

[5]) ibid., p. 66, (8).
[6]) ibid., p. 75, th. 1.
[7]) ibid., p. 106, th. 20.

Un théorème sur les prolongements des transformations.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Soit X_0 un sous-ensemble fermé d'un espace [1]) X. Parmi les transformations continues de X_0 en sous-ensembles d'un autre espace Y, il y en a en général qui n'admettent pas de prolongements continus sur l'espace X tout entier avec les valeurs appartenant à Y. La question s'impose quel est l'ensemble $E\subset X-X_0$ qu'il suffit de supprimer, afin de pouvoir trouver un prolongement continu de f sur $X-E$. Or, M. Eilenberg a démontré récemment [2]) que dans le cas où X est compact et la dimension de $X-X_0$ ne surpasse pas n, Y étant une surface sphérique euclidienne S_k de dimension k, on peut trouver, pour chaque fonction donnée $f\epsilon S_k^{X_0}$, un ensemble fermé $E\subset X-X_0$ de dimension $<n-k$, tel que f admette un prolongement $f'\epsilon S_k^{X-E}$. De plus, dans le cas où $X-X_0$ est un polytope [3]), l'ensemble E peut être, lui aussi, supposé un polytope.

[1]) Tout espace est entendu dans ce travail dans le sens d'espace métrique séparable.

[2]) S. Eilenberg, *Un théorème de dualité*, Fund. Math. 26 (1936), p. 280.

[3]) Un polytope (infini) est un ensemble P qui se laisse représenter sous forme d'un *complexe géométrique infini* (nommé aussi *décomposition simpliciale de P*), c. à d. d'une somme $\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i$, où Δ_i sont des simplexes géométriques assujettis aux conditions: 1) $\Delta_i\cdot\Delta_j$ est une face (de dimension $\geqslant -1$) de Δ_i et Δ_j; 2) aucun point de P n'est point d'accumulation d'une suite de points appartenant à des différents termes de la suite $\{\Delta_i\}$.