Eine Simplizialzerlegung des Cartesischen Produktes zweier Simplexe.

Von

Hans Freudenthal (Amsterdam).

Eine Simplizialzerlegung des Cartesischen Produktes zweier Simplexe ist, wie mir scheint, bisher nicht angegeben worden, offenbar weil man eine solche Konstruktion für recht kompliziert hielt. In Wirklichkeit kann man eine sehr elegante — und vielleicht auch nützliche — Zerlegungsformel angeben, und das soll hier geschehen. Wir werden die aus der Elementargeometrie bekannte Tetraederzerlegung des dreiseitigen Prismas sinngemäß verallgemeinern, und unsere Konstruktion wird selbst für den Fall, daß einer der Faktoren eindimensional ist, einfacher als die übliche Zylinderkonstruktion [1]) der kombinatorischen Topologie sein.

1. $(A;B)$ bedeute das Cartesische Produkt der Mengen A und B; sind A und B nicht Mengen, sondern Komplexe (Linearformen aus Simplexen), so soll der Ausdruck distributiv erklärt sein.

$t_\varkappa = [a_0, \dots, a_\varkappa]$ bezeichne das orientierte $\varkappa$-dimensionale Cartesische Simplex, das von den Ecken $a_0, \dots, a_\varkappa$ in allgemeiner Lage erzeugt wird.

$\mathfrak{r}$ bezeichne die kombinatorische Randbildung.

Wenn τ eine ganze Zahl ist, schreiben wir für $\tau+1$ auch τ'.

R_γ bezeichne den Cartesischen γ-dimensionalen Raum.

2. t_μ bzw. t_ν liege in der Hyperebene $x_{\mu+1} = \dots = x_{\mu+\nu} = 0$ bzw. $x_1 = \dots = x_\mu = 0$ des $R_{\mu+\nu}$. Die Ecken von t_μ bzw. t_ν seien mit $0, \dots, \mu$ bzw. $0, \dots, \nu$ numeriert. $\alpha\beta$ bezeichne den Punkt des $R_{\mu+\nu}$, dessen erste μ (letzte ν) Koordinaten mit denen von α (von β) übereinstimmen.

---

[1]) Alexandroff-Hopf, *Topologie*, Berlin-Leipzig 1936, S. 196, Abb. 16. Unsere ganze Beweisführung reduziert sich in diesem Fall natürlich auf wenige Zeilen.

Die $\alpha\beta$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \mu,\ 0 \leqslant \beta \leqslant \nu)$ heißen Ecken des Systems Σ; $\varkappa$-dimensionales Simplex $u_\varkappa$ von Σ heißt jedes Simplex $[\alpha_0\beta_0, \dots, \alpha_\varkappa\beta_\varkappa]$, in dem sowohl die α_ϱ als auch die β_ϱ eine nicht abnehmende Folge bilden [2]). Die $u_{\mu+\nu}$ bezeichnen wir auch mit w; die zugehörigen Folgen sind dadurch charakterisiert, daß sie in 00 beginnen, in $\mu\nu$ endigen, und daß zwei aufeinanderfolgende Ecken von der Form $\alpha\beta, \alpha'\beta$ oder von der Form $\alpha\beta, \alpha\beta'$ sind. Wir setzen $w_0 = [00, 10, \dots, \mu 0, \mu 1, \dots, \mu\nu]$. Die i-te Ecke eines w ist stets von der Form $\alpha\beta$ mit $\alpha + \beta = i$.

3. ***Satz.*** *Man kann in der Summe $\Sigma \pm w$ die Vorzeichen so wählen, daß w_0 mit dem $+$-Zeichen auftritt und je zwei w, die sich in genau einer Ecke unterscheiden, mit entgegengesetzten Zeichen auftreten. Die Zeichen sind dann eindeutig bestimmt, und die Summe stellt eine Simplizialzerlegung von $(t_\mu; t_\nu)$ dar. Es gilt:*

I. $$\mathfrak{r}(t_\mu; t_\nu) = (-1)^\mu (t_\mu; \mathfrak{r} t_\nu) + (\mathfrak{r} t_\mu; t_\nu),$$

II. $$(t_\mu; t_\nu) = (-1)^{\mu \cdot \nu} (t_\nu; t_\mu).$$

Hier muß natürlich gezeigt werden, daß die w nicht ausarten, daß sie richtig aneinandergrenzen (sich nicht überschneiden), und daß sie zusammen $(t_\mu; t_\nu)$ ausfüllen. Das lassen wir aber vorläufig beiseite und stellen uns auf den abstrakten Standpunkt, fassen also ein Simplex als Folge seiner Ecken auf.

4. Wir verschaffen uns über die Ecken von Σ eine Übersicht:

$$\mathfrak{M}: \quad \begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 1 & . & . & \nu \\
\hline
0 & 00 & 01 & . & . & 0\nu \\
1 & 10 & 11 & . & . & 1\nu \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
\mu & \mu 0 & \mu 1 & . & . & \mu\nu
\end{array}$$

Die w sind hier Wege, die in 00 beginnen, in $\mu\nu$ endigen, und auf denen man von einer Ecke zur nächsten gelangt durch einen (waagerechten) Schritt nach rechts oder einen (senkrechten) nach unten.

$1 + \varphi_\varrho(w)$ sei die Zahl der Elemente von w in der ϱ-ten Zeile [3]), $1 + \psi_\sigma(w)$ die in der σ-ten Spalte [3]). Ist sowohl $\varphi_\alpha(w)$ als auch $\psi_\beta(w) > 0$, so heißt $\alpha\beta$ ein *Knick* von w. Unterscheiden sich w und w' in genau

---

[2]) Daß sich solche Ecken wirklich in allgemeiner Lage befinden, werden wir in Nr. 9 zeigen.

[3]) Ecken eines Simplexes, Zeilen und Spalten einer Matrix zählen wir stets von 0 ab, Koordinaten eines Punktes dagegen von 1 ab.

einem Element, so ist dies für beide ein Knick; es laute für w etwa $\alpha'\beta$ und für w' $\alpha\beta'$. Der Übergang von w nach w' heiße *elementar*; bei ihm ändern sich φ_α und $\varphi_{\alpha'}$ um Eins, während die übrigen φ_ϱ konstant bleiben; Analoges gilt für ψ.

5. Wir setzen:

$$\xi(w)=\Sigma\varrho\varphi_\varrho(w)-\mu\nu, \qquad \eta(w)=\Sigma\sigma\psi_\sigma(w).$$

ξ und η besitzen die folgenden Eigenschaften [4]):

1. $\xi(w_0)=\eta(w_0)=0$,

2. $\xi(w)\equiv\xi(w') \mod 2, \qquad \eta(w)\equiv\eta(w') \mod 2,$

falls w und w' sich in genau einem Element unterscheiden. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften ist aber eindeutig bestimmt, weil sich jedes w aus w_0 durch eine Folge elementarer Übergänge herstellen läßt. Also

$$\xi(w)\equiv\eta(w) \mod 2,$$

und die Vorzeichenverteilung des Satzes existiert und ist eindeutig festgelegt. Die behauptete Zerlegung läßt sich schreiben

$$\Sigma(-1)^{\xi(w)}w=\Sigma(-1)^{\eta(w)}w.$$

6. Sei $\varphi_\alpha(w)=0$ bzw. $\psi_\beta(w)=0$. Streicht man in $\mathfrak{M}$ die α-te Zeile bzw. β-te Spalte, so entsteht ein Schema $\mathfrak{M}^*$, für das wir die oben definierten Funktionen φ^*, ξ^* bzw. ψ^*, η^* nennen; das aus w enstehende Simplex heiße w^*, die weggelassene Ecke $\alpha\beta$. Dann ist

$$\varphi^*_\varrho(w^*)=\begin{cases}\varphi_\varrho(w) & \text{für} \quad \varrho<\alpha\\ \varphi_{\varrho+1}(w) & \text{für} \quad \varrho\geqq\alpha,\end{cases}$$

bzw.

$$\psi^*_\sigma(w^*)=\begin{cases}\psi_\sigma(w) & \text{für} \quad \sigma<\beta\\ \psi_{\sigma+1}(w) & \text{für} \quad \sigma\geqq\beta,\end{cases}$$

$$\xi(w)-\xi^*(w^*)=\alpha\varphi_\alpha+\sum_{\alpha+1}^{\mu}\varphi_\varrho-[\mu\cdot\nu-(\mu-1)\cdot\nu]=0+(\nu-\beta)-\nu=-\beta,$$

[4]) Natürlicher und begrifflich einfacher wäre es, statt mit $\xi(w)$ und $\eta(w)$ mit dem Vorzeichen des Volumens von w zu arbeiten. Aber selbst bei der speziellen Eckenwahl, die wir in Nr. 11 getroffen haben, dürfte die Darstellung dann recht weitschweifig werden.

(1) $$\xi^*(w^*)=\xi(w)+\beta.$$

Analog

(2) $$\eta^*(w^*)=\eta(w)+\alpha-\mu.$$

7. Wir vergleichen den Ausdruck

(3) $$\mathfrak{r}(t_\mu;t_\nu)$$

mit der Summe von

(4) $$(-1)^\mu(t_\mu;\mathfrak{r}t_\nu)$$

und

(5) $$(\mathfrak{r}t_\mu;t_\nu).$$

Ein $u_{\mu+\nu-1}$ von Σ ist ein w mit einer einfachen Lücke. Die Umgebung solcher Lücke muß eine der folgenden drei Gestalten haben:

(a) $\varrho\sigma, \varrho'\sigma'$, (b) $\varrho\sigma, \varrho''\sigma$, (c) $\varrho\sigma, \varrho\sigma''$.

Demgemäß unterscheiden wir drei verschiedene Typen von $u_{\mu+\nu-1}$, deren Auftreten in (3), (4), (5) wir einzeln untersuchen.

(a) Bei der Bildung von (3) tritt $u_{\mu+\nu-1}$ zweimal auf, als Randsimplex von

$$[00,\ldots\varrho\sigma,\ \varrho'\sigma,\ \varrho'\sigma',\ldots\mu\nu]$$

und von

$$[00,\ldots\varrho\sigma,\ \varrho\sigma',\ \varrho'\sigma',\ldots\mu\nu];$$

die ξ-Werte für diese beiden w sind mod 2 inkongruent (siehe Nr. 5), während die weggelassene Ecke beidemal an $(\varrho+\sigma+1)$-ter Stelle steht. In (3) hebt sich $u_{\mu+\nu-1}$ demnach weg; in (4) und (5) tritt es überhaupt nicht auf.

(b) Das w, aus dem $u_{\mu+\nu-1}$ durch Weglassen einer Ecke entsteht, ist eindeutig bestimmt, und heiße kurz w. In (3) tritt $u_{\mu+\nu-1}$ mit dem Koeffizienten $(-1)^{\varrho+\sigma+1}$ $(-1)^{\xi(w)}$ auf. In (4) tritt $u_{\mu+\nu-1}$ überhaupt nicht auf. In (5) tritt $u_{\mu+\nu-1}$ in dem Summanden $(-1)^{\varrho+1}(t_{\mu-1};t_\nu)$ auf; hier bezeichnet $t_{\mu-1}$ das Simplex, das aus t_μ durch Weglassen der ϱ'-ten Ecke entsteht. $(t_{\mu-1};t_\nu)$ berechnet man, indem man in $\mathfrak{M}$ die ϱ'-te Zeile streicht. Nach (1) ergibt sich als Vorzeichen von $u_{\mu+\nu-1}$ in (5):

$$(-1)^{\varrho+1}(-1)^{\xi^*(w^*)}=(-1)^{\varrho+1}(-1)^{\xi(w)+\sigma},$$

also dasselbe wie in (3).

(c) Man verfährt ganz ähnlich wie in (b). Als Vorzeichen von $u_{\mu+\nu-1}$ hat man in (3) wieder $(-1)^{\varrho+\sigma+1}(-1)^{\eta(w)}$, in (5) tritt $u_{\mu+\nu-1}$ nicht auf, und in (4) hat man nach (2):

$$(-1)^{\mu}(-1)^{\sigma+1}(-1)^{\eta^*(w^*)}=(-1)^{\sigma+1+\mu}(-1)^{\eta(w)+\varrho-\mu},$$

also dasselbe wie in (3).

Damit ist die Formel I bewiesen.

8. Ohne Mühe erhält man die Formel II, wenn man beachtet, daß der einzige Unterschied zwischen $(t_\mu;t_\nu)$ und $(t_\nu;t_\mu)$ der ist, daß beim zweiten Ausdruck die Rolle von w_0 durch $[00, 01, \dots, 0\nu, 1\nu, \dots, \mu\nu]$ übernommen wird, das aber gerade mit dem Koeffizienten $(-1)^{\mu\cdot\nu}$ auftritt.

9. Wir behandeln nun die u_k als konkrete Cartesische Simplexe. Zunächst zeigen wir, daß die Ecken jedes u_k in allgemeiner Lage sind.

$(\alpha\beta)_i$ sei die i-te Koordinate des Punktes $\alpha\beta$ und

$$\sum_{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta}(\alpha\beta)_i=0 \qquad \text{(für alle } i) \tag{6}$$

eine lineare Relation zwischen den Ecken $\alpha\beta$ von Σ. Betrachtet man diese Relation allein für $i\leqslant\mu$, so erhält man wegen der allgemeinen Lage der Ecken von t_μ

$$\sum_{\beta}\lambda_{\alpha\beta}=0; \tag{7}$$

und betrachtet man sie für $i>\mu$, so erhält man wegen der allgemeinen Lage der Ecken von t_ν

$$\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha\beta}=0. \tag{8}$$

Die Ecken jedes u_k von Σ müssen voneinander unabhängig sein, denn wäre etwa $\varrho\sigma$ die erste Ecke von u_k, die in (6) mit nichtverschwindendem Koeffizienten aufträte, so müßte es nach (7) und (8) in der ϱ-ten Zeile *und* in der σ-ten Spalte eine weitere Ecke von u_k geben, was unmöglich ist.

10. Seien $u_\varkappa=[\alpha_0\beta_0,\dots,\alpha_\varkappa\beta_\varkappa]$, $u'_{\varkappa'}=[\alpha'_0\beta'_0,\dots,\alpha'_{\varkappa'}\beta'_{\varkappa'}]$ zwei Simplexe von Σ. Wir zeigen, daß ihr Durchschnitt das von den gemeinsamen Ecken erzeugte Simplex von Σ ist.

Ein einfacher Induktionsschluß in Bezug auf die Zahl der gemeinsamen Ecken zeigt, daß es genügt, die Behauptung für den Fall zu beweisen, daß keine gemeinsamen Ecken existieren; wir zeigen dann also, daß der Durchschnitt leer ist.

Sei

$$\sum_{r=0}^{\varkappa}\lambda_r(\alpha_r\beta_r)_i=\sum_{r=0}^{\varkappa'}\lambda'_r(\alpha'_r\beta'_r)_i \qquad (\lambda_r\geqslant 0,\ \lambda'_r\geqslant 0,\ \textstyle\sum\lambda_r=\sum\lambda'_r=1)$$

die i-te Koordinate $(1\leqslant i\leqslant\mu+\nu)$ eines Punktes des Durchschnittes. Sei λ_s bzw. $\lambda'_{s'}$ das erste nichtverschwindende unter den λ_r bzw. λ'_r. In der α_s-ten Zeile und in der β_s-ten Spalte von $\mathfrak{M}$ muß es dann nach (7) und (8) Ecken von $u'_{\varkappa'}$ mit nichtverschwindenden Koeffizienten λ' geben; also ist

$$\alpha'_{s'}\leqslant\alpha_s, \qquad \beta'_{s'}\leqslant\beta_s.$$

Genau so erhält man aber auch (da $u_\varkappa$ und $u'_{\varkappa'}$ gleichwertige Rollen spielen)

$$\alpha_s\leqslant\alpha'_{s'}, \qquad \beta_s\leqslant\beta'_{s'}.$$

Daraus würde aber $\alpha_s\beta_s=\alpha'_{s'}\beta'_{s'}$ folgen, was unserer Voraussetzung widerspricht. $u_\varkappa$ und $u'_{\varkappa'}$ haben demnach einen leeren Durchschnitt.

11. Wir zeigen nun, daß die Vereinigung der w mit $(t_\mu;t_\nu)$ zusammenfällt. Wir dürfen (nach Vornahme einer affinen Transformation) voraussetzen, daß (wenn $0\leqslant\varrho\leqslant\mu$) die ϱ-te Ecke von t_μ als ϱ erste Koordinaten Einsen und als alle übrigen Koordinaten Nullen hat; die Koordinaten eines Punktes eines derartigen Simplexes sind dadurch charakterisiert, daß sie eine nichtzunehmende Folge nichtnegativer reeller Zahlen bilden, deren erstes Element $\leqslant 1$ ist. Entsprechend nehmen wir von t_ν an, daß bei der σ-ten Ecke alle Koordinaten bis zur μ-ten und von der $(\mu+\sigma+1)$-ten an verschwinden und die übrigen eins sind.

Sei x ein Punkt von $(t_\mu;t_\nu)$. Dann sind alle seine Koordinaten nichtnegativ und $\leqslant 1$, und es bilden die ersten μ Koordinaten für sich (die wir auch *erster Art* nennen) und die letzten ν für sich (die wir auch *zweiter Art* nennen) eine nichtzunehmende Folge. Wir ordnen die Koordinaten von x in *einer* nichtzunehmenden Folge $z_1,\dots,z_{\mu+\nu}$ an [5]). Wir konstruieren nun folgendes Simplex w von Σ: Die 0-te Ecke von w sei 00; ist die i-te Ecke von w $\alpha\beta$ $(\alpha+\beta=i)$, so sei die i'-te Ecke von w $\alpha'\beta$, falls $z_{i'}$ von erster Art ist, und $\alpha\beta'$, falls $z_{i'}$ von zweiter Art ist (entsprechend einer Koordinate erster Art machen wir also in $\mathfrak{M}$ einen Schritt nach unten, entsprechend

[5]) Das kann manchmal auf mehrere Arten möglich sein. Scheinbar liegt hier eine intuitionistische Schwierigkeit vor; man bedenke aber, daß man sich auf Punkte x mit rationalen Koordinaten beschränken darf.

einer zweiter Art einen Schritt nach rechts). Man überzeugt sich leicht davon, daß x zum Simplex w gehört. Damit ist bewiesen, daß die w das $(t_\mu;t_\nu)$ ausfüllen.

12. Endlich wäre noch zu rechtfertigen, daß wir in die Zerlegungsformel unseres Satzes w_0 mit *positivem* Vorzeichen aufgenommen haben. Eine einfache Determinantenbetrachtung, die wir nicht ausführen, zeigt, daß, wenn t_μ und t_ν positives Volumen haben, auch w_0, also auch $(t_\mu;t_\nu)$ positives Volumen hat.

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Die Bettischen Gruppen der Verbindung zweier Polytope.

Von

Hans Freudenthal (Amsterdam).

1. Unter der *Verbindung* $R \circ S$ zweier topologischer Räume R und S verstehen wir anschaulich die Vereinigung der Verbindungslinien je zweier Punkte $a \in R$, $b \in S$; dabei hat man sich R und S so vorzustellen, daß sich je zwei Verbindungslinien in „allgemeiner" Lage befinden, also nicht mehr gemein haben als evtl. Anfangs- oder Endpunkt.

Exakt: Die Punkte von $R \circ S$ sind gewisse abgeschlossene Teilmengen des Cartesischen Produktes $R \times S \times L$ (hier bedeute L die Strecke $0 \leqslant t \leqslant 1$), nämlich: $a \times S \times 0$ für $a \in R$; $R \times b \times 1$ für $b \in S$, $a \times b \times t$ für $a \in R$, $b \in S$, $0 < t < 1$. $R \circ S$ wird so topologisiert, wie das bei einer solchen Menge abgeschlossener Teilmengen üblich ist. Ist R bzw. S leer, so verstehe man unter $R \circ S$ den Raum S bzw. R.

Sind R und S endliche Polytope[1]), so läßt sich $R \circ S$ rein kombinatorisch definieren: Simplexe

$$t_\varrho \circ u_\sigma = [a_0 \ldots a_\varrho b_0 \ldots b_\sigma]$$

von $R \circ S$ sind die und nur die Eckpunktmengen, für die $t_\varrho = [a_0 \ldots a_\varrho]$ Simplex von R und $[b_0 \ldots b_\sigma]$ Simplex von S ist. (Man beachte, daß auch die leere Menge zu den Simplexen gehört.) Die Dimension von $R \circ S$ ist hier um Eins größer als die Summe der Dimensionen von R und S.

[1]) Die Verbindung zweier Polytope ist ein bekanntes Hilfsmittel der Mannigfaltigkeitstheorie.