Über die symmetrische Stetigkeit von Funktionen.

Von

Hans Fried (Wien).

Eine in $(-\infty<x<+\infty)$ definierte reelle Funktion heisst nach F. Hausdorff [1]) im Punkte x_0 *symmetrisch stetig*, wenn

(1) $$\lim_{h>0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0.$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, heisst sie in dem Punkte *symmetrisch unstetig*. Die Menge der Punkte, in denen eine Funktion symmetrisch stetig ist, soll als Menge der *symmetrischen Stetigkeitspunkte*, die Menge aller übrigen Punkte als Menge der *symmetrischen Unstetigkeitspunkte* bezeichnet werden.

Zweck dieser Arbeit ist der Beweis des Satzes, dass die Menge der Unstetigkeitspunkte einer Funktion von erster Kategorie ist (sie daher punktweise stetig ist), wenn die Menge der symmetrischen Unstetigkeitspunkte von erster Kategorie ist [2]).

Der Beweis ist nach einer Methode, die Z. Charzyński [3]) angewendet hat, geführt.

Für jedes $\eta>0$ und für jeden symmetrischen Stetigkeitspunkt x_0 von $f(x)$ gibt es wegen (1) ein $\delta(x_0,\eta)>0$, so dass

$$|f(x_0+h)-f(x_0-h)|<\eta \qquad \text{für} \quad 0<h<\delta(x_0,\eta)$$

ist.

[1]) Fund. Math. 25, S. 578. Problème de F. Hausdorff, N° 62.

[2]) Wie ich erfahre, hat diesen Satz vor kurzem auch Herr Hausdorff erhalten. Das Ergebnis ist nicht veröffentlicht worden.

[3]) Z. Charzyński, *Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout finie*, Fund. Math. 21, S. 214.

Hilfssatz. *Ist x_0 ein symmetrischer Stetigkeitspunkt von $f(x)$, so gibt es zu jedem $\eta>0$ und zu jedem symmetrischen Stetigkeitspunkt x_1, für den*

(2) $$0<x_1-x_0<\delta(x_0,\eta/2)$$

gilt, ein positives $h<x_1-x_0$, so dass aus $x_0<x<x_0+h$

(3) $$|f[x+(x_1-x_0)]-f[x-(x_1-x_0)]|<\eta$$

folgt.

Beweis. Es sei:

(4) $$h=\min[x_1-x_0,\ \delta(x_1,\eta/2)]$$

und x ein beliebiger Punkt, für den

(5) $$x_0<x<x_0+h$$

gilt. Wegen (2), (4) und (5) ist $0<x_1-x<x_1-x_0<\delta(x_0,\eta/2)$ und daher $|f[x_0+(x_1-x)]-f[x_0-(x_1-x)]|<\eta/2$, wofür

(6) $$|f[x_0+(x_1-x)]-f[x-(x_1-x_0)]|<\eta/2$$

geschrieben werden kann. Wegen (4) und (5) ist $0<x-x_0<h\leqslant\delta(x_1,\eta/2)$ und daher $|f[x_1+(x-x_0)]-f[x_1-(x-x_0)]|<\eta/2$, wofür

(7) $$|f[x+(x_1-x_0)]-f[x_0+(x_1-x)]|<\eta/2$$

geschrieben werden kann. Aus (6) und (7) folgt (3), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz I. *Ist die Menge der symmetrischen Unstetigkeitspunkte von erster Kategorie, so ist die Funktion punktweise unstetig.*

Beweis. Es ist nachzuweisen, dass die Menge der Unstetigkeitspunkte von erster Kategorie ist. Ich werde aus der entgegengesetzten Annahme einen Widerspruch ableiten. Wenn die Menge der Unstetigkeitspunkte nicht von erster Kategorie ist, muss es ein $a>0$ und ein Intervall (a,b) [4]) geben, so dass für alle Punkte dieses Intervalls die Schwankung $\geqslant a$ ist. Mit A_n $(n=1,2,\ldots)$ werde die Menge derjenigen symmetrischen Stetigkeitspunkte, für die $\delta(x,a/24)\geqslant 1/n$, und mit B die Menge der symmetrischen Unstetigkeitspunkte be-

[4]) Unter solcher Bezeichnungsweise werden hier stets *offene* Intervalle gemeint.

zeichnet. Da die Menge $B+\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ das Intervall (a,b) überdeckt und B nach Voraussetzung von erster Kategorie ist, muss es ein n_0 und ein Teilintervall (c,d) von (a,b) geben, so dass A_{n_0} in (c,d) dicht ist. Man kann die Länge von (c,d) kleiner als $1/n_0$ annehmen.

Sei x_0 ein symmetrischer Stetigkeitspunkt im Intervall (c,d). Es wird nun gezeigt, dass sich zwei Punkte x_2 und x_3, wo

(8) $$c<x_0<x_2<x_3<d,$$

finden lassen, für die

(9) $$|f(x_3)-f(x_2)|\geqslant a/6,$$

(10) $$x_3-x_2<\min[2\delta(x_0,a/24),\ x_2-x_0],$$

(11) $x_1=x_0+\frac{1}{2}(x_3-x_2)$ ein symmetrischer Stetigkeitspunkt ist.

Wenn $\overline{x}_2$ ein beliebiger Punkt des Intervalls (x_0,d) ist, lässt sich, da in jedem Punkt des Intervalls $(\overline{x}_2,d)$ die Schwankung grösser oder gleich a ist, ein Punkt $\overline{x}_3$ finden, so dass:

$$|f(\overline{x}_3)-f(\overline{x}_2)|\geqslant a/6,\qquad 0<\overline{x}_3-\overline{x}_2<\min[2\delta(x_0,a/24),\ \overline{x}_2-x_0].$$

Wenn $x_0+\frac{1}{2}(\overline{x}_3-\overline{x}_2)$ ein symmetrischer Stetigkeitspunkt ist, genügen die Punkte $x_2=\overline{x}_2$ und $x_3=\overline{x}_3$ den Bedingungen (8), (9), (10) und (11).

Wenn $x_0+\frac{1}{2}(\overline{x}_3-\overline{x}_2)$ kein symmetrischer Stetigkeitspunkt ist, werde ein positives $\varepsilon<\frac{1}{3}(\overline{x}_3-\overline{x}_2)$ gewählt und mit C die Menge der Punkte x des Intervalls $(\overline{x}_3-\varepsilon,\overline{x}_3)$ für die $|f(x)-f(\overline{x}_2)|\geqslant a/6$ ist, bezeichnet.

Ist nun die Menge C von zweiter Kategorie, so muss es in C, da die Menge der symmetrischen Unstetigkeitspunkte von erster Kategorie ist, einen Punkt x_3 geben, so dass $x_0+\frac{1}{2}(x_3-\overline{x}_2)$ ein symmetrischer Stetigkeitspunkt ist. Setzt man $x_2=\overline{x}_2$, so ist klar, dass für x_2 und x_3 die Bedingungen (8)—(11) erfüllt sind.

Ist aber die Menge C nicht von zweiter Kategorie, so ist die Menge $D=(\overline{x}_3-\varepsilon,\overline{x}_3)-C$ von zweiter Kategorie. In allen Punkten x von D ist dann

(12) $$|f(x)-f(\overline{x}_2)|<a/6.$$

Nun wird im Intervall $(\overline{x}_2,\overline{x}_2+\varepsilon)$ ein Punkt x_2 gewählt, so dass

(13) $$|f(\overline{x}_2)-f(x_2)|\geqslant a/3.$$

Aus (12) und (13) folgt, dass für alle Punkte x von D $|f(x)-f(x_2)|\geqslant a/6$ ist. Da die Menge D von zweiter Kategorie ist, muss es in D einen Punkt x_3 geben, so dass $x_0+\frac{1}{2}(x_3-x_2)$ ein symmetrischer Stetigkeitspunkt ist.

Somit ist gezeigt, dass es Punkte x_2 und x_3 gibt, die den Bedingungen (8)—(11) genügen.

Nach dem Hilfssatz gibt es ein positives $h<\frac{1}{2}(x_3-x_2)$, derart dass

(14) $$|f[x+\tfrac{1}{2}(x_3-x_2)]-f[x-\tfrac{1}{2}(x_3-x_2)]|<a/12 \qquad \text{für } x_0<x<x_0+h$$

ist. Setzt man:

$$\xi_1=\tfrac{1}{2}(x_2+x_3),\qquad \xi_2=\tfrac{1}{2}(x_0+\xi_1),\qquad \xi_3=\tfrac{1}{2}(x_0+h+\xi_1),$$

so ist, wie leicht nachzurechnen,

$$c<x_0<\xi_2<\xi_3<x_2<\xi_1<x_3<d.$$

Da die Menge A_{n_0} in (c,d) dicht ist, muss es in (ξ_2,ξ_3) einen Punkt x' geben, der zu A_{n_0} gehört. Der Punkt $x=2x'-\xi_1$ liegt im Intervall (x_0,x_0+h). Nach (14) ist daher

(15) $$|f(2x'-x_2)-f(2x'-x_3)|<a/12.$$

Andrerseits ist die Länge des Intervalls (c,d) kleiner als $1/n_0$; somit ist $|f[x'+(x_2-x')]-f[x'-(x_2-x')]|<a/24$, was gleichbedeutend mit

(16) $$|f(x_2)-f(2x'-x_2)|<a/24$$

ist. Ebenso ist $|f[x'+(x_3-x')]-f[x'-(x_3-x')]|<a/24$, was gleichbedeutend mit

(17) $$|f(x_3)-f(2x'-x_3)|<a/24$$

ist. Aus (9), (16) und (17) folgt $|f(2x'-x_2)-f(2x'-x_3)|>a/12$, was mit (15) in Widerspruch steht.

Ist eine Funktion in allen Punkten symmetrisch stetig, so werde sie *symmetrisch stetig* genannt. Aus Satz I folgt dann

Satz II. *Ist eine Funktion symmetrisch stetig, so ist sie punktweise unstetig.*

Offen bleibt die Frage, ob es symmetrisch stetige Funktionen mit nicht abzählbarvielen Unstetigkeitspunkten gibt.

Wien, 22. März 1937.