fonction propositionnelle que nous désignerons par le symbole $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ ou $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\dots$ [1]).

On constate aussitôt que $\underset{x}{E}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{x}{E}\varphi_n(x)$. En reprenant le raisonnement du N⁰ précédent, on en conclut qu'étant donnée une définition de A du genre considéré à présent, l'ensemble E qui vient lui correspondre est encore borelien. Il en résulte en particulier que *le bon ordre n'admet pas de définition de ce genre.*

Tandis que le type ω, par exemple, se laisse définir de cette façon, bien qu'il ne puisse être défini sans l'emploi de l'opération $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ [2]). Voici la définition du type ω

$$\prod_x\Big[\sum_y(x\lesssim y)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\Big]$$

où $\varphi_n(x)\equiv\sum\limits_{y_1\dots y_n}\prod\limits_z[(z\lesssim x)\to(z=y_1)+\dots+(z=y_n)]$.

Par conséquent:

$$(t\,\epsilon\,E)\equiv(\overline{M}_t=\omega)\equiv(t\neq 0)\cdot\prod_i[(t^{(i)}=2)\to\sum_j(t^{(j)}=2)\,(r_i<r_j)\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t,i)],$$

où $\psi_n(t,i)\equiv\sum\limits_{j_1\dots j_n}\{(t^{(j_1)}=\dots=t^{(j_n)}=2)\prod\limits_k[(t^{(k)}=2)\,(r_k<r_i)\to(k=j_1)+\dots+(k=j_n)]\}$.

Il vient $E=(C-(0))\cdot\prod\limits_i(C-C_i+\sum\limits_j{}^{*}C_j\cdot\sum\limits_n D_{n,i})$ où la sommation $\sum\limits_j{}^{*}$ s'étend aux indices j tels que $r_i<r_j$ et où $D_{n,i}=\sum\limits_{j_1\dots j_n}(C_{j_1}\cdot\dots\cdot C_{j_n}-\sum\limits_k{}^{\circ}C_k)$, la sommation $\sum\limits_k{}^{\circ}$ s'étendant aux indices k distincts de tous les $j_1,\dots,j_n$ et tels que $r_k<r_i$.

---

[1]) Comme M. Tarski a remarqué, cette opération peut être introduite de la façon suivante: on postule qu'à chaque suite infinie de fonctions propositionnelles $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots$ correspond une fonction propositionnelle $\psi(x,n)$ de deux variables (dont la deuxième est un entier positif variable) qui pour chaque n équivaut à $\varphi_n(x)$ et on définit l'opération $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ par l'équivalence $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\equiv\sum\limits_n\psi(x,n)$. Voir à ce propos A. Tarski *La notion de vérité dans les langages des sciences déductives*, Travaux de la Soc. des Sc. de Varsovie 1933, p. 110.

Ajoutons que la variable x peut être remplacée par un système fini (fixe) de variables $x, y, \dots z$.

[2]) D'après un théorème de M. Tarski. Voir Fund. Math. 26, p. 300.

Sur les espaces multicohérents II [1]).

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Table des matières.

§ 1. Transformations à petites tranches.

Une transformation $g\,\epsilon\,Y^X$ s'appelle *ε-transformation*, lorsque $X\subset Y$ et $|x-g(x)|<\varepsilon$ pour tout $x\,\epsilon\,X$. On dit que la propriété (α) est un *invariant de petites transformations*, lorsque, pour chaque espace Y et chaque ensemble $X\subset Y$ qui jouit de la propriété (α), il existe un $\varepsilon>0$ tel que, quelle que soit la ε-transformation $g\,\epsilon\,Y^X$, l'ensemble $g(X)\subset Y$ jouit aussi de la propriété (α).

Une transformation continue g d'un espace X s'appelle *transformation à ε-tranches*, lorsque $d[g^{-1}(y)]<\varepsilon$ pour tout $y\,\epsilon\,f(X)$. On dit que la propriété (α) est *invariante par rapport aux transformations à petites tranches*, lorsque, pour chaque X ayant la propriété (α), il existe un $\varepsilon>0$ tel que, quelle que soit la transformation g de X à ε-tranches, l'espace $g(X)$ jouit aussi de la propriété (α).

Evidemment, chaque propriété invariante par rapport aux transformations à petites tranches l'est aussi par rapport aux petites transformations. Il est démontré [2]) que, pour les espaces X compacts

---

[1]) Cf. S. Eilenberg, *Sur les espaces multicohérents I*, Fund. Math. 27 (1936), p. 153—190. Cet article sera cité dans la suite comme M_1.

[2]) S. Eilenberg, C. R. Paris 200 (1935), p. 1003.

et pour les propriétés (α) qui sont des invariants d'homéomorphie, la réciproque est aussi vraie.

Théorème 1. *Pour tout espace compact X, chacune de deux propriétés:*

$$(+)\quad b_1(X)\geqslant n, \qquad (++)\quad r(X)\geqslant n$$

est un invariant des transformations à petites tranches.

Dans le cas où $r(X)<\infty$, il est de même de la propriété

$$\left(\substack{++\\+}\right)\qquad b_1(X)-r(X)\geqslant n.$$

Démonstration. Plongeons l'espace X dans le cube Q_ω de Hilbert. Nous allons montrer que chacune des propriétés $(+)$, $(++)$ et $\left(\substack{++\\+}\right)$ est invariante par rapport aux petites transformations.

Considérons k fonctions arbitraires

$$\text{(i)}\qquad f_1, f_2, \dots, f_k \in S_1^X.$$

Soit $U\supset X$ un ensemble ouvert sur lequel les fonctions (i) se laissent étendre [3]) et supposons-les déjà étendues sur U. Choisissons un nombre $\varepsilon>0$ assez petit pour que $U(X,\varepsilon)\subset U$ [4]).

Soit maintenant $g\in Q_\omega^X$ une ε-transformation. Le segment rectiligne $\overline{x,g(x)}$ étant pour tout $x\in X$ contenu dans $U(X,\varepsilon)$, on trouve que les fonction (i) sont respectivement homotopes aux fonctions $f_1g, f_2g, \dots, f_kg\in S_1^X$. Il en résulte que l'indépendance linéaire des fonction (i) entraîne celle des fonctions

$$f_1, f_2, \dots, f_k \in S_1^{g(X)}.$$

Admettons que $b_1(X)\geqslant n$, c. à d. qu'il existe n fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n \in S_1^X$ linéairement indépendantes. En posant $k=n$, il existe n transformations linéairement indépendantes de $g(X)$ en S_1, d'où $b_1[g(X)]\geqslant n$. L'invariance de $(+)$ est ainsi établie.

Admettons que $r(X)\geqslant n$. Il existe donc une décomposition $X=X_1+X_2$ et n fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, \dots, f_n\in S_1^X$, telles que $f_i\sim 1$ sur X_j pour $i=1,2,\dots,n$ et $j=1,2$. Posons $k=n$. Il existe [5]) alors deux ensembles ouverts V_1 et V_2 tels que

$$X_j\subset V_j\subset U \quad\text{et}\quad f_i\sim 1 \quad\text{sur}\quad V_j \qquad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2).$$

[3]) M_1, p. 157, (4).

[4]) $U(X,\varepsilon)$ désigne l'ensemble des points dont la distance de X est $<\varepsilon$.

[5]) M_1, p. 157, (5).

Choisissons un $\varepsilon>0$ assez petit pour que $U(X_1,\varepsilon)\subset V_1$ et $U(X_2,\varepsilon)\subset V_2$.

Pour toute ε-transformation g de X, on a alors la décomposition $g(X)=g(X_1)+g(X_2)$ où

$$f_i\sim 1 \quad\text{sur}\quad g(X_j)\subset V_j \qquad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2).$$

Il en résulte que $r[g(X)]\geqslant n$, puisque les fonctions f_i sont linéairement indépendantes sur $g(X)$. Ainsi l'invariance de $(++)$ est également établie.

Admettons enfin que $r(X)=m$ et que $b_1(X)-r(X)\geqslant n$. Il existe alors $n+m$ fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, \dots, f_{n+m}\in S_1^X$, Posons $k=n+m$.

Supposons que $b_1[g(X)]-r[g(X)]<n$. Soit donc $g(X)=Y_1+Y_2$ une décomposition telle que $b_1[g(X)]-p(Y_1,Y_2)<n$. Posons $X_1=g^{-1}(Y_1)$ et $X_2=g^{-1}(Y_2)$. Soit h la transformation homomorphe de $S_1^{g(X)}$ en sous-groupe de S_1^X, faisant correspondre à toute fonction $f\in S_1^{g(X)}$ la fonction $h(f)=fg\in S_1^X$. Or, $f\sim 1$ sur Y_j implique $fg\sim 1$ sur $X_j=g^{-1}(Y_j)$, de sorte que

$$h[P(Y_1,Y_2)]\subset P(X_1,X_2).$$

L'indépendance linéaire des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_{n+m}\in S_1^X$ implique (à cause du choix de ε) celle des fonctions $f_1g, f_2g, \dots, f_{n+m}g\in S_1^X$, et comme $f_ig=h(f_i)$, on a donc

$$\mathfrak{R}[h(S_1^{g(X)})\oplus P(X)/P(X)]\geqslant n+m \quad {}^{6}).$$

Enfin on a:

$$\begin{aligned}
n>b_1[g(X)]-p(Y_1,Y_2)&=\mathfrak{R}[S_1^{g(X)}/P(Y_1,Y_2)]\geqslant\\
&\geqslant\mathfrak{R}[h(S_1^{g(X)})/h(P(Y_1,Y_2))]=\\
=\mathfrak{R}[h(S_1^{g(X)})\oplus P(X)/P(X)]&-\mathfrak{R}[h(P(Y_1,Y_2))\oplus P(X)/P(X)]\geqslant\\
\geqslant n+m-\mathfrak{R}[P(X_1,X_2)/P(X)]&=n+m-p(X_1,X_2)\geqslant\\
&\geqslant n+m-r(X)=n+m-m=n.
\end{aligned}$$

La supposition que $b_1[g(X)]-r[g(X)]<n$ conduit ainsi à une contradiction.

[6]) Cf. M_1, p. 157 renvoi [16]), et p. 161, renvoi [18]).

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du th. 1 permet de démontrer le

Théorème 2. *Soient: X un sous-ensemble fermé d'un espace Y et $\{X^n\}$ une suite d'ensembles convergeant vers* $X=\prod_n X^n$ [7]. *On a alors:*

$$b_1(X)\leqslant \liminf_n b_1(X^n), \qquad r(X)\leqslant \liminf_n r(X^n).$$

Dans le cas où $r(X)<\infty$, on a aussi

$$b_1(X)-r(X)\leqslant \liminf_n [b_1(X^n)-r(X^n)].$$

Remarque. Les th. 1 et 2 subsistent, en remplaçant la fonction $r(X)$ par chacune des fonctions $r_k(X)$ [8].

Comme une application du th. 1 citons le

Théorème 3. *Si un continu X est un groupe topologique, on a soit $r(X)=0$ soit $r(X)=1$.*

Pour la démonstration, il suffit — avant d'appliquer le th. 1 — de remarquer que: 1⁰ le th. 3 est vrai dans le cas où X est un groupe de Lie [9]) 2⁰ quel que soit $\varepsilon>0$, on peut transformer X en un groupe de Lie par une transformation (même par une homomorphie) à ε-tranches [10].

§ 2. Décompositions et nerfs.

Considérons une décomposition finie d'un espace X en ensembles ouverts (non vides):

$$(\mathcal{G}) \qquad X=G_1+G_2+\ldots+G_k$$

et désignons par $N(\mathcal{G})$ le nerf de cette décomposition [11]. Le sommet de $N(\mathcal{G})$ correspondant à G_i sera désigné par p_i. Soit $h_{\mathcal{G}}(x)$ la bien connue transformation de M. C. Kuratowski [11], qui transforme X en sous-ensemble de $N(\mathcal{G})$.

---

[7]) c. à d. que pour tout $\varepsilon>0$ l'ensemble $U(X,\varepsilon)$ contient tous les ensembles X^n, sauf peut-être un nombre fini.

[8]) M_1; p. 180.

[9]) M_1, p. 177, cor. 4.

[10]) Cf. H. Freudenthal, Ann. of Math. 37 (1936). p. 69.

[11]) voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 3, Warszawa—Lwów 1933. p. 92—95.

(1) *Prémisses:* 1⁰ *Tous les sommandes G_i $(i=1,2,\ldots,k)$ de la décomposition $(\mathcal{G})$ sont connexes,*

2⁰ $f\in S_1^{N(\mathcal{G})}$,

3⁰ $fh_{\mathcal{G}}\sim 1$ *sur* X.

Thèse: $f\sim 1$ *sur* $N(\mathcal{G})$.

Démonstration. Appelons *cyclique* un système ordonné

$$(\mathcal{G}') \qquad G_{i_1}, G_{i_2},\ldots, G_{i_s} \qquad (1\leqslant i_j\leqslant k;\ 1\leqslant j\leqslant s),$$

lorsque $N(\mathcal{G}')$ est une courbe simple fermée.

Supposons que f *non*~ 1 sur $N(\mathcal{G})$.

Nous montrerons d'abord qu'alors

(i) *il existe un système cyclique $(\mathcal{G}')$ pour lequel on a f non~ 1 sur $N(\mathcal{G}')\subset N(\mathcal{G})$.*

Il existe, en effet, au moins une courbe simple fermée composée d'arêtes de $N(\mathcal{G})$ est sur laquelle f *non*~ 1 [12]. Choisissons-en celle dont le nombre d'arêtes est le plus petit:

$$C=\overline{p_{i_1}, p_{i_2}}+\overline{p_{i_2}, p_{i_3}}+\ldots+\overline{p_{i_{s-1}}, p_{i_s}}+\overline{p_{i_s}, p_{i_1}}.$$

Soit $(\mathcal{G}')$ le système $G_{i_1}, G_{i_2},\ldots, G_{i_s}$ ainsi déterminé. On a alors $C\subset N(\mathcal{G}')$. Supposons que $C\neq N(\mathcal{G}')$. Il existe donc une arête $A\subset N(\mathcal{G}')$ dont les sommets (et seulement eux) appartiennent à C. Cette arête détermine deux courbes simples fermées C_1 et C_2 telles que

$$C_1+C_2=C+A, \qquad C_1\cdot C_2=A.$$

Comme le nombre d'arêtes de chacune de ces courbes est inférieur à celui de C, on a $f\sim 1$ sur C_1 et sur C_2. Or, $C_1\cdot C_2$ étant connexe, on en déduit [13]) $f\sim 1$ sur C_1+C_2, contrairement à la relation supposée f *non*~ 1 sur $C\subset C_1+C_2$. L'égalité $C=N(\mathcal{G}')$ est ainsi établie, ce qui prouve que le système $(\mathcal{G}')$ est cyclique et que

(ii) $$f \text{ non}\sim 1 \quad \text{sur} \quad N(\mathcal{G}').$$

---

[12]) cela résulte de M_1, p. 157, (8) et de la proposition suivante: *Soient: K un polyèdre (avec division simpliciale fixe), $K_{[1]}$ la somme de ses arêtes et $f\in S_1^K$. La relation $f\sim 1$ sur $K_{[1]}$ implique alors la relation $f\sim 1$ sur K.* Démonstration immédiate à l'aide de M_1, p. 157, (6).

[13]) M_1, p. 157, (6).

Considérons l'ensemble $X'=G_{i_1}+G_{i_2}+\ldots+G_{i_s}$. Chacune des fonctions $h_{\mathcal{G}}$ et $h_{\mathcal{G}'}$ transforme l'ensemble X' en sous-ensemble de $N(\mathcal{G})$. Ces deux fonctions sont homotopes, puisque, pour tout $x\in X'$, le segment rectiligne $\overline{h_{\mathcal{G}}(x),\, h_{\mathcal{G}'}(x)}$ appartient à $N(\mathcal{G})$. Il en résulte que $fh_{\mathcal{G}'}\sim fh_{\mathcal{G}}$ sur X', d'où en vertu de 3^0

(iii) $$fh_{\mathcal{G}'}\sim 1 \quad \text{sur} \quad X'.$$

Soit g une transformation homéomorphe de $N(\mathcal{G}')$ en S_1. On a donc $fg^{-1}\in S_1^{S_1}$ et, en vertu de (ii), $fg^{-1}\, non\sim 1$ sur S_1. Il existe par conséquent [14]) un $n\neq 0$ tel que

$$fg^{-1}(z)\sim z^n \quad \text{sur} \quad S_1.$$

Il en résulte en vertu de (iii) que

$$[gh_{\mathcal{G}'}]^n\sim fg^{-1}\, gh_{\mathcal{G}'}\sim fh_{\mathcal{G}'}\sim 1 \quad \text{sur} \quad X',$$

d'où [15])

$$gh_{\mathcal{G}'}\sim 1 \quad \text{sur} \quad X'.$$

Il existe donc une fonction $\varphi\in R_1^{X'}$ telle que

(iv) $$gh_{\mathcal{G}'}(x)=e^{i\varphi(x)} \qquad \text{pour tout} \quad x\in X'.$$

Le système

($\mathcal{G}'$) $$G_{i_1},\, G_{i_2},\ldots,\, G_{i_s}$$

étant cyclique, il en est de même, d'après la définition de $h_{\mathcal{G}'}$, du système

$$h_{\mathcal{G}'}(G_{i_1}),\, h_{\mathcal{G}'}(G_{i_2}),\ldots,\, h_{\mathcal{G}'}(G_{i_s}),$$

donc aussi du système

$$gh_{\mathcal{G}'}(G_{i_1}),\, gh_{\mathcal{G}'}(G_{i_2}),\ldots,\, gh_{\mathcal{G}'}(G_{i_s})$$

et finalement, en vertu de (iv), du système

$$\varphi(G_{i_1}),\, \varphi(G_{i_2}),\ldots,\, \varphi(G_{i_s}).$$

Les ensembles G_{i_j} étant connexes, $\varphi(G_{i_j})$ l'est également. Or, il est évident qu'il est impossible d'obtenir sur la ligne droite R_1 un système cyclique d'ensembles connexes.

---

[14]) Fund. Math. 26 (1936), p. 90, (4).
[15]) ibid., p. 89, (3).

Théorème 1 [16]). *Pour toute décomposition finie* ($\mathcal{G}$) *d'un espace* X *en ensembles ouverts et connexes, on a*:

(+) $$b_1(X)\geqslant b_1[N(\mathcal{G})], \qquad (++) \quad r(X)\geqslant r[N(\mathcal{G})].$$

Démonstration. Si, pour une transformation $g\in Y^X$,

(h) $$fg\sim 1 \quad \text{sur} \quad X \quad \text{entraîne} \quad f\sim 1 \quad \text{sur} \quad Y,$$

quelle que soit la fonction $f\in S_1^Y$, on a

$$b_1(X)\geqslant b_1(Y) \qquad \text{et} \qquad r(X)\geqslant r(Y)$$ [17]).

Or, en posant $Y=N(\mathcal{G})$ et $g=h_{\mathcal{G}}$, l'hypothèse (h) est satisfaite en vertu de (1). Par conséquent on a les inégalites (+) et (++), c. q. f. d.

(2) *Soit* X *un continu et* ($\mathcal{G}$), *p.* 104, *sa décomposition finie en ensembles ouverts de diamètre* $<\varepsilon/5$. *Il existe alors une transformation* $g\in[N(\mathcal{G})]^X$ *à* ε*-tranches, telle que* $g(X)=N(\mathcal{G})$.

Démonstration. Soit

$$N(\mathcal{G})=\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_l$$

la décomposition de $N(\mathcal{G})$ en simplexes „saturés", c. à d. qui ne sont pas faces des autres simplexes de $N(\mathcal{G})$. Tout simplexe Δ_i aux sommets $p_{i_1}, p_{i_2},\ldots, p_{i_{\alpha_i}}$ correspond à un ensemble ouvert non vide $U_i=G_{i_1}\cdot G_{i_2}\cdot\ldots\cdot G_{i_{\alpha_i}}$. Les simplexes Δ_i étant saturés, les ensembles U_i auxquels ils correspondent sont disjoints deux à deux.

X étant un continu et U_i en sous-ensemble ouvert non vide de X, il existe un continu $X_i\subset U_i$. Soit f_i une transformation continue de X_i en Δ_i $(f(X_i)=\Delta_i)$.

D'après la définition de la transformation $h_{\mathcal{G}}$, on a $h_{\mathcal{G}}(U_i)\subset\Delta_i$, donc aussi $h_{\mathcal{G}}(\overline{U}_i)\subset\Delta_i$. Soit g_i une transformation continue de $\overline{U}_i$ en Δ_i telle que

$$g_i(x)=\begin{cases} h_{\mathcal{G}}(x) & \text{pour } x\in\overline{U}_i-U_i \\ f_i(x) & \text{pour } x\in X_i. \end{cases}$$

La transformation g de X, définie par les formules

$$g(x)=\begin{cases} g_i(x) & \text{pour } x\in U_i \\ h_{\mathcal{G}}(x) & \text{pour } x\in X-\Sigma U_i \end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots,l),$$

est continue et on a $\Delta_i\subset g(X_i)$, donc $g(X)=N(\mathcal{G})$. Reste à montrer que g est une transformation à ε-tranches.

---

[16]) Cf. H. Hopf, Fund. Math. 27 (1936), p. 41.
[17]) M_1, p. 163.

Remarquons d'abord que:

(v) *pour tout* $x \in G_i$, *le segment* $\overline{h_{\mathcal{G}}(x), p_i}$ *est contenu dans* $N(\mathcal{G})$,

(vi) *pour tout* $x \in X$, *le segment* $\overline{h_{\mathcal{G}}(x), g(x)}$ *est contenu dans* $N(\mathcal{G})$.

Soit $x_1 \in G_{i_1}$, $x_5 \in G_{i_5}$ et $g(x_1) = g(x_5) = y$. En vertu de (v) et de (vi), la ligne brisée

$$\overline{p_{i_1}, h_{\mathcal{G}}(x_1)} + \overline{h_{\mathcal{G}}(x_1), y} + \overline{y, h_{\mathcal{G}}(x_5)} + \overline{h_{\mathcal{G}}(x_5), p_{i_5}}$$

est contenue dans $N(\mathcal{G})$. Il en résulte l'existence des sommets p_{i_2}, p_{i_3} et p_{i_4} de $N(\mathcal{G})$ tels que la ligne brisée

$$\overline{p_{i_1}, p_{i_2}} + \overline{p_{i_2}, p_{i_3}} + \overline{p_{i_3}, p_{i_4}} + \overline{p_{i_4}, p_{i_5}}$$

est contenue dans $N(\mathcal{G})$. Autrement dit: on a $G_{i_j} \cdot G_{i_{j+1}} \neq 0$ pour $j = 1, 2, 3, 4$. Comme $\delta(G_{i_j}) < \varepsilon/5$, il vient $\delta(G_{i_1} + G_{i_2} + G_{i_3} + G_{i_4} + G_{i_5}) < \varepsilon$ et finalement $|x_1 - x_5| < \varepsilon$, puisque $x_1 \in G_{i_1}$ et $x_5 \in G_{i_5}$.

Théorème 2. *Quel que soit le continu localement connexe X, on a*

$$b_1(X) = \sup_{(\mathcal{G})} b_1[N(\mathcal{G})] \qquad \text{et} \qquad r(X) = \sup_{(\mathcal{G})} r[N(\mathcal{G})]$$

où $(\mathcal{G})$ parcourt toutes les décompositions finies de X en ensembles ouverts et connexes.

Démonstration. Les inégalités

$$b_1(X) \geqslant \sup b_1[N(\mathcal{G})] \qquad \text{et} \qquad r(X) \geqslant \sup r[N(\mathcal{G})]$$

résultent du th. 1. Pour démontrer les inégalités inverses, supposons que $b_1(X) \geqslant n_1$ et $r(X) \geqslant n_2$. En vertu de § 1, th. 1, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour toute transformation continue f de X à ε-tranches on a $b_1[f(X)] \geqslant n_1$ et $r[f(X)] \geqslant n_2$.

X étant un continu localement connexe, il existe une décomposition $(\mathcal{G})$, p. 104, de X en ensembles de diamètre $< \varepsilon/5$, ouverts et connexes. En vertu de (2), il existe donc une transformation continue g de X à ε-tranches, telle que $g(X) = N(\mathcal{G})$. Par conséquent $b_1[N(\mathcal{G})] \geqslant n_1$ et $r[N(\mathcal{G})] \geqslant n_2$.

Remarques: 1) Nous avons démontrés un peu plus que n'exigeait l'enoncé du th. 2, à savoir que les inégalités $b_1(X) \geqslant n_1$ et $r(X) \geqslant n_2$ entraînent l'existence d'un $\varepsilon > 0$ pour lequel les inégalités $b_1[N(\mathcal{G})] \geqslant n_1$ et $r[N(\mathcal{G})] \geqslant n_2$ se présentent pour toute décomposition finie $(\mathcal{G})$ de X en ensembles de diamètre $< \varepsilon$, ouverts et connexes;

2) Dans les raisonnements de ce § qui précèdent, la fonction $r(X)$ peut être remplacée partout par chacune des fonctions $r_k(X)$ [8]. Par contre, le th. 3, qui va suivre, n'est valable que pour la fonction $r(X)$ $(= r_2(X))$ et nous n'en connaissons pas d'énoncé analogue pour $r_k(X)$.

Théorème 3 [18]. *Quel que soit le continu localement connexe X, on a*

$$r(X) = \sup_{(\mathcal{G})} b_1[N(\mathcal{G})]$$

où $(\mathcal{G})$ parcourt toutes les décompositions finies d'ordre 2 [19] *de X en ensembles ouverts et connexes.*

Démonstration. Pour toute décomposition $(\mathcal{G})$ en question, on a $\dim[N(\mathcal{G})] \leqslant 1$ d'où $r[N(\mathcal{G})] = b_1[N(\mathcal{G})]$ [20]. En vertu du th. 1, on a donc $r(X) \geqslant b_1[N(\mathcal{G})]$, ce qui donne $r(X) \geqslant \sup b_1[N(\mathcal{G})]$.

Pour établir l'inégalité inverse, admettons que $r(X) \geqslant n$. Il existe alors une transformation monotone [21] g de X telle que

$$b_1[g(X)] \geqslant n_1 \qquad \text{et} \qquad \dim[g(X)] = 1.$$

L'espace $Y = g(X)$ étant un continu localement connexe de dimension 1, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une décomposition finie d'ordre 2

$$(\mathcal{G}') \qquad Y = G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_k$$

en ensembles de diamètre $< \varepsilon$, ouverts et connexes. En vertu du th. 2 (remarque 1) on peut prendre ε suffisamment petit pour que l'on ait aussi $b_1[N(\mathcal{G}')] \geqslant n$.

Posons $G_i = g^{-1}(G'_i)$ et considérons la décomposition

$$(\mathcal{G}) \qquad X = G_1 + G_2 + \ldots + G_k.$$

C'est une décomposition finie d'ordre 2 et on a $N(\mathcal{G}) = N(\mathcal{G}')$, d'où $b_1[N(\mathcal{G})] \geqslant n$. La transformation g étant monotone (et continue), chacun des ensembles G_i est connexe et ouvert. La décomposition $(\mathcal{G})$ satisfait donc aux conditions du théorème, en réalisant en même temps l'inégalité $b_1[N(\mathcal{G})] \geqslant n$.

[18]) C'est M. S. Lefschetz qui m'a posé le problème de caracteriser $r(X)$ par les nerfs de certaines décompositions.

[19]) Une décomposition de X est dite *d'ordre* 2, lorsque tout $x \in X$ appartient au plus à 2 sommandes.

[20]) M_1, p. 162, cor. 6.

[21]) M_1, p. 163, renvoi [21]) et p. 174, th. 4.

Remarque. On peut remplacer dans les th. 2 et 3 les décompositions finies en ensembles ouverts et connexes par les décompositions finies en continus. Cela résulte du fait que, X étant un continu localement connexe, il existe pour chaque décomposition finie de X en ensembles ouverts et connexes une décomposition finie de X en continus ayant le même nerf, et réciproquement.

§ 3. Le groupe fondamental.

Dans M_1, p. 175, nous avons défini pour tout groupe topologique G le nombre entier non négatif $\tau(G)$ et nous y avons établi, pour tout continu X localement connexe, l'égalité $r(X)=\tau[\pi_1(X)]$ où $\pi_1(X)$ désigne le groupe fondamental de X [22]).

A présent, nous allons définir la fonction $\tau(G)$ d'une façon plus simple et donner une nouvelle démonstration de l'égalité ci-dessus. L'équivalence des deux définitions de $\tau(G)$ sera établie plus loin au § 5, p. 115, (1).

La fonction $\tau(G)$ sera définie par la condition:

$\tau(G)\geqslant n$, *lorsqu'il existe une transformation homomorphe (donc aussi continue) de* G *en* $\mathfrak{F}_n$ *tout entier*, où $\mathfrak{F}_n$ désigne le groupe discret à n générateurs libres.

Théorème 1. *Quel que soit le continu localement connexe* X, *on a*

$$r(X)=\tau[\pi_1(X)].$$

Démonstration. Soit $r(X)\geqslant n$. En vertu de M_1, p. 173, th. 2, il existe un polyèdre (topologique fini) $P_1\subset X$ de dimension 1, tel que $b_1(P_1)=n$ et qui est un rétracte de X. Il en résulte [23]) que $\pi_1(P_1)$ est une image homomorphe de $\pi_1(X)$. Or, $\pi_1(P_1)$ étant isomorphe à $\mathfrak{F}_n$, il vient $\tau[\pi_1(X)]\geqslant n$. L'inégalité $r(X)\leqslant\tau[\pi_1(X)]$ est ainsi établie. Reste à montrer que $r(X)\geqslant\tau[\pi_1(X)]$.

Supposons à ce but que $\tau[\pi_1(X)]\geqslant n$; soit donc h une transformation homomorphe de $\pi_1(X)$ en $\mathfrak{F}_n$ tout entier.

Soit Y un continu composé de n circonférences $S_{1,1}, S_{1,2}, \ldots, S_{1,n}$ dont chacune est tangente à toutes les autres en un seul point, notamment au point 1. Chacune des circonférences $S_{1,i}$, suposées orientées, est un parcours fermé appartenant à un élément s_i de $\pi_1(Y)$.

[22]) Pour la définition de $\pi_1(X)$ voir W. Hurewicz, *Beiträge zur Topologie der Deformationen IV, Aspherische Räume*, Proceed. Akad. Amsterdam 39 (1936), p. 218.

[23]) K. Borsuk, Fund. Math. 21 (1933), p. 91, Satz 1.

On sait que les éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$ forment un système de générateurs libres de $\pi_1(Y)$. Le groupe (discret) $\pi_1(Y)$ étant par conséquent isomorphe à $\mathfrak{F}_n$, on peut admettre que $h[\pi_1(X)]=\pi_1(Y)$. Y étant par définition un polyèdre de dimension 1, donc un espace asphérique dans le sens de M. W. Hurewicz [24]), il existe [25]) une transformation continue g de X en Y qui correspond à la transformation h, c. à d. telle que pour tout parcours fermé W dans X tel que $W\epsilon w\epsilon\pi_1(X)$ on a $g(W)\epsilon h(w)\epsilon\pi_1(Y)$.

Posons pour $i=1,2,\ldots,n$:

$$\text{(i)}\qquad r_i(y)=\begin{cases} y & \text{pour } y\epsilon S_{1,i} \\ 1 & \text{pour } y\epsilon S_{1,j} \quad j\neq i,\end{cases}$$

$$\text{(ii)}\qquad f_i(x)=r_i g(x) \quad \text{pour } x\epsilon X.$$

On a $f_i\epsilon S_{1,i}^X$. Nous avons ainsi obtenu n transformations continues $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de X en S_1. Nous allons montrer que ces transformations sont 1⁰ linéairement indépendantes 2⁰ 2-compatibles [26]). Il en résultera directement que $r(X)\geqslant n$.

1⁰. Soit $f=\prod_{i=1}^{n} f_i^{p_i}$ et $f\sim 1$ sur X.

Comme $h[\pi_1(X)]=\pi_1(Y)$, il existe un $w_i\epsilon\pi_1(X)$ pour lequel $h(w_i)=s_i$. Soit $W_i\epsilon w_i$. On a alors $g(W_i)\epsilon h(w_i)=s_i\epsilon\pi_1(Y)$, donc que $g(W_i)\equiv S_{1,i}$. En vertu de (ii), on a par conséquent $f_j(W_i)\equiv r_j(S_{1,i})$, d'où en vertu de (i)

$$f_i(W_i)\epsilon s_i \qquad \text{et} \qquad f_j(W_i)\epsilon e \qquad \text{pour} \qquad j\neq i,$$

où e désigne l'élément neutre de $\pi_1(Y)$. On a alors d'une part

$$f(W_i)\epsilon s_i^{p_i}$$

et d'autre part, vu que $f\sim 1$ sur X,

$$f(W_i)\epsilon e,$$

d'où $p_i=0$. Il est ainsi démontré que $p_1=p_2=\ldots=p_n=0$, puisque i a été choisi arbitrairement.

[24]) l. c., p. 216.

[25]) ibid., p. 219. Remarquons que le th. de M. W. Hurewicz s'applique aussi bien au cas où X est un polyèdre infini.

[26]) M_1, p. 158.

2^0. Soit

$$S_{1,i} = L_{1,i} + L_{2,i}$$

une décomposition de $S_{1,i}$ en deux demi-circonférences avec le point 1 comme l'une des extrémités communes. Posons

$$Y_j = L_{j,1} + L_{j,2} + \dots + L_{j,n}, \qquad X_j = g^{-1}(Y_j). \qquad (j=1,2)$$

On obtient ainsi une décomposition $X = X_1 + X_2$ de X en deux ensembles fermés. On trouve d'après (i) que $r_i(Y_j) = L_{j,i}$, d'où d'après (ii), $f_i(X_j) \subset L_{j,i}$ et par conséquent

$$f_i \sim 1 \quad \text{sur } X_j \qquad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2),$$

ce qui exprime la 2-compatibilité des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$.

§ 4. Polyèdres infinis.

Nous allons étendre sur les polyèdres connexes infinis [27]) les résultats établis pour les continus localement connexes dans le § précédent et dans M_1, II, § 1.

Désignons par K un complexe géométrique connexe qui est une division simpliciale du polyèdre connexe infini P. Les simplexes seront supposés fermés, donc les sous-complexes de K aussi.

(1) *Pour tout sous-complexe K_1 de K, il existe un sous-complexe connexe K_1' de K, tel que $K_1 \subset K_1'$ et que $C \subset K_1'$ entraîne $C \subset K_1$ pour toute courbe simple fermée C.*

Démonstration. Rangeons tous les simplexes 1-dimensionnels de K en une suite

$$\Delta_1^1, \Delta_2^1, \dots, \Delta_i^1, \dots .$$

[27]) Un polyèdre infini est un ensemble P qui admet une *décomposition simpliciale*, c. à d. une décomposition de la forme $P = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ où Δ_i sont des simplexes géométriques assujettis aux conditions: 1^0) $\Delta_i \cdot \Delta_j$ est une face (de dimension $\geqslant -1$) de Δ_i et de Δ_j; 2^0) aucun point de P n'est un point d'accumulation d'une suite de points appartenant à de divers termes de la suite $\{\Delta_i\}$. Un polyèdre infini est ainsi *localement* un polyèdre fini. L'ensemble vide étant aussi un simplexe, la définition d'un polyèdre infini embrasse celle du polyèdre fini.

Posons $H_1 = K_1$ et supposons le sous-complexe H_{n-1} déjà défini. Soit i_n le plus petit entier tel que $\Delta_{i_n}^1 - H_{n-1} \neq 0$ et que $C \subset H_{n-1} + \Delta_{i_n}^1$ entraîne $C \subset H_{n-1}$ pour toute courbe simple fermée C. Posons $H_n = H_{n-1} + \Delta_{i_n}^1$ ou $H_n = H_{n-1}$, suivant qu'un tel i_n existe ou non. Posons enfin $K_1' = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$.

Considérons une courbe simple fermée $C \subset K_1'$. La courbe C étant un ensemble compact, il existe un n tel que $C \subset H_n$. En vertu de la définition de H_n, on a donc $C \subset H_{n-1}$ et, par induction, $C \subset H_1 = K_1$.

Reste à montrer que K_1' est connexe. Supposons le contraire. K étant connexe par l'hypothèse, il existe alors un simplexe Δ_j^1 tel que $\Delta_j^1 - K_1' \neq 0$ et que $C \subset K_1' + \Delta_j^1$ entraîne $C \subset K_1'$ pour toute c. s. f. C. En vertu de la définition de i_n, on a donc $i_n < j$ pour tout n. Tous les indices i_n étant distincts par définition, il cessent d'exister à partir d'un certain n_0. Par conséquent $H_{n_0} = H_{n_0+1} = K_1'$. Or, c'est impossible, puisque j peut être pris comme i_{n_0+1} (dans le cas où il n'existerait pas d'entier plus petit avec lesdites propriétés).

Théorème 1. *On a*

$$r(P) = \sup[b_0(X_1 \cdot X_2) - 1],$$

en faisant parcourir X_1 et X_2 les ensembles fermés et connexes tels que $P = X_1 + X_2$.

Théorème 1'. *On a*

$$r(P) = \sup[b_0(K_1' \cdot K_2') - 1],$$

où l'opérateur sup *s'étend sur toutes les subdivisions simpliciales K' de la division simpliciale K de P et sur toutes les décompositions $K' = K_1' + K_2'$ de K' en sous-complexes connexes de K'.*

Démonstration. Pour toute décomposition $P = X_1 + X_2$ en ensembles fermés et connexes, on a $p(X_1, X_2) = b_0(X_1 \cdot X_2) - 1$ [28]), d'où $r(P) \geqslant \sup[b_0(X_1 \cdot X_2) - 1]$. Comme on a évidemment

$$\sup[b_0(X_1 \cdot X_2) - 1] \geqslant \sup[b_0(K_1' \cdot K_2') - 1],$$

il suffit de prouver que $r(P) \leqslant \sup[b_0(K_1' \cdot K_2') - 1]$.

[28]) M_1, p. 158, (12).

Admettons $r(P)\geqslant n$. Il existe donc n fonctions linéairement indépendantes $f_1, f_2, \ldots, f_n \epsilon S_1^P$ et une décomposition en ensembles fermés $P=X_1+X_2$ telle que $f_i \sim 1$ sur X_j $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2)$. Soient [29]) $U_j \supset X_j$ deux ensembles ouverts tels que $f_i \sim 1$ sur U_j $(i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2)$.

Le complexe K admet [30]) une subdivision simpliciale K' qui contient deux sous-complexes K_j tels que $X_j \subset K_j \subset U_j$. Soit K_j' le sous-complexe connexe de K' correspondant à K_j en vertu de (1). On a donc $K'=K_1'+K_2'$ et, pour tout $i=1,2,\ldots,n$ et $j=1,2$, $f_i \sim 1$ sur K_j, puisque $K_j \subset U_j$. Donc, à plus forte raison, $f_i \sim 1$ sur toute courbe simple fermée $C \subset K_j$. Il en résulte (conformément à (1)) que $f_i \sim 1$ sur tout courbe simple fermée $C \subset K_j'$, d'où [31]) $f_i \sim 1$ sur K_j'. Il est ainsi démontré que $p(K_1', K_2') \geqslant n$. K_1' et K_2' étant connexes et fermés, on a donc [28]) $b_1(K_1' \cdot K_2')-1 \geqslant n$, c. q. f. d.

Le th. 1' permet de déduire les théorèmes suivants, tout comme dans le cas des continus localement connexes:

Théorème 2. *Pour que l'on ait $r(P)\geqslant n$, il faut et il suffit qu'il existe un polyèdre (topologique fini) à 1 dimension $P_1 \subset P$, tel que $b_1(P_1)=n$ et qui est un rétracte de P.*

Théorème 3. *On a*

$$r(P)=\sup b_1(Y),$$

où Y parcourt tous les rétractes 1-dimensionnels compacts de P.

Théorème 4. *On a*

$$r(P)=\tau[\pi_1(P)].$$

Le th. 4 implique la proposition suivante [32]):

Lorsque $b_1(P)=1$, le groupe $\pi_1(P)$ s'il est libre il est isomorphe à $\mathfrak{F}_1$.

En effet, il existerait en cas contraire une transformation homomorphe de $\pi_1(P)$ en $\mathfrak{F}_2$ (tout entier), de sorte qu'on aurait $\tau[\pi_1(P)]\geqslant 2$, d'où selon le th. 4 $r(P)\geqslant 2$ et à plus forte raison $b_1(P)\geqslant 2$.

---

[29]) M_1, p. 157, (5).

[30]) P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935, p. 146.

[31]) M_1, p. 157, (8).

[32]) Cf. Fund. Math. 28 (1937), p. 241.

§ 5. Propriétés algébriques de $\tau(G)$.

Soit G un groupe topologique. La fonction $\tau(G)$ a été définie (p. 110) par la condition:

$\tau(G)\geqslant n$, lorsque $\mathfrak{F}_n$ est une image homomorphe de G.

Un sous-groupe G' de G est dit *rétracte* de G, lorsqu'il existe une transformation homomorphe (donc aussi continue) h, transformant G en G' de manière que $h(x)=x$ pour tout $x \epsilon G'$ (voir M_1, p. 175).

(1) *Pour que l'on ait $\tau(G)\geqslant n$, il faut et il suffit qu'il existe un sous-groupe discret G' de G, isomorphe à $\mathfrak{F}_n$ et qui est un rétracte de G.*

Démonstration. Il est évident que la condition est suffisante. Pour prouver qu'elle est aussi nécessaire, admettons que $\tau(G)\geqslant n$. Soit h une transformation homomorphe de G en $\mathfrak{F}_n$ tout entier. Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les générateurs libres de $\mathfrak{F}_n$. Comme $h(G)=\mathfrak{F}_n$, on peut trouver des $a_1, a_2, \ldots, a_n \epsilon G$ tels que $h(a_i)=A_i$ pour $i=1,2,\ldots,n$. Posons $\varphi(A_i)=a_i$. La transformation φ, ainsi engendrée, est une isomorphie entre $\mathfrak{F}_n$ et le sous-groupe G' de G engendré par les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La fonction φh donne la rétraction cherchée.

La proposition (1), qui vient d'être établie, montre que la définition actuelle de $\tau(G)$ équivaut à celle de M_1, p. 175.

Passons aux formules concernant le produit direct $G_1 \times G_2$ et le produit libre $G_1 \bigcirc G_2$ des groupes topologiques G_1 et G_2. On a:

(2) $$\tau(G_1 \times G_2)=\max[\tau(G_1), \tau(G_2)],$$

(3) $$\tau(G_1 \bigcirc G_2)=\tau(G_1)+\tau(G_2).$$

Une démonstration (algébrique) de (2), due à M. W. Hurewicz, a été donnée dans M_1, p. 179. En appliquant la nouvelle définition de $\tau(G)$, elle devient plus simple et concerne des groupes topologiques G_1 et G_2 arbitraires.

Pour démontrer (3), remarquons que les transformations homomorphes $h_1(G_1)=\mathfrak{F}_{n_1}$ et $h_2(G_2)=\mathfrak{F}_{n_2}$ engendrent une transformation $h(G_1 \bigcirc G_2)=\mathfrak{F}_{n_1} \bigcirc \mathfrak{F}_{n_2}=\mathfrak{F}_{n_1+n_2}$, d'où $\tau(G_1 \bigcirc G_2)\geqslant \tau(G_1)+\tau(G_2)$.

Pour établir l'inégalité inverse, admettons que $\tau(G_1)<\infty$, $\tau(G_2)<\infty$ et $\tau(G_1 \bigcirc G_2)\geqslant n$. soit donc $h(G_1 \bigcirc G_2)=\mathfrak{F}_n$ une transformation homomorphe. Tout sous-groupe de $\mathfrak{F}_n$ étant libre les groupes $h(G_1)$ et $h(G_2)$ sont libres.

Soient donc:

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n_1}, \qquad n_1 \leqslant \tau(G_1),$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_{n_2}, \qquad n_2 \leqslant \tau(G_2)$$

les systèmes de générateurs de $h(G_1)$ et de $h(G_2)$ respectivement. Tout élément de $\mathfrak{F}_n$ étant de la forme $f(a_1')f(b_1')f(a_2')f(b_2')\ldots f(a_k')f(b_k')$, où $a_1', a_2', \ldots, a_k' \in G_1$ et $b_1', b_2', \ldots, b_k' \in G_2$, on en déduit que

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{n_2}$$

est un système de générateurs pour $\mathfrak{F}_n$, d'où $n \leqslant n_1 + n_2 \leqslant \tau(G_1) + \tau(G_2)$.

Comme l'application directe de (3), on a

(4) $$\tau(\mathfrak{F}_n) = n,$$

ce qui peut d'ailleurs être établi aussi d'une façon topologique.

(5) *$\tau(G)$ est la plus petite parmi les fonctions $\varphi(G)$ telles que* 1^0 $\varphi(\mathfrak{F}_n) = n$ 2^0 $\varphi(G) \geqslant \varphi(G')$ *pour toute image homomorphe G' de G.*

En effet, si $\mathfrak{F}_n$ est une image homomorphe de G, on a $\varphi(G) \geqslant \varphi(\mathfrak{F}_n) = n$, d'où $\varphi(G) \geqslant \tau(G)$.

(6) *G étant abelien, on a $\tau(G) \leqslant 1$.*

Considérons un groupe discret G avec les générateurs

(i) $$A_1, A_2, \ldots, A_n \qquad 1 \leqslant n < \infty$$

et les relations définissantes (non triviales)

(ii) $$R_1(A) = 1, \quad R_2(A) = 1, \quad \ldots, \quad R_m(A) = 1 \qquad 0 \leqslant m \leqslant \infty.$$

Désignons par $\mathfrak{A}(G)$ le groupe provenant de l'abelisation de G. $\mathfrak{A}(G)$ peut donc être défini comme groupe abelien avec les générateurs

(i') $$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

et les relations définissantes

(ii') $$R_1(a) = 0, \quad R_2(a) = 0, \quad \ldots, \quad R_m(a) = 0$$

où $R_i(a)$ s'obtient de $R_i(A)$, en remplaçant respectivement A_j par a_j et la multiplication par l'addition (commutative).

Voici quelques propositions qui permettent dans certains cas d'évaluer le nombre $\tau(G)$:

(7) $$\tau(G) \leqslant \mathfrak{R}[\mathfrak{A}(G)].$$ [33])

(8) $\tau(G) = 0$ *équivaut à la condition que le groupe $\mathfrak{A}(G)$ soit fini.*

(9) $\mathfrak{R}[\mathfrak{A}(G)] = 1$ *entraîne* $\tau(G) = 1$.

(10) $m < n$ *entraîne* $\tau(G) > 0$.

(11) $m > 0$ *entraîne* $\tau(G) < n$.

(12) $n = 2,\ m = 1$ *entraîne* $\tau(G) = 1$.

Démonstrations: Ad (7). Soit $\tau(G) \geqslant k$. Il existe donc une transformation homomorphe de G en $\mathfrak{F}_k$. Cette transformation en détermine une de $\mathfrak{A}(G)$ en $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_k)$, d'où $\mathfrak{R}[\mathfrak{A}(G)] \geqslant \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_k) = k$.

Ad (8). Si le groupe $\mathfrak{A}(G)$ est fini, on a $\mathfrak{R}[\mathfrak{A}(G)] = 0$ et, en vertu de (7), $\tau(G) = 0$. S'il est infini, il est de la forme $\mathfrak{F}_1 \times G_1$, d'où $\tau[\mathfrak{A}(G)] \geqslant 1$. Comme $\mathfrak{A}(G)$ est une image homomorphe de G, on a $\tau(G) \geqslant 1$ en vertu de (5).

Ad (9). On a $\tau(G) \leqslant 1$ en vertu de (7) et $\tau(G) > 0$ en vertu de (8).

Ad (10). Soit $\mathfrak{A}_n$ le groupe abelien libre à n générateurs (i') et G_1 son sous-groupe engendré par les éléments (ii'). On a donc $\mathfrak{A}(G) = \mathfrak{A}_k / G_1$, d'où $\mathfrak{R}[\mathfrak{A}(G)] = \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_k) - \mathfrak{R}(G_1) = n - \mathfrak{R}(G_1) \geqslant n - m > 0$. Le groupe $\mathfrak{A}(G)$ est donc infini, d'où $\tau(G) > 0$ en vertu de (8).

Ad (11). Soit $\mathfrak{F}_n$ le groupe libre engendré par les générateurs (i). En y posant (ii), on en obtient le groupe G. Il en résulte une transformation homomorphe g de $\mathfrak{F}_n$ en G. Comme $m > 0$ (les relations (ii) n'étant pas triviales), cette transformation n'est pas une isomorphie. En supposant maintenant que $\tau(G) \geqslant n$, il existerait une homomorphie h de G en $\mathfrak{F}_n$, de sorte que hg serait une homomorphie, mais non une isomorphie de $\mathfrak{F}_n$ en $\mathfrak{F}_n$, ce qui est impossible [34]).

Ad (12). On a $\tau(G) > 0$ selon (12) et $\tau(G) < 2$ selon (11), d'où $\tau(G) = 1$.

Remarquons qu'en remplaçant $\mathfrak{F}_n$ par $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_n)$ dans la définition de $\tau(G)$, on obtient (du moins dans le cas qui vient d'être considéré) le nombre $\mathfrak{R}[\mathfrak{A}(G)]$, l'ainsi dit nombre de Betti du groupe G. Le nombre $\tau(G)$ joue donc le rôle du „nombre de Betti non abelien de G".

On peut montrer que pour les surfaces closes (à deux dimensions) on a soit $r(X) = b_1(X)/2$, soit $r(X) = [b_1(X) + 1]/2$, suivant que le nombre $b_1(X)$ est pair ou non. On connait donc aussi la valeur de $\tau(G)$, G étant un groupe fondamental d'une surface close.

---

[33]) $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ désigne le *rang* du groupe abelien $\mathfrak{A}$; cf. M_1, p. 157, renvoi [16]).

[34]) W. Magnus, Math. Ann. 111 (1935), p. 276; cf. aussi F. Levi, Math. Zeitschr. 37 (1933), p. 95.

§ 6. Enlacement faible.[35])

Rappellons d'abord deux définitions données dans M_1, p. 170:

Deux *cycles* (polygonaux, à coefficients entiers) 1-dimensionnels γ_1 et γ_2 de l'espace euclidien à 3 dimensions R_3 sont *faiblement enlacés*, lorsqu'on a $P_1 \cdot P_2 \neq 0$ pour tout couple de polyèdres $P_1 \subset R_3$ et $P_2 \subset R_3$ tels que $\gamma_i \approx 0$ dans P_i $(i=1,2)$, l'homologie $\approx$ étant entendue avec division.

Deux *tores ouverts* (c. à d. ensembles homéomorphes à $S_1 \times R_2$) $C_1 \subset R_3$ et $C_2 \subset R_3$ tels que $\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 = 0$, sont *faiblement enlacés*, lorsque tout couple de cycles γ_i de C_i tels que γ_i *non* ≈ 0 dans C_i $(i=1,2)$ est faiblement enlacé.

Soient $L_1 \subset R_3$ et $L_2 \subset R_3$ deux *lignes polygonales*, fermées, sans point double, disjointes. Désignons par C_i^ε l'ensemble des points de R_3 dont la distance de L_i est $<\varepsilon$. On peut attacher à L_1 et L_2 un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ entraîne: 1⁰ que C_1^ε et C_2^ε sont des tores ouverts et $\bar{C}_1^\varepsilon \cdot \bar{C}_2^\varepsilon = 0$, 2⁰ qu'il existe une homéomorphie transformant R_3 en R_3 et C_i^ε en $C_i^{\varepsilon_0}$ $(i=1,2)$.

L_1 et L_2 seront dits *faiblement enlacés*, lorsque les tores ouverts $C_1^{\varepsilon_0}$ et $C_2^{\varepsilon_0}$ sont faiblement enlacés.

Posons $P = R_3 - L_1 - L_2$ et $\pi_1 = \pi_1(P)$.

Théorème 1. *On a* $r(P)=1$ *ou* $r(P)=2$, *suivant que* L_1 *et* L_2 *sont faiblement enlacés ou non.*

Démonstration. Il existe un ε tel que $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et que $R_3 - C_1^\varepsilon - C_2^\varepsilon$ est un rétracte de P par déformation. Il en résulte[36]) que $r(P) = r(R_3 - C_1^\varepsilon - C_2^\varepsilon)$. Or, $R_3 - C_1^\varepsilon - C_2^\varepsilon$ et $R_3 - C_1^{\varepsilon_0} - C_2^{\varepsilon_0}$ sont homéomorphes, d'où $r(P) = r(R_3 - C_1^{\varepsilon_0} - C_2^{\varepsilon_0})$. Le th. 1 résulte donc de M_1, p. 170, th. 1.

Théorème 2. *Pour que* L_1 *et* L_2 *soient faiblement enlacés, il faut et il suffit qu'il existe une transformation essentielle* $f \in T_2^P$ $(T_2 = S_1 \times S_1)$.

Démonstration. On a $b_1(L_1 + L_2) = 2$ d'où[37])

$$b_1(P) = b_1(R_3 - L_1 - L_2) = 2.$$

Le th. 2 résulte donc du th. 1 et de M_1, p. 165, th. 4.

[35]) Les résultats principaux de ce § se trouvent énoncés dans ma note de C. R. Paris 204 (1937), p. 1226.

[36]) M_1, p. 162, th. 4.

[37]) K. Borsuk et S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), p. 223, Korollar 1.

En vertu de § 4, th. 4 on a $r(P) = \tau(\pi_1)$. La définition de τ (p. 110) et le th. 1 donnent donc le

Théorème 3. *Pour que* L_1 *et* L_2 *soient faiblement enlacés, il faut et il suffit que* π_1 *n'admette aucune transformation homomorphe en* $\mathfrak{F}_2$ (c. à d. que $\tau(\pi_1) < 2$).

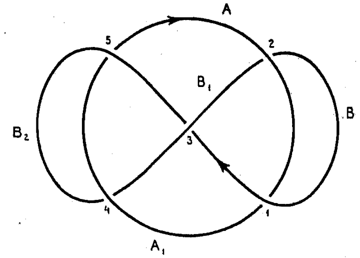
En appliquant ce th. et les propositions (4) et (11) du § 5, on trouve le

Théorème 4. *Si le groupe* π_1 *est engendré par 2 générateurs* A *et* B, *l'enlacement faible de* L_1 *et* L_2 *équivaut à l'existence dans* π_1 *d'une relation (non triviale)* $R(A,B)=1$.

En particulier, L_1 et L_2 sont faiblement enlacés, si π_1 est engendré par 2 générateurs et une relation définissante.

Cette propriété du groupe π_1 a été établie par M. K. Reidemeister pour une classe de systèmes L_1 et L_2, qu'il appelle „Viergeflechte“[38]). Dans cette classe, il y a des systèmes dont le coefficient d'enlacement (Verschlingungszahl) est 0. Parmi ces derniers, se trouve l'exemple suivant[39]) pour lequel π_1 est particulièrement simple à calculer[40]):

En considérant A, A_1, B, B_1 et B_2 comme générateurs, on trouve[41]) les relations:



(1) $A_1^{-1} B^{-1} A B = 1,$

(2) $B^{-1} A^{-1} B_1 A = 1,$

(3) $B_2^{-1} B_1^{-1} B B_1 = 1,$

(4) $B_1^{-1} A_1 B_2 A_1^{-1} = 1,$

(5) $A^{-1} B_2 A_1 B_2^{-1} = 1.$

Les relations (1), (2) et (3) donnent:

$$A_1 = B^{-1} A B, \qquad B_1 = A B A^{-1}, \qquad B_2 = A B^{-1} A^{-1} B A B A^{-1}.$$

[38]) K. Reideimeister, *Knotentheorie*, Berlin, Springer 1932, p. 13, 65—66 et 69; *Knoten und Verkettungen*, Math. Zeit. 29 (1929), p. 271—3; cf. aussi Anna Fischer, *Gruppen und Verkettungen*, Comm. Math. Helv. 2 (1930), p. 266—8.

[39]) Cf. L. Antoine, Journ. de Math. (8) 4 (1921), p. 290—295; K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Berlin, Springer 1932, p. 13, Fig. 16; E. Pannwitz, Math. Ann. 108 (1933), p. 645, Fig. 4; C. Weber et H. Seiffert, Math. Zeit. 37 (1933), p. 252, Fig. 15; P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935, p. 417, Abb. 32 et p. 418, Abb. 34. Tous ces exemples coïncident avec le nôtre, à une homéomorphie de R_3 près.

[40]) Je dois ce calcul, dans une forme un peu différente, à M. L. Vietoris.

[41]) d'après K. Reidemeister, *Knotentheorie*, p. 44.

En substituant ces valeurs à A_1, B_1 et B_2 soit dans (4), soit dans (5), on obtient la relation

(I) $$A^{-1}B^{-1}ABAB^{-1}A^{-1}B=BA^{-1}B^{-1}ABAB^{-1}A^{-1}.$$

Le groupe π_1 est donc engendré par les générateurs A et B et la relation définissante (I).

La projection plane des courbes de la fig. contient 5 points doubles. Or, on prouve facilement que: 1⁰ pour les systèmes L_1, L_2 dont une projection plane contient au plus 4 points doubles (et aucun point d'ordre supérieur), l'enlacement faible coïncide avec l'enlacement dans le sens ordinaire (d'homologie), 2⁰ tout système L_1, L_2 qui est faiblement enlacé, sans être enlacé dans le sens ordinaire, et qui admet une projection avec 5 points doubles est identique, à une homéomorphie de l'espace entier R_3 près, aux courbes de la fig. Ainsi, *la fig. représente l'exemple „le plus simple" des courbes faiblement enlacées qui ne sont pas enlacées dans le sens ordinaire d'homologie.*

En assignant à chaque segment de L_1 et de L_2 une orientation et un coefficient ± 1, on peut (à $\pm$ près) attacher aux polygones L_1 et L_2 deux cycles γ_1 et γ_2. Examinons les propositions suivantes:

(a) *γ_1 et γ_2 sont enlacés (dans le sens d'homologie),*
(b) *L_1 et L_2 sont faiblement enlacés,*
(c) *γ_1 et γ_2 sont faiblement enlacés.*

On a évidemment (a)$\rightarrow$(b)$\rightarrow$(c). Nous ignorons si (c)$\rightarrow$(b). Les courbes de la fig. montrent que (b)*non*$\rightarrow$(a). Or, (c) équivaut à

(d) *Tout polyèdre $P_1 \subset R_3 - L_2$, tel que $\gamma_1 \approx 0$ dans P_1, contient un L_3 enlacé avec γ_2 (dans le sens d'homologie).*

En effet, en vertu du th. de dualité de M. J. W. Alexander, la non-existence d'un polyèdre P_2 tel que $P_1 \cdot P_2 = 0$ et que $\gamma_2 \approx 0$ dans P_2, équivaut à l'existence d'un cycle γ dans P_1 enlacé avec γ_2. Or, il existe dans P_1 une suite $L_3, L_4, \dots, L_n$ de lignes polygonales, fermées, sans points doubles et telles que $\gamma = k_3\gamma_3 + k_4\gamma_4 + \dots + k_n\gamma_n$. Le cycle γ_2 est donc enlacé avec un des cycles γ_i $(i=3,4,\dots,n)$.

L'équivalence de (c) et (d) suggère la définition suivante:

Deux lignes polygonales L_1, $L_2 \subset R_3$, fermées, sans point double et disjointes seront dites *n-enlacées*, lorsque tout polyèdre $P_1 \subset R_3 - L_2$, tel que $\gamma_1 \approx 0$ dans P_1, contient un L_3 $(n-1)$-enlacé avec L_2. On entendra par *0-enlacement* celui dans le sens d'homologie.

Le 1-enlacement coïncide donc avec la propriété (d); par suite, il équivaut à (c). Il en résulte que les courbes de la fig. forment l'exemple (le plus simple) d'un 1-enlacement qui n'est pas un 0-enlacement.

§ 7. Continus métriquement homogènes.

Un espace X est dit *métriquement homogène*, lorsqu'il existe, pour tout couple $x_1, x_2 \in X$, une transformation isométrique $f(X)=X$ telle que $f(x_1)=x_2$.

Théorème 1 [42]. *Si le continu X est métriquement homogène, on a soit $r(X)=0$, soit $r(X)=1$.*

Démonstration. Désignons par $\mathfrak{F}$ l'espace des transformations isométriques de X en X. L'espace $\mathfrak{F}$ est un groupe topologique compact. Soit $\mathfrak{F}_0$ la composante de $\mathfrak{F}$ contenant la transformation $f(x)\equiv x$. Le continu $\mathfrak{F}_0$ est donc un groupe topologique, d'où en vertu de § 1, th. 3 (p. 104), on a $r(\mathfrak{F}_0)\leqslant 1$.

Considérons un $x_0 \in X$ et posons

$$g(f)=f(x_0) \quad \text{pour tout } f \in \mathfrak{F}.$$

On a $g \in X^{\mathfrak{F}}$. X étant métriquement homogène, on a $g(\mathfrak{F})=X$ et la transformation g est intérieure [43]. Or, une transformation intérieure d'un espace compact transforme composante en composante, donc $g(\mathfrak{F}_0)=X$. Il en résulte [44] que $r(\mathfrak{F}_0)\geqslant r[g(\mathfrak{F}_0)]=r(X)$, d'où $r(X)\leqslant 1$, c. q. f. d.

Comme $r(X)=b_1(X)$ pour tout continu X de dimension 1 [45], on a le

Théorème 2. *Si le continu X de dimension 1 est métriquement homogène, on a soit $b_1(X)=0$, soit $b_1(X)=1$.*

Nous ignorons si le cas $b_1(X)=0$ peut se présenter effectivement.

Soit X un continu localement connexe de dimension 1. Alors:

(1) *La condition $b_1(X)=0$ équivaut à celle que X ne contienne aucune courbe simple fermée.*

(2) *La condition $b_1(X)=1$ équivaut à celle que X contienne une seule courbe simple fermée.*

En effet, si X ne contient pas de courbes simples fermées, on a (en vertu de M_1, p. 157, (8)) $f\sim 1$ sur X pour tout $f \in S_1^X$, donc $b_1(X)=0$.

---

[42]) Cf. M_1, p. 177, th. 5.
[43]) H. Freudenthal, Ann. of Math. 37 (1936), p. 52—3.
[44]) M_1, p. 163, th. 10.
[45]) M_1, p. 162, cor. 6.

Soit maintenant $C \subset X$ une courbe simple fermée et $f \in S_1^C$ une homéomorphie. Comme $\dim X = 1$, il existe [46]) une extension $f' \in S_1^X$ de f, pour laquelle on a évidemment f' *non* ~ 1 sur C, d'où $b_1(X) \geqslant 1$.

Soient maintenant $C_1 \subset X$ et $C_2 \subset X$ deux courbes simples fermées différentes. On trouve alors facilement deux transformations $f_1, f_2 \in S_1^{C_1+C_2}$ telles que que 1° f_i transforme C_i par homéomorphie $(i=1,2)$, 2° $f_1(C_2) \neq S_1 \neq f_2(C_1)$. Comme $\dim X = 1$, il existe [46]) alors des extensions $f_1', f_2' \in S_1^X$ et on a

$$f_1' \text{ non} \sim 1 \quad \text{sur } C_1, \qquad f_1' \sim 1 \quad \text{sur } C_2,$$
$$f_2' \sim 1 \quad \text{sur } C_1, \qquad f_2' \text{ non} \sim 1 \quad \text{sur } C_2.$$

Les fonctions f_1' et f_2' sont donc linéairement indépendantes, d'où $b_1(X) \geqslant 2$.

Théorème 3. *Tout continu X localement connexe, de dimension 1 et métriquement homogène est une courbe simple fermée.*

Démonstration. On a en vertu du th. 2 soit $b_1(X)=0$, soit $b_1(X)=1$. Tout continu localement connexe sans courbes simples fermées (c. à d. une dendrite) contient, comme on sait, des points qui le divisent et des points qui ne le divisent pas. Par conséquent, il n'est pas homogène. Le cas $b_1(X)=0$ est donc exclu en vertu de (1). Par conséquent $b_1(X)=1$, d'où, en vertu de (2), l'existence d'une seule courbe simple fermée $C \subset X$.

Envisageons la propriété suivante d'un point $x \in X$: x appartient à une courbe simple fermée contenue dans X. Or, par suite de l'homogénéité de X, tout point $x \in X$ jouit de cette propriété, c. à d. qu'on a $x \in C$. Par conséquent $X \subset C$, d'où $X = C$.

[46]) voir p. ex. W. Hurewicz, Fund. Math. 24 (1935), p. 144.

Concerning biconnected sets.

By

Edwin W. Miller (Ann Arbor, U. S. A.).

Introduction.

In their paper on connected sets B. Knaster and C. Kuratowski introduced the idea of a biconnected set and gave several examples of such sets [1]). Each of the biconnected sets constructed by Knaster and Kuratowski contains a dispersion point [2]), and Kuratowski raised the question [3]) whether every biconnected set contains such a point. The main object of the present paper is to prove that *if the hypothesis of the continuum is true, there exists (in a bounded portion of the euclidean plane) a biconnected set which contains no dispersion point.* The proof makes use of the axiom of Zermelo.

[1]) *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II, pp. 206—255. In this paper, as well as in the present paper, a set of points is said to be connected *if it contains more than one point* and is not the sum of two non-vacuous mutually separated sets. A set of points is said to be biconnected if it is connected and is not the sum of two mutually exclusive connected sets. It is an immediate consequence of theorem XI of the Knaster-Kuratowski paper that a definition equivalent to the last in this: a set of point is biconnected if it is connected and does not *contain* two mutually exclusive connected sets. For generalizations of the idea of biconnected set see P. M. Swingle, *Generalizations of biconnected sets*, Amer. Journal of Math., LIII, no. 2, pp. 385—400.

[2]) A point p of a connected set M is called a dispersion point of M if $M-p$ contains no connected set. For theorems on dispersion points and dispersion sets see J. R. Kline, *A theorem concerning connected point sets*, Fund. Math. III, pp. 238—239, and R. L. Wilder, *On the dispersion sets of connected point-sets*, Fund. Math. VII, pp. 214—228.

[3]) Fund. Math. III, p. 322.