donc d'après (15)

$$\sum_{i=1}^{n_s} \frac{a_i^s}{2^i} \leqslant x \leqslant \sum_{i=1}^{n_s} \frac{a_i^s}{2^i} + \frac{1}{2^{n_s}},$$

ce qui entraîne selon (10) que $x \epsilon \delta_s$, et à plus forte raison que $x \epsilon \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p$.

On a donc la formule (11). Par conséquent l'ensemble N jouit de la propriété (C).

Notre théorème est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on peut, dans notre théorème, remplacer partout les mots „de puissance du continu" par „indénombrable" (sans en altérer la démonstration).

Les types d'ordre définissables et les ensembles boreliens.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dans son Mémoire „*Grundzüge des Systemenkalküls*"[1]), M. Tarski a envisagé plusieurs exemples de types d'ordre dénombrable (respectivement de classes de tels types) qui ne se laissent pas définir à l'aide des variables élémentaires seules (c. à d. sans l'emploi des variables-ensembles). Telle est, en particulier, la classe des nombres ordinaux (= des types du bon ordre).

Ce dernier résultat va être obtenu ici sur une voie tout-à-fait différente de celle dont s'est servi M. Tarski. La théorie des ensembles analytiques permet, en effet, d'établir un théorème général dont cet énoncé n'est qu'un cas particulier. De plus, on en conclura que, pour définir le bon ordre, les variables élémentaires ne suffisent pas, non seulement en nombre fini, mais même en une infinité dénombrable (dans un sens qui va être précisé plus loin).

1. Soit R l'ensemble de tous les nombres rationnels de l'intervalle 01. Rangeons le en une suite $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ à termes distincts.

Chaque type d'ordre dénombrable étant le type d'un sous-ensemble de R (rangé selon la relation $x<y$), le problème de la définissabilité d'une classe A de types d'ordre dénombrable se réduit à celui de définir la famille $\boldsymbol{F}$ des sous-ensembles de R qui ont le type d'ordre appartenant à A. Admettons que la classe A se laisse définir à l'aide des variables élémentaires; la définition de $\boldsymbol{F}$ s'obtient alors des relations $x<y$ et $x \epsilon X$ (où X est un sous-ensemble variable de R) à l'aide des opérations: négation, somme logique et opérateur $\sum\limits_x$ (= „il existe un x tel que..."). On remplace, en effet, dans la définition de A, $x \prec y$ par $x<y$ et on restreind la variabilité de x, y, z etc. à X; $\boldsymbol{F}$ est la famille de tous les X qui satisfont à la condition ainsi obtenue.

[1]) Fund. Math. 25 et 26. Voir surtout, vol. 26, p. 301.

Considérons, par exemple, la définition d'ordre dense

$$\prod_{xy}[(x \mathrel{<?} y) \to \sum_z (x \mathrel{<?} z \mathrel{<?} y)].$$

A désignant la classe des types denses (dénombrables), la famille $\boldsymbol{F}$ est définie par l'équivalence

$$(X \in \boldsymbol{F}) \equiv \prod_{xy}[(x<y)\,(x \in X)\,(y \in X) \to \sum_z (x<z<y)\,(z \in X)].$$

La définition de $\boldsymbol{F}$, ainsi obtenue, sera transformée comme suit.

D'abord, comme les variables x, y, z etc. parcourent l'ensemble R, on peut les remplacer par r_i, r_j, r_k etc., en remplaçant, en même temps, l'opérateur $\sum\limits_x$ par $\sum\limits_i$, $\sum\limits_y$ par $\sum\limits_j$ etc. Remarquons, ensuite, qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-ensembles de R et les éléments de l'ensemble parfait C de Cantor; à savoir, étant donné un élément t de cet ensemble, $t=\frac{t^{(1)}}{3}+\frac{t^{(2)}}{9}+\frac{t^{(3)}}{27}+\dots$ ($t^{(i)}=0$ ou 2), on lui fait correspondre l'ensemble M_t composé de tous les r_i tels que $t^{(i)}=2$. Dans cette correspondance, à la famille $\boldsymbol{F}$ vient correspondre un sous-ensemble E de C, à savoir $E=\underset{t}{E}(M_t \in \boldsymbol{F})$ [1]), et la définition de E s'obtient de celle de $\boldsymbol{F}$ en remplaçant la relation „$r_i \in X$" par „$r_i \in M_t$", que l'on peut remplacer encore par „$t^{(i)}=2$".

En définitive, la définition de l'ensemble E s'obtient à partir des relations $r_i<r_j$ et $t^{(i)}=2$ à l'aide de la négation, de la somme logique et de l'opération dénombrable $\sum\limits_i$. On en conclut aussitôt (en vertu de la „dualité logico-mathématique" [2])) que l'ensemble E

1) On fait ainsi correspondre à chaque type d'ordre dénombrable un ensemble de points (contenu dans C). Cette „géométrisation" des types d'ordre dénombrable a été étudiée par moi d'un point de vue plus générale dans le vol. 28 des Fundamenta, p. 167 et ss.

2) Il s'agit des règles suivantes: $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\gamma(x,y)$ étant des fonctions propositionnelles, on a

$$\underset{x}{E}[\alpha(x)]'=[\underset{x}{E}\alpha(x)]', \quad \underset{x}{E}[\alpha(x)+\beta(x)]=\underset{x}{E}\alpha(x)+\underset{x}{E}\beta(x) \quad \text{et} \quad \underset{x}{E}\sum_y \gamma(x,y)=\sum_y \underset{x}{E}\gamma(x,y).$$

où les opérateurs $'$, $+$ et $\sum\limits_y$ ont, dans le membre gauche de ces formules, le sens logique et dans le membre droit le sens mathématique: l'accent $'$ désigne la négation resp. le complémentaire, le symbole $+$ la somme logique resp. mathématique et $\sum$ l'opérateur existentielle resp. la somme d'ensembles.

Cf. la note de M. Tarski et moi *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. 17 (1931), p. 240 ou bien ma *Topologie I*, Varsovie 1933, Introduction.

s'obtient des ensembles $C_i=\underset{t}{E}(t^{(i)}=2)$, $i=1, 2, \dots$, à l'aide de deux opérations: passage au complémentaire et somme finie ou dénombrable. L'ensemble C_i étant borelien [1]) (fermé et ouvert dans C), il en est de même de l'ensemble E.

Ainsi, par exemple, si A désigne, comme auparavant, la classe des types denses, il vient

$$(t \in E) \equiv \prod_{ij}[(r_i<r_j)\,(t^{(i)}=2=t^{(j)}) \to \sum_k (r_i<r_k<r_j)\,(t^{(k)}=2)]$$

d'où

$$E=\prod_{ij}{}^{*}\{[\underset{t}{E}(t^{(i)}=2=t^{(j)})]'+\sum_k{}^{*}\underset{t}{E}(t^{(k)}=2)\}=\prod_{ij}{}^{*}(C-C_i\cdot C_j+\sum_k{}^{*}C_k)$$

où la multiplication $\prod\limits_{ij}{}^{*}$ s'étend sur tous les couples ij tels que $r_i<r_j$ et la sommation $\sum\limits_k{}^{*}$ sur tous les k tels que $r_i<r_k<r_j$.

On constate aussitôt que E est un G_δ.

En résumé, on a le théorème suivant:

Théorème. *Si la classe A des types d'ordre se laisse définir à l'aide des variables élémentaires seules, l'ensemble E de tous les t tels que le type d'ordre de M_t appartient à A est borelien.*

D'après un théorème de la théorie des ensembles analytiques, l'ensemble des t tels que M_t est bien ordonné n'est pas borelien [2]). *Le bon ordre ne se laisse donc pas définir à l'aide des variables élémentaires seules.*

2. Considérons à présent les définitions qui s'obtiennent à l'aide des opérations logiques considérées auparavant (négation, somme logique, opérateur $\sum\limits_k$) ainsi que de l'opération suivante: *étant donnée une suite infinie de fonctions propositionnelles $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, on considère la fonction propositionnelle „il existe un n tel que $\varphi_n(x)$"*,

1) La famille des ensembles boreliens est, par définition, la plus petite famille qui contient tous les ensembles fermés et qui est close par rapport aux deux opérations: du passage au complémentaire et de la somme dénombrable.

2) Théorème de MM. Lusin et Sierpiński, C. R. Paris, t. 189 (1929), p. 794. Pour une simple démonstration, voir ce volume p. 57.

fonction propositionnelle que nous désignerons par le symbole $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ ou $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\dots$ [1]).

On constate aussitôt que $\underset{x}{E}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{x}{E}\varphi_n(x)$. En reprenant le raisonnement du N⁰ précédent, on en conclut qu'étant donnée une définition de A du genre considéré à présent, l'ensemble E qui vient lui correspondre est encore borelien. Il en résulte en particulier que *le bon ordre n'admet pas de définition de ce genre.*

Tandis que le type ω, par exemple, se laisse définir de cette façon, bien qu'il ne puisse être défini sans l'emploi de l'opération $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ [2]). Voici la définition du type ω

$$\prod_x\Big[\sum_y(x\lesssim y)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\Big]$$

où $\varphi_n(x)\equiv\sum_{y_1\dots y_n}\prod_z[(z\lesssim x)\to(z=y_1)+\dots+(z=y_n)]$.

Par conséquent:

$$(t\,\epsilon\,E)\equiv(\overline{M}_t=\omega)\equiv(t\neq0)\cdot\prod_i[(t^{(i)}=2)\to\sum_j(t^{(j)}=2)\,(r_i<r_j)\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t,i)],$$

où $\psi_n(t,i)\equiv\sum_{j_1\dots j_n}\{(t^{(j_1)}=\dots=t^{(j_n)}=2)\prod_k[(t^{(k)}=2)\,(r_k<r_i)\to(k=j_1)+\dots+(k=j_n)]\}$.

Il vient $E=(C-(0))\cdot\prod_i(C-C_i+\sum_j{}^{*}C_j\cdot\sum_n D_{n,i})$ où la sommation $\sum_j{}^{*}$ s'étend aux indices j tels que $r_i<r_j$ et où $D_{n,i}=\sum_{j_1\dots j_n}(C_{j_1}\cdot\ldots\cdot C_{j_n}-\sum_k{}^{\circ}C_k)$, la sommation $\sum_k{}^{\circ}$ s'étendant aux indices k distincts de tous les $j_1,\dots,j_n$ et tels que $r_k<r_i$.

---

[1]) Comme M. Tarski a remarqué, cette opération peut être introduite de la façon suivante: on postule qu'à chaque suite infinie de fonctions propositionnelles $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots$ correspond une fonction propositionnelle $\psi(x,n)$ de deux variables (dont la deuxième est un entier positif variable) qui pour chaque n équivaut à $\varphi_n(x)$ et on définit l'opération $\sum_{n=1}^{\infty}$ par l'équivalence $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\equiv\sum_n\psi(x,n)$. Voir à ce propos A. Tarski *La notion de vérité dans les langages des sciences déductives*, Travaux de la Soc. des Sc. de Varsovie 1933, p. 110.

Ajoutons que la variable x peut être remplacée par un système fini (fixe) de variables $x,y,\dots z$.

[2]) D'après un théorème de M. Tarski. Voir Fund. Math. 26, p. 300.

Sur les espaces multicohérents II [1]).

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Table des matières.

§ 1. Transformations à petites tranches.

Une transformation $g\,\epsilon\,Y^X$ s'appelle *ε-transformation*, lorsque $X\subset Y$ et $|x-g(x)|<\varepsilon$ pour tout $x\,\epsilon\,X$. On dit que la propriété (α) est un *invariant de petites transformations*, lorsque, pour chaque espace Y et chaque ensemble $X\subset Y$ qui jouit de la propriété (α), il existe un $\varepsilon>0$ tel que, quelle que soit la ε-transformation $g\,\epsilon\,Y^X$, l'ensemble $g(X)\subset Y$ jouit aussi de la propriété (α).

Une transformation continue g d'un espace X s'appelle *transformation à ε-tranches*, lorsque $d[g^{-1}(y)]<\varepsilon$ pour tout $y\,\epsilon\,f(X)$. On dit que la propriété (α) est *invariante par rapport aux transformations à petites tranches*, lorsque, pour chaque X ayant la propriété (α), il existe un $\varepsilon>0$ tel que, quelle que soit la transformation g de X à ε-tranches, l'espace $g(X)$ jouit aussi de la propriété (α).

Evidemment, chaque propriété invariante par rapport aux transformations à petites tranches l'est aussi par rapport aux petites transformations. Il est démontré [2]) que, pour les espaces X compacts

---

[1]) Cf. S. Eilenberg, *Sur les espaces multicohérents I*, Fund. Math. 27 (1936), p. 153—190. Cet article sera cité dans la suite comme M_1.

[2]) S. Eilenberg, C. R. Paris 200 (1935), p. 1003.