A. Khintchine, [1] *Sur la loi des grands nombres*, C. R. 188 (1929), 477—480.

J. Khintchine und A. Kolmogoroff, [1] *Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden*, Récueil de la Soc. Math. de Moscou, 32 (1925), 668—677.

A. Kolmogoroff, [1] *Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen*, Math. Annalen 99 (1928), 309—319.

— [2] *Sur la loi forte des grands nombres*, C. R. 191 (1930), 910—911.

— [3] *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933.

— [4] *Zur Plessnerschen Bedingung*, Recueil Math. 1 (1936), 847—848.

R. E. A. C. Paley, [1] *A remarkable system of orthogonal functions*, Proc. London Math. Soc. 34 (1932), 241—279.

R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, [1] *On some series of functions* (1), Proc. Cambridge Phil. Society, 26 (1930), 337—357; (2), ibid. 26 (1930), 458—474; (3), ibid. 28 (1932), 190—205.

A. Plessner, [1] *Über das Gesetz der Grossen Zahlen*, Récueil Mathématique, 1 (1936).

S. Saks, *Théorie de l'intégrale* (Monografie Matematyczne III) Warszawa, 1933.

H. Steinhaus, [1] *Sur la probabilité de la convergence de séries*, Studia Math. 2 (1930), 21—39.

— [2] *Courbe de Peano et les fonctions indépendantes*, C. R. 202 (1936), 1961—1963.

J. L. Walsh, [1] *A closed set of normal orthogonal functions*, American Journal of Math., 55 (1923), 5—24.

A. Zygmund, [1] *Trigonometrical Series* (Monografie Matematyczne V), Warszawa—Lwów 1935.

— [2] *Sur certaines séries de fonctions* (en polonais), Mathesis Polska, 8 (1933), 76—87.

Wilno, 15. II. 1937.

Sur le rapport de la propriété (C) à la théorie générale des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Par une application de l'ensemble de M. Lusin (dont l'existence a été démontrée par lui à l'aide de l'hypothèse du continu), j'ai résolu [1]) un problème de M. E. Szpilrajn, en démontrant qu'il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu et qui jouit de la propriété (C) suivante:

(C) *Pour chaque suite infinie de nombres réels positifs* $a_1, a_2, a_3, \dots$ *donnée d'avance, l'ensemble* N *peut être couvert par une suite infinie d'intervalles* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots,$ *tels que la longueur de l'intervalle* δ_n *est égale à* a_n *pour* $n=1, 2, 3, \dots$

Les ensembles jouissant de la propriété (C) coïncident avec ceux que M. E. Borel appelle „ensembles qui ont une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance" (Bull. Soc. Math. de France 47, 1919, p. 123) [2]).

---

[1]) Fund. Math. 11 (1928), p. 304.

[2]) La propriété (C) a été traitée en outre dans les travaux suivants:
A. S. Besicovitch, Acta Mathematica 62 (1934), p. 289.
S. Mazurkiewicz et E. Szpilrajn, Fund. Math. 28 (1937), p. 308.
W. Sierpiński, Fund. Math. 11 (1928), p. 302.
— C. R. Soc. Sc. Varsovie 27 (1934), p. 1.
— Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (2) 4 (1935), p. 43.
— C. R. Soc. Sc. Varsovie 28 (1935), p. 134.
— Fund. Math. 24 (1935), p. 48.
— Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935), p. 223.
E. Szpilrajn, Fund. Math. 15 (1930), p. 126.
— C. R. Soc. Sc. Varsovie 22 (1929), p. 179.
— Fund. Math. 22 (1934), p. 303.
— Fund. Math. 24 (1935), p. 17.
Cf. aussi:
C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem. III, Warszawa-Lwów 1933, p. 274.
W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monogr. Matem. IV, Warszawa-Lwów 1934, pp. 37—38, 49 et 68.

Le but de cette Note est de démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que le théorème *métrique* de l'existence d'ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$ à propriété (C) équivaut à un énoncé de la Théorie générale des ensembles [1]). Je vais démontrer notamment ce

Théorème. *L'existence d'un ensemble linéaire de puissance du continu à propriété* (C) *équivaut à l'existence d'un ensemble* E *de puissance du continu* (formé d'éléments quelconques) *et d'un système* $\{E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\}$ *d'ensembles correspondant à toutes les suites finies* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *formées de nombres* 0 *et* 1 *de manière que les conditions suivantes soient remplies:*

1⁰ *On a*

$$E = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \quad \textit{pour} \quad k=1, 2, 3, \ldots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *de* k *nombres* 0 *ou* 1;

2⁰ *quelle que soit la suite finie* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *de nombres* 0 *et* 1, *on a*

$$E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0} + E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1} \subset E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k};$$

3⁰ *si, pour un* k *naturel, les suites* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *et* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *formées de nombres* 0 *et* 1 *sont distinctes, on a*

$$E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} E_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k} = 0;$$

4⁰ *quelle que soit la suite infinie* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *formée de nombres* 0 *et* 1, *l'ensemble*

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$$

contient au plus un élément;

5⁰ *pour toute suite infinie de nombres naturels* $n_1, n_2, n_3, \ldots$, *il existe une suite infinie de suites finies* $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_{n_i}^i$ *formées de nombres* 0 *et* 1, *telle que*

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\alpha_1^i\alpha_2^i\ldots\alpha_{n_i}^i}.$$

---

[1]) Dans le même ordre d'idées cf. C. Kuratowski, *Fund. Math.* **22**, p. 315—318, où se trouve la démonstration que le théorème *topologique* de M. Lusin équivaut à un énoncé de la Théorie générale des ensembles.

Démonstration. I. Soit N un ensemble linéaire de puissance du continu et jouissant de la propriété (C). Nous pouvons le supposer situé dans l'intervalle $(0,1)$. Soit E l'ensemble de tous les nombres irrationnels appartenant à N. L'ensemble E est encore de puissance du continu et jouit de la propriété (C). Désignons, pour tout système fini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de nombres 0 et 1, par $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ la partie de l'ensemble E située dans l'intervalle

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^k}\right).$$

On voit sans peine que le système d'ensembles $\{E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\}$ jouit des propriétés 1⁰, 2⁰, 3⁰ et 4⁰. Pour montrer qu'il jouit également de la propriété 5⁰, considérons une suite infinie quelconque $n_1, n_2, n_3, \ldots$ de nombres naturels et posons pour abréger

$$(1) \qquad s_p = n_{2p-1} + n_{2p} \quad \text{pour} \quad p=1, 2, 3, \ldots$$

L'ensemble E jouissant de la propriété (C), il existe une suite infinie d'intervalles $\delta_p = (a_p, b_p)$ $(p=1, 2, 3, \ldots)$, telle que

$$(2) \qquad E \subset \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$$

et que

$$(3) \qquad b_p - a_p < \frac{1}{2^{s_p}} \quad \text{pour} \quad p=1, 2, 3, \ldots.$$

Etant donné un p naturel quelconque, divisons l'intervalle $(0,1)$ en 2^{s_p} parties égales. D'après (3), tout au plus deux de ces parties ont des points communs avec δ_p et il en existe deux parties consécutives de ce genre. Soient

$$(4) \qquad \left(\frac{t_p}{2^{s_p}}, \frac{t_p+1}{2^{s_p}}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{t_p+1}{2^{s_p}}, \frac{t_p+2}{2^{s_p}}\right)$$

(où t_p est un entier et $0 \leqslant t_p \leqslant 2^{s_p}-2$) les intervalles dont la somme contient l'intervalle δ_p.

Il existe évidemment deux suites de 2^{s_p} nombres 0 et 1:

$$\alpha_1^{2p-1}, \alpha_2^{2p-1}, \ldots, \alpha_{2^{s_p}}^{2p-1} \quad \text{et} \quad \alpha_1^{2p}, \alpha_2^{2p}, \ldots, \alpha_{2^{s_p}}^{2p},$$

telles que

$$\frac{t_p}{2^{s_p}} = \sum_{i=1}^{s_p} \frac{\alpha_i^{2p-1}}{2^i} \quad \text{et} \quad \frac{t_p+1}{2^{s_p}} = \sum_{i=1}^{s_p} \frac{\alpha_i^{2p}}{2^i}.$$

La somme des intervalles (4) contenant l'intervalle δ_p, on aura, vu la définition des ensembles $E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$,

$$(5) \qquad E\delta_p \subset E_{\alpha_1^{2p-1}\alpha_2^{2p-1}\dots\alpha_{s_p}^{2p-1}} + E_{\alpha_1^{2p}\alpha_2^{2p}\dots\alpha_{s_p}^{2p}}.$$

Or, d'après (1) on a $s_p > n_{2p-1}$ et $s_p > n_{2p}$; d'après 2⁰ on a donc

$$E_{\alpha_1^{2p-1}\alpha_2^{2p-1}\dots\alpha_{s_p}^{2p-1}} \subset E_{\alpha_1^{2p-1}\alpha_2^{2p-1}\dots\alpha_{n_{2p-1}}^{2p-1}} \quad \text{et} \quad E_{\alpha_1^{2p}\alpha_2^{2p}\dots\alpha_{s_p}^{2p}} \subset E_{\alpha_1^{2p}\alpha_2^{2p}\dots\alpha_{n_{2p}}^{2p}},$$

donc, d'après (5):

$$E\delta_p \subset E_{\alpha_1^{2p-1}\alpha_2^{2p-1}\dots\alpha_{n_{2p-1}}^{2p-1}} + E_{\alpha_1^{2p}\alpha_2^{2p}\dots\alpha_{n_{2p}}^{2p}},$$

d'où, d'après (2):

$$E \subset \sum_{i=1}^{\infty} E_{\alpha_1^i\alpha_2^i\dots\alpha_{n_i}^i}.$$

Les ensembles du système $\{E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\}$ étant contenus dans E, il en résulte que ce système jouit de la propriété 5⁰, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que l'existence d'un ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ jouissant de la propriété (C) entraîne l'existence d'un ensemble E de puissance $2^{\aleph_0}$ et d'un système d'ensembles $\{E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\}$ jouissant des propriétés 1⁰—5⁰.

II. Soit maintenant E un ensemble de puissance du continu (formé d'éléments quelconques) et soit $\{E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\}$ un système d'ensembles jouissant des propriétés 1⁰—5⁰.

Soit N l'ensemble de tous les nombres

$$(6) \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i},$$

tels que

$$(7) \qquad \prod_{i=1}^{\infty} E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} \neq 0.$$

L'ensemble E étant de puissance du continu, il résulte sans peine de 1⁰, 2⁰, 3⁰ et 4⁰ que l'ensemble N est également de puissance du continu.

Je dis que l'ensemble N jouit de la propriété (C). En effet, soit $a_1, a_2, a_3, \dots$ une suite infinie quelconque de nombres réels positifs.

Il existe évidemment pour tout p naturel un nombre naturel n_p, tel que

$$(8) \qquad \frac{1}{2^{n_p}} < a_p.$$

D'après 5⁰, il existe une suite infinie de suites finies $\alpha_1^p, \alpha_2^p, \dots, \alpha_{n_p}^p$ $(p=1, 2, 3, \dots)$, telle que

$$(9) \qquad E = \sum_{p=1}^{\infty} E_{\alpha_1^p\alpha_2^p\dots\alpha_{n_p}^p}.$$

Désignons, pour $p=1, 2, 3, \dots$, par δ_p l'intervalle

$$(10) \qquad \delta_p = \left(\sum_{i=1}^{n_p} \frac{\alpha_i^p}{2^i},\ \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\alpha_i^p}{2^i} + \frac{1}{2^{n_p}}\right).$$

L'intervalle δ_p est, d'après (8), de longueur $\frac{1}{2^{n_p}} < a_p$. Or, on a

$$(11) \qquad N \subset \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p.$$

En effet, si $x \in N$, il existe une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ de nombres 0 et 1, telle qu'on a les formules (6) et (7). D'après (7), 1⁰ et 4⁰, il existe un et un seul élément q de E tel que

$$(12) \qquad q \in E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} \quad \text{pour} \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Or, d'après $q \in E$ et (9), il existe un nombre naturel s tel que

$$(13) \qquad q \in E_{\alpha_1^s\alpha_2^s\dots\alpha_{n_s}^s}.$$

La formule (12) donne (pour $k=n_s$):

$$(14) \qquad q \in E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_s}}.$$

D'après 3⁰, les formules (13) et (14) donnent

$$(15) \qquad \alpha_i^s = \alpha_i \quad \text{pour} \quad i=1, 2, \dots, n_s.$$

Or, d'après (6), on a

$$\sum_{i=1}^{n_s} \frac{\alpha_i}{2^i} \leqslant x \leqslant \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n_s}},$$

donc d'après (15)

$$\sum_{i=1}^{n_s} \frac{a_i^s}{2^i} \leqslant x \leqslant \sum_{i=1}^{n_s} \frac{a_i^s}{2^i} + \frac{1}{2^{n_s}},$$

ce qui entraîne selon (10) que $x \epsilon \delta_s$, et à plus forte raison que $x \epsilon \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p$.

On a donc la formule (11). Par conséquent l'ensemble N jouit de la propriété (C).

Notre théorème est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on peut, dans notre théorème, remplacer partout les mots „de puissance du continu" par „indénombrable" (sans en altérer la démonstration).

Les types d'ordre définissables et les ensembles boreliens.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dans son Mémoire „*Grundzüge des Systemenkalküls*"[1]), M. Tarski a envisagé plusieurs exemples de types d'ordre dénombrable (respectivement de classes de tels types) qui ne se laissent pas définir à l'aide des variables élémentaires seules (c. à d. sans l'emploi des variables-ensembles). Telle est, en particulier, la classe des nombres ordinaux (= des types du bon ordre).

Ce dernier résultat va être obtenu ici sur une voie tout-à-fait différente de celle dont s'est servi M. Tarski. La théorie des ensembles analytiques permet, en effet, d'établir un théorème général dont cet énoncé n'est qu'un cas particulier. De plus, on en conclura que, pour définir le bon ordre, les variables élémentaires ne suffisent pas, non seulement en nombre fini, mais même en une infinité dénombrable (dans un sens qui va être précisé plus loin).

1. Soit R l'ensemble de tous les nombres rationnels de l'intervalle 01. Rangeons le en une suite $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ à termes distincts.

Chaque type d'ordre dénombrable étant le type d'un sous-ensemble de R (rangé selon la relation $x<y$), le problème de la définissabilité d'une classe A de types d'ordre dénombrable se réduit à celui de définir la famille $\boldsymbol{F}$ des sous-ensembles de R qui ont le type d'ordre appartenant à A. Admettons que la classe A se laisse définir à l'aide des variables élémentaires; la définition de $\boldsymbol{F}$ s'obtient alors des relations $x<y$ et $x \epsilon X$ (où X est un sous-ensemble variable de R) à l'aide des opérations: négation, somme logique et opérateur $\sum_x$ (= „il existe un x tel que..."). On remplace, en effet, dans la définition de A, $x \prec y$ par $x<y$ et on restreind la variabilité de x, y, z etc. à X; $\boldsymbol{F}$ est la famille de tous les X qui satisfont à la condition ainsi obtenue.

[1]) Fund. Math. 25 et 26. Voir surtout, vol. 26, p. 301.