Sur une décomposition effective d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. H. Lebesgue a donné, comme on sait, une décomposition effective de l'intervalle $(0,1)$ en $\aleph_1$ ensembles disjoints non vides [1]). La démonstration de M. Lebesgue utilise le théorème de G. Cantor, d'après lequel tout ensemble ordonné dénombrable est semblable à un ensemble de nombres rationnels ordonnés selon leur grandeur.

Le but de cette Note est de donner une décomposition effective de l'intervalle en $\aleph_1$ ensembles disjoints non vides, basée sur une autre idée et qui se prête à une généralisation aux ensembles de puissances supérieures. Le théorème général, impliquant l'existence de cette décomposition, ne sera d'ailleurs qu'autre forme d'une proposition de M. A. Tarski, signalée sans démonstration dans la *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles* de MM. A. Lindenbaum et A. Tarski [2]).

Soit M un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$. Désignons par F la famille de toutes les fonctions $f(m, n)$ définies pour $m \epsilon M$ et $n \epsilon M$ et ne prenant que les valeurs 0 et 1.

Nous dirons que l'ensemble M est *ordonné par la fonction* $f \epsilon F$, si la relation R définie comme il suit l'ordonne: mRn dans ce cas et dans ce cas seulement, si $f(m, n)=1$.

Admettons qu'il existe au moins un ensemble bien ordonné de puissance $\mathfrak{m}$. Comme on sait, on peut alors démontrer sans utiliser

---

[1]) *Journ. de Math.* t. I (1905), p. 213; cf. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 209.

[2]) *C. R. Soc. Sciences Varsovie* XIX (1926), Classe III, p. 311, Th. 81. Voici cette proposition: *a étant un nombre ordinal arbitraire*, $\aleph_{\alpha+1} \leqslant^* 2^{\aleph_\alpha}$. D'après la notation de M. Tarski, la formule $\mathfrak{m} \leqslant^* \mathfrak{n}$ exprime que $\mathfrak{m}=0$ ou bien que chaque ensemble de puissance $\mathfrak{n}$ peut être décomposé en $\mathfrak{m}$ ensembles non vides et disjoints (ou encore — ce qui revient au même — qu'il peut être transformé d'une façon univoque en un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$).

l'axiome du choix que l'ensemble $Z(\mathfrak{m})$ de tous les nombres ordinaux de puissance $\mathfrak{m}$ a une puissance $>\mathfrak{m}$.

Si α est un nombre ordinal, $\alpha \in Z(\mathfrak{m})$, il existe évidemment un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ bien ordonné du type α et, comme $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$, il existe une fonction f de la famille F par laquelle l'ensemble M est bien ordonné en type α. Désignons par F_α la famille de toutes les fonctions $f \in F$ de ce genre. On a donc $F_\alpha \neq 0$ pour $\alpha \in Z(\mathfrak{m})$ et, évidemment, $F_\alpha F_\beta = 0$ pour $\alpha \neq \beta$. Posons encore $F_0 = F - \sum_{\alpha \in Z(\mathfrak{m})} F_\alpha$. On voit sans peine que $F_0 \neq 0$, puisqu'il existe des fonctions de la famille F par lesquelles l'ensemble M n'est pas bien ordonné.

On a ainsi la décomposition effective

$$F = F_0 + \sum_{\alpha \in Z(\mathfrak{m})} F_\alpha \tag{1}$$

de l'ensemble F en $>\mathfrak{m}$ ensembles disjoints non vides et, s'il existe au moins un ensemble bien ordonné de puissance $\mathfrak{m}$, la démonstration que la série (1) contient plus que $\mathfrak{m}$ termes non vides n'exige pas l'axiome du choix.

Nous obtenons ainsi ce

Théorème[1]). *Si M est un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$, l'ensemble F de toutes les fonctions $f(m, n)$ définies pour $m \in M$ et $n \in M$ et ne prenant que les valeurs 0 et 1 peut être décomposé effectivement en une série bien ordonnée de puissance $>\mathfrak{m}$ d'ensembles disjoints non vides. En outre, si l'on sait démontrer sans faire appel à l'axiome du choix l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance $\mathfrak{m}$, la démonstration que cette série contient plus que $\mathfrak{m}$ termes non vides s'achève également sans utiliser cet axiome.*

Nous examinerons maintenant de plus près deux cas particuliers de ce théorème.

I. Soit M l'ensemble de tous les nombres naturels. x étant un nombre réel de l'intervalle $X=[0<x\leqslant 1]$, désignons par

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{2^k}$$

[1]) Cf. A. Lindenbaum et A. Tarski, l. c., Th. 80 ($\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant^* 2^{\mathfrak{m}^2}$).

son développement en fraction dyadique essentiellement infinie. Posons pour m et n naturels

$$f_x(m, n) = a_{2^{m-1}(2n-1)}(x)$$

et pour $\omega \leqslant \alpha < \Omega$

$$X_\alpha = \underset{x}{E}[x \in X,\ f_x \in F_\alpha].$$

Les ensembles $X_\alpha (\omega \leqslant \alpha < \Omega)$ sont évidemment non vides et, en posant $X_0 = X - \sum_{\omega \leqslant \alpha < \Omega} X_\alpha$, on obtient la décomposition

$$X = X_0 + \sum_{\omega \leqslant \alpha < \Omega} X_\alpha \tag{2}$$

de l'ensemble X en $\aleph_1$ ensembles disjoints non vides. Donc:

On peut décomposer effectivement, sans utiliser l'axiome du choix, l'intervalle $0<x\leqslant 1$ en $\aleph_1$ ensembles non vides disjoints.

Une première décomposition de ce genre (définie d'ailleurs d'une façon différente) a été donnée, comme nous avons dit plus haut, par M. H. Lebesgue. Comme l'a démontré M. Lusin, tous les termes de la décomposition de M. Lebesgue, sauf le premier, sont des ensembles mesurables B et le premier terme est un ensemble analytique non mesurable B. M. Kuratowski a démontré[1]) qu'il en est de même de notre décomposition (2).

II. Soit M l'ensemble de tous les nombres réels. Il résulte de notre théorème qu'on peut alors décomposer effectivement la famille F de toutes les fonctions de deux variables réelles ne prenant que les valeurs 0 et 1 en une série bien ordonnée de puissance $\aleph > 2^{\aleph_0}$ d'ensembles disjoints non vides. Puisqu'on a évidemment $\aleph \geqslant \aleph_2$, il en résulte qu'*on peut décomposer effectivement la famille F en $\aleph_2$ ensembles disjoints non vides*. C'est la proposition que j'ai démontrée dans *Fund. Math.* V, p. 1. Or, cette démonstration fait appel à l'axiome du choix, puisque nous ne savons pas démontrer sans cet axiome l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu.

Cependant, je vais démontrer *sans admettre l'axiome du choix* l'existence d'une décomposition de la famille F en $\aleph_2$ ensembles disjoints non vides.

Partons à ce but de la décomposition (2). Soit α un nombre ordinal de la troisième classe de Cantor, c. à d. $\Omega \leqslant \alpha < \omega_2$ et $\overline{\alpha} = \aleph_1$. Nous dirons que la fonction f de la famille F appartient à l'en-

[1]) dans une Note qui va paraître dans ce volume.

semble Φ_α, si en posant pour $\xi<\Omega$ et $\eta<\Omega$:

$$\varphi(\xi,\eta)=\begin{cases} 1, & \text{lorsque } f(x,y)=1 \text{ où } x \in X_{\omega+\xi} \text{ et } y \in X_{\omega+\eta}, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$ est bien ordonné en type α par la fonction φ.

En posant encore $\Phi_0=F-\sum_{\Omega\leqslant\alpha<\omega_2}\Phi_\alpha$, on a alors la décomposition effective de la famille F:

$$F=\Phi_0+\sum_{\Omega\leqslant\alpha<\omega_2}\Phi_\alpha \tag{3}$$

en $\aleph_2$ ensembles disjoints non vides, et la démonstration de l'existence de cette décomposition n'a pas recours à l'axiome du choix.

En effet, soit α un nombre ordinal, tel que $\Omega\leqslant\alpha<\omega_2$. On a donc $\bar{\alpha}=\aleph_1$ et il existe une fonction $\varphi(\xi,\eta)$ définie pour $\xi<\Omega$ et $\eta<\Omega$ et par laquelle l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$ est bien ordonné en type α. Définissons maintenant la fonction $f(x,y)$ de deux variables réelles comme il suit. Si $x \in X-X_0$ et $y \in X-X_0$, il existe, d'après (2), deux nombres ordinaux bien déterminés (par x et y) $\xi<\Omega$ et $\eta<\Omega$, tels que $x \in X_{\omega+\xi}$ et $y \in X_{\omega+\eta}$; si l'on a encore $\varphi(\xi,\eta)=1$, posons $f(x,y)=1$. Dans tous les autres cas, posons $f(x,y)=0$. Il résulte aussitôt de la définition de la famille Φ_α que $f \in \Phi_\alpha$. Il est ainsi établi sans l'axiome du choix que $\Phi_\alpha\neq 0$ pour $\Omega\leqslant\alpha<\omega_2$, c. q. f. d.

Remarque. A tout sous-ensemble T de l'ensemble $Q=\underset{\alpha}{E}[\Omega\leqslant\alpha<\omega_2]$ correspond un sous-ensemble $S(T)=\sum_{\alpha\in T}\Phi_\alpha$ de l'ensemble F et (les termes de la série (3) étant disjoints) on a $S(T_1)\neq S(T_2)$ pour $T_1\neq T_2$. Il en résulte que $2^{\overline{\overline{Q}}}\leqslant 2^{\overline{\overline{F}}}$, donc, comme $\overline{\overline{Q}}=\aleph_2$ et $\overline{\overline{F}}=2^{2^{\aleph_0}}$, que $2^{\aleph_2}\leqslant 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, d'où $\aleph_2<2^{2^{2^{\aleph_0}}}$. Cette inégalité peut donc être démontrée sans faire appel à l'axiome du choix. Il est à remarquer qu'on peut aussi démontrer sans faire appel à cet axiome l'inégalité $\aleph_2<2^{2^{\aleph_1}}$ et, d'après M. Tarski (l. c., th. 81), même l'inégalité $2^{\aleph_{\alpha+1}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ où α est un nombre ordinal arbitraire.

Sur un problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations.

Par

Sophie Piccard (Neuchâtel).

M. S. Ruziewicz a posé récemment [1]) le problème suivant:

E étant un ensemble de puissance $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal $<\mathfrak{m}$ et R une relation entre les éléments de l'ensemble E, telle qu'il existe, pour tout élément x de E, moins que $\mathfrak{n}$ éléments y de E pour lesquels on a xRy, existe-t-il toujours un sous-ensemble H de E de puissance $\mathfrak{m}$ et dont aucun couple d'éléments distincts n'est lié par la relation R? (c. à d. un $H\subset E$ tel qu'on n'a ni xRy ni yRx pour $x \in H$ et $y \in H$)[2]).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *La réponse au problème de M. Ruziewicz est affirmative pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}$ régulier* (c. à d. qui n'est pas une somme de $<\mathfrak{m}$ nombres cardinaux $<\mathfrak{m}$) [3]).

Démonstration. Posons pour $x \in E$:

$$V(x)=\underset{y}{E}[y \in E,\ xRy], \tag{1}$$

$$Z(x)=\underset{y}{E}[y \in E,\ yRx]. \tag{2}$$

---

[1]) Publ. Math. Univ. Belgrade V, p. 5.

[2]) Pour $\mathfrak{n}=\aleph_0$ on en obtient le problème de M. Sierpiński (*Fund. Math.* 28, p. 71) que j'ai résolu affirmativement pour tous les nombres cardinaux $\mathfrak{m}>\aleph_0$ dans *Fund. Math.* 28, p. 197.

[3]) Pour $\mathfrak{n}=\aleph_0$ on en obtient le théorème de M. Sierpiński, *Fund. Math.* t. 28, p. 73, Th. 3.