qu'en désignant par E_1 l'ensemble de tous les nombres réels positifs et par E_2 celui des autres nombres réels, on ait

$$(11) \qquad f(E_1)=H_1 \qquad \text{et} \qquad f(E_2)=CH_1.$$

Soit maintenant $g(x)$ la fonction égale à 1 pour $x>0$ et à 0 pour $x\leqslant 0$; c'est aussi une fonction de I-re classe. La fonction $f(x)$ étant à valeurs distinctes, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont évidemment à la condition (2) du théorème I.

Soit enfin $\varphi(x)$ une fonction quelconque de variable réelle assujettie à l'égalité (1). On voit sans peine que

$$(12) \qquad \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\varphi(x)>0]=H_1.$$

En effet, si $x\,\epsilon\,H_1$, il existe d'après (11) un nombre t de E_1 tel que $x=f(t)$ et, d'après la définition de la fonction g, on a $g(t)=1$, d'où selon (1) $\varphi(x)=\varphi(f(t))=g(t)=1>0$. D'autre part, si $x\,\epsilon\,CH_1$, il existe, d'après (11), un nombre t de E_2 tel que $x=f(t)$ et on a $g(t)=0$, $\varphi(x)=\varphi(f(t))=g(t)=0$.

L'ensemble H_1 étant de classe α additive, il résulte de (12) que la fonction $\varphi(x)$ ne peut pas être de classe $<\alpha$. Le théorème IV est ainsi démontré.

Théorème V. *Si deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de variable réelle assujetties à la condition* (2) *sont mesurables, il peut ne pas y avoir une fonction de variable réelle $\varphi(x)$ mesurable et satisfaisant à l'égalité* (1).

D é m o n s t r a t i o n. Soient: E_1 et E_2 deux ensembles linéaires disjoints de puissance du continu et de mesure nulle, H_1 un ensemble linéaire de puissance du continu ainsi que CH_1, non mesurable et ne contenant pas le nombre 0, enfin $f(x)$ une fonction qui transforme E_1 en H_1 et E_2 en $H_2=CH_1$ d'une façon biunivoque et qui est nulle en dehors de E_1+E_2. La fonction $f(x)$ est évidemment mesurable. Soit maintenant $g(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_1. On voit sans peine que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont à la condition (2) du théorème I.

Or, soit $\varphi(x)$ une fonction de variable réelle, assujettie à l'égalité (1). Tout comme dans la démonstration du théorème IV, on établit la formule (12). L'ensemble H_1 étant non mesurable, cette formule prouve qu'il en est de même de la fonction $\varphi(x)$. Le théorème V est ainsi démontré.

Sur un problème de la théorie des relations.

Par

W. S i e r p i ń s k i (Varsovie).

Un théorème de M. D. L á z á r [1]) m'a suggeré le problème $\boldsymbol{P}$ suivant:

P. *Soit E un ensemble indénombrable donné quelconque et R une relation entre les éléments de E, telle que pour tout élément donné x de E le nombre des éléments y de E pour lesquels on a xRy est fini (ou nul). Existe-t-il toujours un sous-ensemble E_1 de E de même puissance que E et tel que x et y étant deux éléments distincts de E_1, on n'ait jamais xRy?* [2])

Il résulte du théorème de M. L á z á r que la réponse au problème $\boldsymbol{P}$ est positive, si $\overline{\overline{E}}=2^{\aleph_0}$. Je vais prouver ici ce

Théorème 1. *La réponse au problème $\boldsymbol{P}$ est positive si $\overline{\overline{E}}=2^{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal quelconque $\geqslant\aleph_0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Comme j'ai démontré ailleurs [3]), si $\overline{\overline{E}}\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, il existe une famille Φ de puissance $\leqslant\mathfrak{m}$ de sous-ensembles de E, telle que pour deux éléments distincts p et q de E il y a toujours dans la famille Φ deux ensembles disjoints dont l'un contient p et l'autre q.

Soit Ψ la famille de tous les produits finis d'ensembles de la famille Φ. On a évidemment $\overline{\overline{\Psi}}\leqslant\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2+\mathfrak{m}^3+\ldots=\mathfrak{m}$, donc $\overline{\overline{\Psi}}\leqslant\mathfrak{m}$.

---

[1]) *Compos. Math.* t. 3, p. 304.

[2]) La solution complète de ce problème a été donnée récemment par M-lle Sophie P i c c a r d et va paraître dans ce volume.

[3]) W. S i e r p i ń s k i, *Sur la séparabilité généralisée*, Fund. Math. t. XXVII, p. 70.

Soit maintenant R une relation satisfaisant aux conditions du problème $\boldsymbol{P}$. Soit x un élément donné de E. Le nombre des éléments y de E tels que xRy et $y\neq x$ étant donc fini (ou nul), soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ces éléments (si leur nombre est nul, soit y_1 un élément quelconque de E distinct de x). D'après la définition de la famille Φ, il existe pour $i=1, 2, \ldots, n$ un ensemble Q_i de Φ tel que $x \,\epsilon\, Q_i$ et y_i non $\epsilon\, Q_i$. Posons $Q=Q_1\cdot Q_2\cdot\ldots\cdot Q_n$. C'est évidemment un ensemble de la famille Ψ et on aura $x\,\epsilon\, Q$ et y_i non $\epsilon\, Q$ pour $i=1, 2, \ldots, n$. Il existe ainsi pour tout élément x de E (au moins) un ensemble $Q=Q(x)$ de la famille Ψ tel que $x\,\epsilon\, Q(x)$ et x non Ry pour tout élément y de $Q(x)$ distinct de x.

Divisons les éléments de E en classes (disjointes), en rangeant deux éléments x et x' de E en une même classe dans le cas et dans ce cas seulement, si $Q(x)=Q(x')$. La puissance de la famille de ces classes est évidemment $\leqslant\mathfrak{m}$.

Si la puissance de chacune de ces classes était $<2^{\mathfrak{m}}$, l'ensemble E serait une somme de $\leqslant\mathfrak{m}$ sous-ensembles, dont chacun est de puissance $<2^{\mathfrak{m}}$ et (vu que $\overline{\overline{E}}=2^{\mathfrak{m}}$) le nombre cardinal $2^{\mathfrak{m}}$ serait une somme de $\leqslant\mathfrak{m}$ nombres cardinaux, dont chacun est $<2^{\mathfrak{m}}$. Or c'est incompatible, comme nous allons voir, avec un théorème de M. E. Zermelo[1]).

En effet, Z étant un ensemble de puissance $\leqslant\mathfrak{m}$ de nombres cardinaux, dont chacun est $<2^{\mathfrak{m}}$, on a pour chaque nombre $\mathfrak{n}$ de Z l'inégalité $\mathfrak{n}<2^{\mathfrak{m}}$, d'où, selon le théorème cité de M. Zermelo, $\Sigma\,\mathfrak{n}<\Pi\, 2^{\mathfrak{m}}$, les opérations Σ et Π s'étendant sur tous les éléments de Z.

Comme $\overline{\overline{Z}}\leqslant\mathfrak{m}$, on en conclut que $\Sigma\,\mathfrak{n}<(2^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}^2}=2^{\mathfrak{m}}$.

En particulier, il existe donc au moins une de nos classes qui est de puissance $2^{\mathfrak{m}}$. En d'autres termes, il existe (au moins) un ensemble Q_0 de la famille Ψ tel que l'ensemble E_1 de tous les éléments x de E pour lesquels on a $Q(x)=Q_0$ est de puissance $2^{\mathfrak{m}}$.

Soient maintenant x et y deux éléments distincts de l'ensemble E_1. On a donc $Q(x)=Q(y)=Q_0$. Or, il résulte de la définition de l'ensemble $Q(x)$ que $x\,\epsilon\, Q(x)$ et, pareillement, que $y\,\epsilon\, Q(y)$. Comme $Q(x)=Q(y)$, on a donc aussi $y\,\epsilon\, Q(x)$ et $x\,\epsilon\, Q(y)$, d'où, vu que $x\neq y$ et tenant compte de la définition des ensembles $Q(x)$ et $Q(y)$,

$$x \text{ non } R\,y \qquad \text{et} \qquad y \text{ non } R\,x.$$

[1]) *Math. Annalen* t. 65, p. 277; cf. aussi W. Sierpiński, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 136.

L'ensemble E_1 satisfait donc aux conditions du problème $\boldsymbol{P}$ et le théorème 1 se trouve démontré.

On remarquera qu'une légère modification de la démonstration donne sans peine ce

Théorème 2. *Si* $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, $\overline{\overline{E}}=\mathfrak{n}\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$ *et si* $\mathfrak{n}$ *n'est pas une somme de* $\leqslant\mathfrak{m}$ *nombres cardinaux dont chacun est* $<\mathfrak{n}$, *la réponse au problème* $\boldsymbol{P}$ *est pour l'ensemble* E *positive.*

Or, soit en particulier $\overline{\overline{E}}=\aleph_{\alpha+1}$ où α est un nombre ordinal quelconque. On a, comme on sait, $\aleph_{\alpha+1}\leqslant 2^{\aleph_\alpha}$ et $\aleph_{\alpha+1}$ n'est pas une somme de $\leqslant\aleph_\alpha$ nombres cardinaux $<\aleph_{\alpha+1}$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 2, en posant $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ et $\mathfrak{n}=\aleph_{\alpha+1}$. Nous obtenons ainsi ce

Théorème 3. *La réponse au problème* $\boldsymbol{P}$ *est positive, si* $\overline{\overline{E}}=\aleph_{\alpha+1}$ *où* α *est un nombre ordinal quelconque.*

En particulier, *la réponse au problème* $\boldsymbol{P}$ *est positive, si* $\overline{\overline{E}}=\aleph_n$, *où* $n=1, 2, 3, \ldots$.

Cependant, si l'on remplace dans l'énoncé du problème $\boldsymbol{P}$ le mot „*fini*" par „*au plus dénombrable*", la réponse au problème $\boldsymbol{P}'$ ainsi obtenu est négative pour $\overline{\overline{E}}=\aleph_1$ (donc, elle est négative pour $\overline{\overline{E}}=2^{\aleph_0}$, si l'on admet l'hypothèse du continu)[1]).

En effet, soit E l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$. Soit R la relation $>$. On a donc $\overline{\overline{E}}=\aleph_1$ et les conditions du problème $\boldsymbol{P}'$ sont évidemment vérifiées. Or, comme on voit sans peine, il n'existe pas deux éléments de E, x et $y\neq x$, pour lesquels on n'ait ni xRy ni yRx (puisqu'on a toujours soit $x>y$, soit $y>x$).

Modifions maintenant le problème $\boldsymbol{P}$, en remplaçant dans son énoncé les mots „*de même puissance que E*" par „*indénombrable*". Soit $\boldsymbol{P}^*$ le problème ainsi modifié. Comme on voit sans peine, *la réponse au problème* $\boldsymbol{P}^*$ *est positive* (pour tout ensemble indénombrable E). En effet, pour le voir, on n'a qu'à prendre un sous-ensemble H de E de puissance $\aleph_1$ et à appliquer le théorème 3 à l'ensemble H, ce qui donne un sous-ensemble H_1 de H, donc aussi de E, de puissance $\aleph_1$ et qui répond aux conditions du problème $\boldsymbol{P}^*$.

[1]) Le problème si elle est encore négative pour $\overline{\overline{E}}=\aleph_2$ reste ouvert.

Pour terminer, nous allons démontrer le théorème suivant, dû à M. S. Ruziewicz:

Théorème 4. *Si l'ensemble E et la relation R satisfont aux conditions du problème $\boldsymbol{P}$, l'ensemble S de tous les systèmes (x, y) tels que $x \epsilon E$, $y \epsilon E$, $x \operatorname{non} R y$ et $y \operatorname{non} R x$, est de même puissance que E.*

Démonstration. Supposons, en effet que dans ces conditions l'ensemble S de tous les systèmes (x, y), tels que $x \epsilon E$, $y \epsilon E$, $x \operatorname{non} R y$ et $y \operatorname{non} R x$ soit de puissance $\mathfrak{n}_1 < \overline{\overline{E}} = \mathfrak{n}$. L'ensemble T de tous les éléments y de E pour lesquels il existe (au moins) un élément x de E tel que $(x, y) \epsilon S$ serait donc de puissance $\mathfrak{n}_2 \leqslant \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{n}$.

Soit $x_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ une suite infinie quelconque formée d'éléments distincts de E. Pour tout n naturel, l'ensemble H_n de tous les éléments y de E tels que $x_n R y$ est (vu les conditions du problème $\boldsymbol{P}$) fini. L'ensemble $H = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$ est donc au plus dénombrable et l'ensemble $T+H$ est de puissance $\leqslant \mathfrak{n}_2 + \aleph_0 < \mathfrak{n}$. Il existe donc un élément y_0 de E tel que $y_0 \operatorname{non} \epsilon\, T+H$. On a donc $y_0 \operatorname{non} \epsilon\, H_n$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$.

Soit n un nombre naturel donné quelconque. Comme $y_0 \operatorname{non} \epsilon\, H_n$, on conclut de la définition de H_n que $x_n \operatorname{non} R y_0$. Si on avait en même temps $y_0 \operatorname{non} R x_n$, on aurait d'après la définition de S $(x_n, y_0) \epsilon S$, donc $y_0 \epsilon T$, contrairement à la définition de y_0. On a par conséquent $y_0 R x_n$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$, ce qui est incompatible avec la condition du problème $\boldsymbol{P}$ imposée à la relation R (puisque $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est une suite infinie d'éléments *distincts* de E). Il est donc impossible que $\overline{\overline{S}} = \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{n} = \overline{\overline{E}}$ et le théorème 4 se trouve démontré.

Czerchawa, Août 1936.

Sur les groupes compacts d'homéomorphies.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

1. Soit Z un espace topologique et X un espace métrique borné. X^Z désignera la famille de toutes les transformations continues de Z en sous-ensembles de X. En posant pour $f_1, f_2 \epsilon X^Z$

$$|f_1 - f_2| = \sup_{z \epsilon Z} \varrho(f_1(z), f_2(z)),$$

où $\varrho(x_1, x_2)$ désigne la distance entre les points $x_1, x_2 \epsilon X$, la famille X^Z devient un espace métrique. La topologie de cet espace dépend, en général, du choix de la métrique dans X [1]). On peut montrer qu'elle n'en dépend pas, si X est compact.

2. ***Lemme.*** *Quelle que soit la famille compacte* [2]) $\Psi \subset I^Z$ [3]), *la fonction*

$$F(z) = \sup_{f \epsilon \Psi} f(z)$$

est continue pour tout $z \epsilon Z$.

Démonstration. La famille Ψ étant compacte, il existe pour tout $z \epsilon Z$ une fonction $f_z \epsilon \overline{\Psi}$ telle que $F(z) = f_z(z)$.

Soit $z = \lim\limits_n z_n$ où $z_n \epsilon Z$. On a pour tout $n = 1, 2, \ldots$

$$F(z_n) = f_{z_n}(z_n) \geqslant f_z(z_n) \qquad \text{et} \qquad \lim_n f_z(z_n) = f_z(z) = F(z),$$

d'où $\liminf\limits_n F(z_n) \geqslant F(z)$. Supposons que $\limsup\limits_n F(z_n) > F(z)$. En remplaçant $\{z_n\}$ par une suite partielle, on pourrait donc admettre que $\lim\limits_n F(z_n) = F(z) + \eta$ où $\eta > 0$. La compacité de $\overline{\Psi}$ permet

---

1) J'entends ici par *métrique* toute fonction de deux variables qui jouit des bien connues propriétés formelles de la distance et qui est *équivalente* à la métrique ϱ de X, c. à d. y détermine la même topologie que ϱ.

2) à distinguer de *compacte en soi.*

3) I désignant l'intervalle clos 0,1.