Sur les fonctions dépendantes.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Les questions traitées ici se rattachent au problème assez élémentaire que voici:

$f(x)$ et $g(x)$ étant deux fonctions données d'une variable réelle, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction d'une variable réelle, $\varphi(x)$, telle qu'on ait l'égalité $g(x)=\varphi(f(x))$ pour tous les x réels?

La réponse à ce problème est donnée par ce

Théorème I. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions quelconques de variable réelle. Pour qu'il existe une fonction de variable réelle $\varphi(x)$ telle qu'on ait*

$$g(x)=\varphi(f(x)) \quad \textit{pour tout } x \textit{ réel}, \tag{1}$$

il faut et il suffit que, pour chaque couple x, y de nombres réels

$$f(x)=f(y) \quad \textit{entraîne} \quad g(x)=g(y). \tag{2}$$

Démonstration. La nécessité de la condition étant évidente, nous n'en démontrerons que la suffisance.

Soient donc $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de variable réelle, telles que l'implication (2) soit remplie pour tout couple x, y. Définissons la fonction $\varphi(x)$ comme il suit. Etant donné un x réel, deux cas sont à distinguer:

1⁰ L'ensemble

$$H(x)=\underset{t}{\mathrm{E}}[f(t)=x] \tag{3}$$

est vide. Nous poserons dans ce cas $\varphi(x)=0$.

2⁰ L'ensemble (3) est non vide. Dans ce cas, l'ensemble (évidemment non vide lui aussi)

$$g(H(x)) \quad \textit{ne contient qu'un seul élément.} \tag{4}$$

En effet, en posant $u_1 \epsilon g(H(x))$ et $u_2 \epsilon g(H(x))$, il existerait un $t_1 \epsilon H(x)$ et un $t_2 \epsilon H(x)$ tels que

$$u_1=g(t_1) \quad \textit{et} \quad u_2=g(t_2). \tag{5}$$

On aurait donc selon (3) $f(t_1)=x$ et $f(t_2)=x$, d'où $f(t_1)=f(t_2)$, ce qui entraîne en vertu de la condition (2) que $g(t_1)=g(t_2)$, donc, selon (5), que $u_1=u_2$.

Or, c'est le seul élément de l'ensemble $g(H(x))$, que nous prendrons dans le cas considéré comme la valeur de $\varphi(x)$.

x étant un nombre réel, posons maintenant $u=f(x)$. D'après (3), nous avons alors $H(u)=\underset{t}{\mathrm{E}}[f(t)=f(x)]$, d'où $x \epsilon H(u)$. Par conséquent $H(u)\neq 0$ et on se trouve dans le cas 2⁰. En vertu de (4) l'ensemble $g(H(u))$ se réduit donc à l'élément $g(x)$, puisque $x \epsilon H(u)$. D'après la définition de la fonction φ, on a donc $\varphi(u)=g(x)$, c. à d. la formule (1), car $u=f(x)$. Le théorème I est ainsi démontré.

Il est à remarquer que si les fonctions f et g satisfont à la condition (2) du théorème I, la fonction φ (qui vérifie l'égalité (1)) est bien déterminée sur l'ensemble de toutes les valeurs de la fonction $f(x)$ et peut être définie arbitrairement sur le complémentaire de cet ensemble.

Théorème II. *Si deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de variable réelle assujetties à la condition (2) sont continues, il peut ne pas y avoir une fonction de variable réelle $\varphi(x)$ continue et satisfaisant à l'égalité* (1).

Démonstration. Posons (pour x réels)

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}.$$

C'est une fonction continue à valeurs distinctes et dont l'ensemble des valeurs (pour x réels) est précisément l'intérieur de l'intervalle (—1, 1). Posons $g(x)=x$ pour x réels. Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont évidemment à la condition (2) du théorème I. Or, quelle que soit la fonction continue $\varphi(x)$ de variable réelle, l'ensemble de ses valeurs pour $-1<x<1$ est borné. Il en est donc de même de l'ensemble des valeurs de $\varphi(f(x))$ pour x réels, tandis que celui des valeurs de $g(x)$ pour x réels n'est pas borné. La fonction $\varphi(x)$ ne saurait donc satisfaire à l'équation (1).

Théorème III. *Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions de Baire (d'une variable réelle) et satisfont à la condition* (2), *il existe une fonction de Baire $\varphi(x)$ satisfaisant à l'égalité* (1).

Démonstration. Soit E l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ (pour x réels). Nous définirons d'abord la fonction $\varphi(x)$ sur l'ensemble E.

Désignons notamment, dans l'espace à 3 dimensions, par Φ la surface $x=f(z)$ et par Γ la surface $y=g(z)$, c. à d.

$$\Phi = \mathop{\mathrm{E}}_{x,y,z}[x=f(z)], \qquad \Gamma = \mathop{\mathrm{E}}_{x,y,z}[y=g(z)]. \tag{6}$$

f et g étant des fonctions de Baire, Φ et Γ sont évidemment des ensembles mesurables B, de même que leur produit $\Phi\Gamma$. Désignons par Q la projection (orthogonale) de l'ensemble $\Phi\Gamma$ sur le plan XOY: ce sera donc un ensemble analytique.

Je dis que pour tout nombre a de l'ensemble E la droite $x=a$ (du plan XOY) rencontre l'ensemble Q en un et un seul point.

En effet, si $a \epsilon E$, il existe un nombre réel t tel que $a=f(t)$. Le point

$$x=f(t), \qquad y=g(t) \tag{7}$$

est évidemment situé sur la droite $x=a$. Or, d'après (6) et (7), on a $(x, y, t) \epsilon \Phi\Gamma$, d'où $(x, y) \epsilon Q$.

D'autre part, supposons qu'il existe sur la droite $x=a$ deux points distincts (a, y_1) et (a, y_2) de l'ensemble Q. Comme $(a, y_1) \epsilon Q$, $(a, y_2) \epsilon Q$, Q étant la projection de $\Phi\Gamma$, il existerait des nombres réels z_1 et z_2 tels que

$$(a, y_1, z_1) \epsilon \Phi\Gamma \quad \text{et} \quad (a, y_2, z_2) \epsilon \Phi\Gamma,$$

d'où selon (6)

$$a=f(z_1), \quad y_1=g(z_1) \quad \text{et} \quad a=f(z_2), \quad y_2=g(z_2), \tag{8}$$

donc $f(z_1)=f(z_2)$, ce qui donne, comme nous savons, $g(z_1)=g(z_2)$. D'après (8), on aurait donc $y_1=y_2$, contrairement à l'hypothèse que les points (a, y_1) et (a, y_2) sont distincts.

Il existe ainsi pour tout x de E un et un seul nombre réel y tel que $(x, y) \epsilon Q$. Nous poserons $\varphi(x)=y$. La fonction $\varphi(x)$ est ainsi univoquement définie sur l'ensemble E.

Soit maintenant z un nombre réel quelconque. Posons

$$x=f(z), \qquad y=g(z). \tag{9}$$

On aura donc $x \epsilon E$ et, d'après (6), $(x, y, z) \epsilon \Phi\Gamma$, d'où $(x, y) \epsilon Q$. Comme $x \epsilon E$, il vient $y=\varphi(x)$, d'où selon (9)

$$g(z) = \varphi(f(z)).$$

Le nombre réel z étant arbitraire, la formule (1) pour z réels est ainsi établie.

La fonction $\varphi(x)$ étant définie sur l'ensemble E, on a

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x,y}[x \epsilon E,\ y=\varphi(x)] = Q, \tag{10}$$

puisque d'une part $(x, \varphi(x)) \epsilon Q$ pour $x \epsilon E$, et d'autre part, si $(x, y) \epsilon Q$, il existe un z réel tel que $(x, y, z) \epsilon \Phi$, d'où $x=f(z)$, ce qui donne $x \epsilon E$; l'égalité $y=\varphi(x)$ en résulte par définition de la fonction φ.

L'ensemble (10), en tant qu'égal à Q, est donc analytique. Or, d'après un théorème de M. Lusin[1]), si une fonction $\varphi(x)$ est définie sur un ensemble linéaire E et si l'ensemble (10) est analytique, il existe une fonction de Baire d'une variable réelle qui coïncide avec $\varphi(x)$ sur l'ensemble E. En complétant ainsi la définition de la fonction $\varphi(x)$ pour $x \epsilon CE$, la démonstration du théorème III est achevée.

Théorème IV. *Il existe pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ d'une variable réelle qui sont de I-re classe de Baire, satisfont à la condition* (2) *et pour lequelles il n'existe aucune fonction $\varphi(x)$ de classe $<\alpha$ de Baire qui satisfasse à l'égalité* (1).

Démonstration. Soit H_1 un ensemble linéaire mesurable B de classe α additive (où $1<\alpha<\Omega$). Comme j'ai démontré ailleurs[2]), tout ensemble linéaire, indénombrable et mesurable B est un ensemble des valeurs d'une fonction de I-re classe à valeurs distinctes. Il en résulte sans peine l'existence d'une fonction $f(x)$ de variable réelle, qui soit de I-re classe de Baire, à valeurs distinctes et telle

[1]) voir *C. R.* t. 189, p. 81 et N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 234; cf. aussi C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne. Warszawa—Lwów 1933, p. 253, Proposition 2.

[2]) *Bull. Acad. Polonaise* 1933, p. 276.

qu'en désignant par E_1 l'ensemble de tous les nombres réels positifs et par E_2 celui des autres nombres réels, on ait

$$f(E_1)=H_1 \qquad \text{et} \qquad f(E_2)=CH_1. \tag{11}$$

Soit maintenant $g(x)$ la fonction égale à 1 pour $x>0$ et à 0 pour $x\leqslant 0$; c'est aussi une fonction de I-re classe. La fonction $f(x)$ étant à valeurs distinctes, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont évidemment à la condition (2) du théorème I.

Soit enfin $\varphi(x)$ une fonction quelconque de variable réelle assujettie à l'égalité (1). On voit sans peine que

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\,[\varphi(x)>0]=H_1. \tag{12}$$

En effet, si $x\in H_1$, il existe d'après (11) un nombre t de E_1 tel que $x=f(t)$ et, d'après la définition de la fonction g, on a $g(t)=1$, d'où selon (1) $\varphi(x)=\varphi(f(t))=g(t)=1>0$. D'autre part, si $x\in CH_1$, il existe, d'après (11), un nombre t de E_2 tel que $x=f(t)$ et on a $g(t)=0$, $\varphi(x)=\varphi(f(t))=g(t)=0$.

L'ensemble H_1 étant de classe α additive, il résulte de (12) que la fonction $\varphi(x)$ ne peut pas être de classe $<\alpha$. Le théorème IV est ainsi démontré.

Théorème V. *Si deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de variable réelle assujetties à la condition* (2) *sont mesurables, il peut ne pas y avoir une fonction de variable réelle $\varphi(x)$ mesurable et satisfaisant à l'égalité* (1).

Démonstration. Soient: E_1 et E_2 deux ensembles linéaires disjoints de puissance du continu et de mesure nulle, H_1 un ensemble linéaire de puissance du continu ainsi que CH_1, non mesurable et ne contenant pas le nombre 0, enfin $f(x)$ une fonction qui transforme E_1 en H_1 et E_2 en $H_2=CH_1$ d'une façon biunivoque et qui est nulle en dehors de E_1+E_2. La fonction $f(x)$ est évidemment mesurable. Soit maintenant $g(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_1. On voit sans peine que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont à la condition (2) du théorème I.

Or, soit $\varphi(x)$ une fonction de variable réelle, assujettie à l'égalité (1). Tout comme dans la démonstration du théorème IV, on établit la formule (12). L'ensemble H_1 étant non mesurable, cette formule prouve qu'il en est de même de la fonction $\varphi(x)$. Le théorème V est ainsi démontré.

Sur un problème de la théorie des relations.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Un théorème de M. D. Lázár[1]) m'a suggeré le problème $\boldsymbol{P}$ suivant:

P. *Soit E un ensemble indénombrable donné quelconque et R une relation entre les éléments de E, telle que pour tout élément donné x de E le nombre des éléments y de E pour lesquels on a xRy est fini (ou nul). Existe-t-il toujours un sous-ensemble E_1 de E de même puissance que E et tel que x et y étant deux éléments distincts de E_1, on n'ait jamais xRy?* [2])

Il résulte du théorème de M. Lázár que la réponse au problème $\boldsymbol{P}$ est positive, si $\overline{\overline{E}}=2^{\aleph_0}$. Je vais prouver ici ce

Théorème 1. *La réponse au problème $\boldsymbol{P}$ est positive si $\overline{\overline{E}}=2^{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal quelconque $\geqslant\aleph_0$.*

Démonstration. Comme j'ai démontré ailleurs [3]), si $\overline{\overline{E}}\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, il existe une famille Φ de puissance $\leqslant\mathfrak{m}$ de sous-ensembles de E, telle que pour deux éléments distincts p et q de E il y a toujours dans la famille Φ deux ensembles disjoints dont l'un contient p et l'autre q.

Soit Ψ la famille de tous les produits finis d'ensembles de la famille Φ. On a évidemment $\overline{\overline{\Psi}}\leqslant\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2+\mathfrak{m}^3+\ldots=\mathfrak{m}$, donc $\overline{\overline{\Psi}}\leqslant\mathfrak{m}$.

---

[1]) *Compos. Math.* t. 3, p. 304.

[2]) La solution complète de ce problème a été donnée récemment par M-lle Sophie Piccard et va paraître dans ce volume.

[3]) W. Sierpiński, *Sur la séparabilité généralisée*, Fund. Math. t. XXVII, p. 70.