Über ein Problem von H. Hopf.

Von

Samuel Eilenberg (Warszawa).

In der vorangehenden Arbeit „*Freie Überdeckungen und freie Abbildungen*“ (dieser Band S. 33) hat Herr H. Hopf u. a. drei Sätze über lokal zusammenhängende und unikohärente Kontinua bewiesen (Sätze II a, b, c, S. 35—36) und die Frage nach deren Verallgemeinerungen durch Weglassung der Voraussetzung des lokalen Zusammenhanges gestellt (S. 50).

Nachstehend soll diese Frage für den Satz IIb insofern gelöst werden, als der Satz für irgend ein Kontinuum X bewiesen wird, wobei anstatt der Unikohärenz von X eine (im Falle eines lokal zusammenhängenden X ihr äquivalente) Eigenschaft des Abbildungsraumes S_1^X [1]), nämlich der *Zusammenhang von* S_1^X [2]), vorausgesetzt wird.

Für beliebige Kompakta X ist seinerseits der Zusammenhang von S_1^X mit folgenden drei Eigenschaften äquivalent:

1^0 jede Abbildung $f \epsilon S_1^X$ ist unwesentlich;

2^0 für jedes $f \epsilon S_1^X$ gibt es ein $\varphi \epsilon R_1^X$ [1]) derart, daß $f(x)=e^{i\varphi(x)}$ für jedes $x \epsilon X$ [3]);

3^0 jeder 1-dimensionale konvergente Zyklus von X mit rationalem Koeffizientenbereich ist ~ 0 in X [4]).

---

[1]) R_2 bezeichnet die Ebene der komplexen Zahlen, R_1 die reelle Achse, S_1 die Kreislinie $|z|=1$.

Y^X bezeichnet wie üblich den Raum aller stetigen Abbildungen des Raumes X auf Teilmengen des Raumes Y.

[2]) Wegen der Äquivalenz zwischen der Unikohärenz eines lokal zusammenhängenden Kontinuum X und dem Zusammenhange von S_1^X, s. K. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), S. 195, und auch S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), S. 70.

[3]) S. Eilenberg, Fund. Math. 24 (1935), S. 162.

[4]) K. Borsuk, Fund. Math. 20 (1933), S. 230.

Nun lautet die Verallgemeinerung des Satzes IIb von H. Hopf, wie folgt:

Satz 1. *Sei ein Kontinuum X mit zusammenhängendem Abbildungsraume S_1^X in drei abgeschlossene Teilmengen zerlegt:*

$$X=X_1+X_2+X_3. \tag{*}$$

Dann gibt es für jede Abbildung $g \epsilon X^X$ ein $i=1,2,3$, für welches $g(X_i)\cdot X_i \neq 0$.

Beweis. Man kann offenbar $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 = 0$ annehmen. Der Nerv N der Zerlegung (*) ist ein 1-dimensionales Polyeder mit $\leqslant 3$ Eckpunkten. Man kann also $N \subset S_1$ voraussetzen.

Wäre nun $g(X_i)\cdot X_i = 0$ für jedes $i=1,2,3$, so gäbe es [5]) eine Abbildung $f \epsilon N^X$, derart daß $f(x) \neq fg(x)$ für alle $x \epsilon X$ gälte. Somit ist der Beweis auf folgenden Satz züruckgeführt:

Satz 2. *Ist X irgendein Kontinuum mit zusammenhängendem S_1^X, so gibt es für jedes $g \epsilon X^X$ und jedes $f \epsilon S_1^X$ ein $x_0 \epsilon X$ derart, daß*

$$f(x_0)=fg(x_0).$$

Beweis. Sei $\varphi \epsilon R_1^X$ eine Abbildung, für welche identisch $f=e^{i\varphi}$ gilt. Dem Satz C^* von H. Hopf (l. c., S. 56) zufolge gibt es ein $x_0 \epsilon X$, wo $\varphi(x_0)=\varphi g(x_0)$ ist. Dann aber ist $f(x_0)=e^{i\varphi(x_0)}=e^{i\varphi g(x_0)}=fg(x^0)$, w. z. b. w.

Satz 2 läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Satz 3. *Ist X ein Kontinuum mit zusammenhängendem S_1^X, so gibt es für jedes $g \epsilon X^X$ und jedes $f \epsilon R_2^X$ [1]) ein $x_0 \epsilon X$ derart, daß die Bilder $f(x_0)$, $fg(x_0)$, $fgg(x)_0$ auf einer Geraden, und zwar in dieser Reihenfolge liegen.*

In der Tat, folgt unmittelbar Satz 2 aus Satz 3. Nehmen wir anderseits an, daß $f(x) \neq fg(x)$ für alle $x \epsilon X$, und setzen

$$f^*(x)=\frac{f(x)-fg(x)}{|f(x)-fg(x)|} \quad \text{für jedes } x \epsilon X,$$

so folgt $f^* \epsilon S_1^X$. Dem Satz 2 gemäß, gibt es dann ein $x_0 \epsilon X$, wo $f^*(x_0)=f^*g(x_0)$, d. h. wo

---

[5]) H. Hopf, dieser Band, S. 48.

$$\frac{f(x_0)-fg(x_0)}{|f(x_0)-fg(x_0)|}=\frac{fg(x_0)-fgg(x_0)}{|fg(x_0)-fgg(x_0)|}$$

ist, was die im Satz 3 behauptete Lage des Tripels $f(x_0)$, $fg(x_0)$, $fgg(x_0)$ zum Ausdruck bringt.

Als Sonderfall des Satzes 3 für ebene Kontinua ist zu erwähnen:

Satz 4. *Zerschneidet ein Kontinuum $X\subset R_2$ die Ebene R_2 nicht und ist $g\epsilon X^X$, so gibt es ein $x_0\epsilon X$ derart, daß die Punkte x_0, $g(x_0)$, $gg(x_0)$ auf einer Geraden, und zwar in dieser Reihenfolge liegen.*

In der Tat genügt es hierzu, im Satz 3 $f(x)=x$ für alle $x\epsilon X$ zu setzen und die Äquivalenz zwischen dem Nichtzerschneiden der Ebene durch X und dem Zusammenhange von S_1^X [6]) zu verwenden.

Es sei noch bemerkt: wenn die Abbildung $g\epsilon X^X$ involutorisch, d. h. wenn $gg(x)=x$ für alle $x\epsilon X$ ist, so liefert der Satz 3 ein $x_0\epsilon X$, wo $f(x_0)=fg(x_0)$, und der Satz 4 ein $x_0\epsilon X$, wo $g(x_0)=x_0$ ist [7]).

---

[6]) K. Borsuk, Math. Ann. 106 (1932), S. 246; S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), S. 93 und S. 281 (der letzte Beweis ist der einfachste).

[7]) vgl. S. Eilenberg, Fund. Math. 25 (1936), S. 267—268.

A problem on topological transformation of the plane.

By

A. S. Besicovitch (Cambridge).

Does there exist a topological (one-one, continuous) transformation S of a plane into a plane for which the consecutive transforms of a point M

$$SM,\ S^2M,\ S^3M,\ \dots \tag{1}$$

form a set everywhere dense on the plane? [1]).

Let $f(\varphi)$ be a continuous function with period 2π such that

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi=0 \tag{2}$$

and that for no δ and no n the function

$$F(\varphi,\delta,n)=f(\varphi)+f(\varphi+\delta)+\dots+f(\varphi+\overline{n-1}\,\delta) \tag{3}$$

is constant in an interval of values of φ.

We obviously have

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi,\delta,n)\,d\varphi=0. \tag{4}$$

We shall use $n, m_1, n_1, m_2, \dots$ for integers and we shall assume the fractions m_1/n_1, $m_2/n_2, \dots$ to be irreducible.

In the course of defining the transformation S we shall arrive at two sequences

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \quad \text{and} \quad k_1, k_2, \dots,$$

the first one of real positive numbers rapidly tending to zero and the second one of positive integers such that

$$k_{i+1}\,\varepsilon_{i+1}>2k_i\,\varepsilon_i \qquad \text{for all } i.$$

---

[1]) The problem has been put to me by S. Ulam.