Sur les théorèmes du »plongement« dans la théorie de la dimension [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Je vais démontrer dans cette note le théorème suivant

Théorème 1 [2]). *Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique séparable de dimension $\leqslant n$. Dans l'espace fonctionnel $(\mathfrak{I}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ des transformations continues de $\mathfrak{X}$ en sous-ensembles du cube à $2n+1$ dimensions, les homéomorphies constituent un ensemble résiduel* [3]).

Ce théorème rapproché d'un théorème récent de M. Borsuk [4]), d'après lequel, dans le même espace fonctionnel, les fonctions continues f telles que $\dim \overline{f(\mathfrak{X})} \leqslant n$ constituent aussi un ensemble résiduel, — *entraîne directement le théorème bien connu de M. Hurewicz* [5]), *que $\mathfrak{X}$ est topologiquement contenu dans un espace compact de dimension n.* Plus encore: la partie commune des deux ensembles résiduels en question est un ensemble résiduel composé exclusivement de fonctions qui réalisent *simultanément* les deux théorèmes: celui de Menger-Nöbeling et celui de M. Hurewicz; notamment ces fonctions sont des homéomorphies telles que $\dim \overline{f(\mathfrak{X})} \leqslant n$.

---

[1]) Présenté à la Soc. Pol. de Math., Section de Varsovie, le 15. I. 1937.

[2]) Ce théorème présente une extension aux espaces *non compacts* d'un théorème fondamental de Menger-Nöbeling. Pour une simple démonstration de ce dernier, voir W. Hurewicz, Sgb. Preuss. Akad. XXIV (1933), p. 757.

[3]) D'une façon générale, $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ désigne l'espace des transformations continues de l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$, la distance entre deux fonctions f et g étant, par définition, la borne supérieure des distances $|f(x)-g(x)|$. Cet espace est complet lorsque $\mathcal{Y}$ est complet.

Un ensemble est dit *résiduel* lorsqu'il est le complémentaire d'un ensemble de première catégorie (= d'une somme d'une série d'ensembles non denses). Dans un espace complet, un ensemble résiduel n'est jamais vide.

[4]) Ce volume p. 91.

[5]) Mon. f. M. u. Ph. XXXVII (1930), p. 199.

Dans la deuxième partie de cette note se trouvent plusieurs généralisations [1]). J'établis, en particulier, le théorème suivant.

Théorème 2. *Etant donnée, dans un espace métrique séparable $\mathfrak{X}$, une suite d'ensembles fermés $A_0, A_1, \dots$ de dimension $\leqslant n$* [2]), *les fonctions-éléments g de l'espace $(\mathfrak{I}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ telles que*

(i) $\dim[\overline{g(A_{i_0})} \cdot \ldots \cdot \overline{g(A_{i_l})}] = \dim(A_{i_0} \cdot \ldots \cdot A_{i_l}) \qquad (0 \leqslant l < \infty)$,

(ii) *les fonctions partielles g/A_l sont des homéomorphies,*

— *constituent un ensemble résiduel* [3]).

1. Soient A et B deux sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace (métrique séparable) $\mathfrak{X}$. Soit f une transformation continue de $\mathfrak{X}$ en sous-ensemble d'un espace compact $\mathcal{Y}$. A chaque $\varepsilon > 0$ correspond alors une décomposition de $\mathfrak{X}$ en ensembles ouverts $\mathfrak{X} = G_0 + \ldots + G_m$ tels que

(1) $\delta[f(G_i)] < \varepsilon$, (2) si $G_i A \neq 0$, on a $G_i B = 0$.

Il suffit, en effet, de décomposer $\mathcal{Y}$ en ensembles ouverts $\mathcal{Y} = H_0 + \ldots + H_s$ de façon que $\delta(H_i) < \varepsilon$. En posant $K_i = f^{-1}(H_i)$, la décomposition

$$\mathfrak{X} = (K_0 - A) + \ldots + (K_s - A) + (K_0 - B) + \ldots (K_s - B)$$

est la décomposition demandée $(m = 2s+1)$.

Si l'on suppose en outre que $\dim \mathfrak{X} \leqslant n$, on peut assujettir les ensembles $G_0, \ldots, G_m$ à la condition supplémentaire que, pour $i_0 < \ldots < i_{n+1}$, on ait toujours

(3) $$G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_{n+1}} = 0 \quad ^{4)}.$$

---

[1]) Dans le même ordre d'idées, on peut étendre aux espaces métriques séparables $\mathfrak{X}$ le théorème suivant de M. Hurewicz (Sgb. Pr. Ak. XXIV, p. 755): si $\dim \mathfrak{X} \leqslant n$, les fonctions $f \varepsilon (\mathfrak{I}^{n+m})^{\mathfrak{X}}$ telles que l'ensemble des points $f(x)$ d'ordre $\geqslant l+1$ est de dimension $\leqslant n - lm$ constituent un ensemble résiduel.

[2]) Le théorème reste valable pour n *infini*. On remplace dans ce cas $\mathfrak{I}^{2n+1}$ par le cube fondamental (compact) $\mathfrak{I}^{\aleph_0}$ de Hilbert.

[3]) Ce théorème implique évidemment l'énoncé précité de M. Borsuk, ainsi que le théorème 1.

[4]) Nous nous appuyons ici sur la propriété suivante des espaces de dimension $\leqslant n$: à chaque décomposition en ensembles ouverts $\mathfrak{X} = G_0 + \ldots + G_m$ correspond une décomposition en ensembles ouverts $\mathfrak{X} = G_0^* + \ldots + G_m^*$ telle que $G_i^* \subset G_i$ et $G_{i_0}^* \cdot \ldots \cdot G_{i_{n+1}}^* = 0$. Dans ce qui suit cette propriété peut être substituée à l'inégalité $\dim \mathfrak{X} \leqslant n$ (ce qui présente un certain intérêt méthodologique).

Théorème auxiliaire. *A et B étant deux ensembles fermés et disjoints situés dans un espace métrique séparable $\mathcal{X}$ de dimension $\leqslant n$, les éléments g de l'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathcal{X}}$ tels que $\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=0$ constituent dans cet espace un ensemble ouvert et dense.*

L'ensemble considéré étant, comme on voit facilement [1]), ouvert, il s'agit de prouver qu'il est dense.

Soit $f\in(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathcal{X}}$ et $\varepsilon>0$. Nous allons définir une fonction g telle que $|g-f|<\varepsilon$ et $\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=0$ [2]).

La décomposition $\mathcal{X}=G_0+\ldots+G_m$ étant assujettie aux conditions (1)—(3), choisissons dans le cube $\mathcal{J}^{2n+1}$ un système de points $p_0,\ldots,p_m$ tel que

1⁰ $\delta[p_i+f(G_i)]<\varepsilon$;

2⁰ chaque système composé de $2n+2$ points $p_{i_0},\ldots,p_{i_{2n+1}}$ est linéairement indépendant (ce qui implique que les simplexes $p_{i_0}\ldots p_{i_n}$ [3]), où $0\leqslant i_0<\ldots<i_n\leqslant m$ sont disjoints deux à deux).

La fonction $g(x)$ est définie comme suit (en notation vectorielle)[4]):

$$g(x)=\lambda_0(x)\cdot p_0+\ldots+\lambda_m(x)\cdot p_m$$

où

$$\lambda_i(x)=\frac{\varrho(x,\mathcal{X}-G_i)}{\varrho(x,\mathcal{X}-G_0)+\ldots+\varrho(x,\mathcal{X}-G_m)}.$$

On prouve facilement [5]) que $|g-f|<\varepsilon$ et que, quel que soit x, si le système $i_0,\ldots,i_k$ contient tous les indices tels que $x\in G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}$, le point $g(x)$ appartient au simplexe $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$.

---

[1]) Cela pourrait être déduit, d'ailleurs, des propriétés générales des espaces $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ et $2^{\mathcal{Y}}$, ce dernier étant l'espace de tous les sous-ensembles fermés de l'espace $\mathcal{Y}$ (supposé compact), métrisé dans le sens de M. Hausdorff. L'opération $F(f)=f(A)$ transforme, pour A fixe, l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ en sous-ensemble de $2^{\mathcal{Y}}$. Cette transformation est *continue*, car la distance entre les ensembles $\overline{f(A)}$ et $\overline{f_1(A)}$, égale à celle des ensembles $f(A)$ et $f_1(A)$, est évidemment $\leqslant|f-f_1|$.
D'autre part, l'ensemble $\underset{PQ}{E}(PQ=0)$ est ouvert (P et Q parcourant l'espace $2^{\mathcal{Y}}$). Donc $\underset{f}{E}[\overline{f(A)}\cdot\overline{f(B)}=0]$ est ouvert.

[2]) Il sera établi ainsi que f est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions g satisfaisant à l'égalité $\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=0$.

[3]) Les simplexes sont conçus ici sans bord. Ainsi, par exemple, $p_0p_1p_2$ désigne l'intérieur du triangle à sommets p_0,p_1,p_2.

[4]) Cf. ma note de Fund. Math. 20 (1933), p. 191 ou bien *Topologie I*, p. 92.

[5]) Ibidem et Alexandroff — Hopf, *Topologie I*, p. 367. Rappelons que le complexe composé de tous les simplexes $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ tels que $G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq0$ est le *nerf* de la décomposition $\mathcal{X}=G_0+\ldots+G_m$.

On en conclut que P_A désignant le polytope-somme de tous les simplexes $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ tels que $A\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq0$, on a $g(A)\subset P_A$. D'une façon analogue, $g(B)\subset P_B$. Selon (2) les polytopes P_A et P_B n'ont aucun sommet commun et selon (3) ils sont de dimension $\leqslant n$. Il vient en vertu de 2⁰: $P_A\cdot P_B=0$. Comme, en outre, ces polytopes sont évidemment des ensembles fermés, on a finalement $\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=0$.

2. ***Lemme.*** *Soit $\mathcal{X}$ un espace métrique séparable et soit $R_1,R_2,\ldots$ sa base, composée d'ensembles ouverts. Si la transformation continue f de $\mathcal{X}$ n'est pas une homéomorphie, il existe deux termes R_k et R_l tels que $\bar{R}_k\subset R_l$ et $\overline{f(R_k)}\cdot\overline{f(\mathcal{X}-R_l)}\neq0$, donc que $\overline{f(\bar{R}_k)}\cdot\overline{f(\mathcal{X}-R_l)}\neq0$.*

En effet, deux cas peuvent se présenter par hypothèse: ou bien f n'est pas biunivoque, ou bien il existe un ensemble G ouvert dans $\mathcal{X}$ tel que $f(G)$ n'est pas ouvert dans $f(\mathcal{X})$. Dans les deux cas, il existe un point x et un ensemble R_l tels que $x\in R_l$ et que $f(x)\in f(\mathcal{X}-R_l)$ resp. $f(x)\in\overline{f(\mathcal{X})-f(R_l)}\subset\overline{f(\mathcal{X}-R_l)}$. Soit k tel que $x\in R_k$ et $\bar{R}_k\subset R_l$. Il vient $f(x)\in[f(R_k)\cdot\overline{f(\mathcal{X}-R_l)}]$.

Le lemme établi, passons à la démonstration du théorème 1. Soit $\dim\mathcal{X}\leqslant n$. Soit Φ_{kl} l'ensemble des fonctions f appartenant à $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathcal{X}}$ telles que $\overline{f(\bar{R}_k)}\cdot\overline{f(\mathcal{X}-R_l)}=0$. D'après le lemme, l'ensemble $\Pi\Phi_{kl}$, où la multiplication s'étend à tous les couples k,l tels que $\bar{R}_k\subset R_l$, se compose exclusivement d'homéomorphies. En outre, cet ensemble est résiduel, car Φ_{kl} est ouvert et dense selon le théor. auxiliaire (on y pose $A=\bar{R}_k$ et $B=\mathcal{X}-R_l$). D'où la conclusion demandée.

Remarques et généralisations.

3. ***Lemme 1.*** *Etant donnés, dans un espace métrique séparable, un ensemble fermé F et un système d'ensembles ouverts $V_0,\ldots,V_s$ tel que $F\subset V_0+\ldots+V_s$, il existe un système d'ensembles ouverts $W_0,\ldots,W_s$ tel que $F\subset W_0+\ldots+W_s$, $W_i\subset V_i$ et que la condition $F\cdot V_{i_0}\cdot\ldots\cdot V_{i_l}=0$ implique $W_{i_0}\cdot\ldots\cdot W_{i_l}=0$, quels que soient les indices $i_0,\ldots,i_l$.*

En effet, au système $FV_0,\ldots,FV_s$ d'ensembles ouverts dans F correspond un système $F_0,\ldots,F_s$ d'ensembles fermés tel que $F=F_0+\ldots+F_s$, $F_i\subset V_i$ et que la condition $F\cdot V_{i_0}\cdot\ldots\cdot V_{i_l}=0$ implique $F_{i_0}\cdot\ldots\cdot F_{i_l}=0$ [1]). A son tour, au système $F_0,\ldots,F_s$ correspond un système d'ensembles ouverts $U_0,\ldots,U_s$ tel que $F_i\subset U_i$ et que la condition $F_{i_0}\cdot\ldots\cdot F_{i_l}=0$, implique $U_{i_0}\cdot\ldots\cdot U_{i_l}=0$. On pose $W_i=U_i\cdot V_i$.

---

[1]) Cf. *Topologie I*, p. 96.

Lemme 2. Etant donnés un système d'ensembles fermés $A_0, \ldots, A_l$ et un système d'ensembles ouverts $K_0, \ldots, K_s$ tel que $\mathfrak{X}=K_0+\ldots+K_s$, il existe un système d'ensembles ouverts $G_0, \ldots, G_m$ tel que $\mathfrak{X}=G_0+\ldots+G_m$, chaque G_i est contenu dans un $K_{i'}$ et qu'en posant $\dim(A_0\cdot\ldots\cdot A_l)=r$, *à chaque système d'indices (différents) $i_0, \ldots, i_{r+1}$ correspond un indice j assujetti à la condition $A_j\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{r+1}}=0$.*

Posons, en effet, $A_0\cdot\ldots\cdot A_l=F$. Il existe[1]) un système d'ensembles ouverts $V_0, \ldots, V_s$ tel que $\mathfrak{X}=V_0+\ldots+V_s$, $V_i\subset K_i$ et $F\cdot V_{i_0}\cdot\ldots\cdot V_{i_{r+1}}=0$. Soit, conformément au lemme précédent, $W_0, \ldots, W_s$ un système d'ensembles ouverts tel que $F\subset W_0+\ldots+W_s$, $W_i\subset V_i$ et $W_{i_0}\cdot\ldots\cdot W_{i_{r+1}}=0$. On a la décomposition

$$\mathfrak{X}=\sum_{ij}(V_i-A_j)+\sum_i W_i$$

en $(s+1)(l+2)$ ensembles ouverts (que nous désignons par $G_0, \ldots, G_m$). Car $\mathfrak{X}=V_0+\ldots+V_s=\sum_{ij}(V_i-A_j)+\prod_j A_j$ et $\prod_j A_j=F\subset\sum_i W_i$.

Supposons enfin, par impossible, qu'il existe un système d'indices $i_0, \ldots, i_{r+1}$ tel qu'on ait $A_j\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{r+1}}\neq 0$ quel que soit $j\leqslant l$. Aucun des ensembles $G_{i_0}, \ldots, G_{i_{r+1}}$ n'appartient donc au système des ensembles (V_i-A_j) où $i\leqslant s$, $j\leqslant l$. Ils appartiennent donc tous au système $W_0, \ldots, W_s$. Mais ceci contredit l'égalité $W_{i_0}\cdot\ldots\cdot W_{i_{r+1}}=0$.

Remarque. Si $\dim(A_0+\ldots+A_l)\leqslant n$, on peut assujettir les ensembles G_i du lemme précédent à la condition supplémentaire

$$G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{n+1}}\cdot(A_0+\ldots+A_l)=0. \tag{4}$$

4. Théorème auxiliaire généralisé[2]). *Etant donné, dans un espace métrique séparable $\mathfrak{X}$, un système d'ensembles fermés $A_0, \ldots, A_l$ de dimension $\leqslant n$, les fonctions $g\,\epsilon\,(\mathcal{I}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ telles que*

$$\dim[\overline{g(A_0)}\cdot\ldots\cdot\overline{g(A_l)}]\leqslant\dim(A_0\cdot\ldots\cdot A_l) \tag{5}$$

constituent un ensemble dense dans l'espace $(\mathcal{I}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$.

Reprenons le raisonnement du N° 1.

Soit $f\,\epsilon\,(\mathcal{I}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ et $\varepsilon>0$. Soit $\mathcal{I}^{2n+1}=H_0+\ldots+H_s$ une décomposition du cube $\mathcal{I}^{2n+1}$ en ensembles ouverts tels que $\delta(H_i)<\varepsilon$. Posons $K_i=f^{-1}(H_i)$. Il vient $\mathfrak{X}=K_0+\ldots+K_s$ et $\delta[f(K_i)]<\varepsilon$.

---

[1]) K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 161.

[2]) Cette généralisation m'a été suggérée par M. Knaster.

$G_0, \ldots, G_m$ désignant le système d'ensembles assujetti à la thèse du lemme 2 ainsi qu'à la formule (4), la fonction g définie p. 338 est la fonction demandée: elle satisfait à l'inégalité $|g-f|<\varepsilon$ et, comme nous allons prouver, à l'inégalité (5).

Désignons, à ce but, par P_j le polytope-somme de tous les simplexes $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ tels que $A_j\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq 0$. Il vient $g(A_j)\subset P_j$ et, P_j étant fermé, $\overline{g(A_j)}\subset P_j$.

Selon (4), $\dim P_j\leqslant n$. Par conséquent (voir p. 338, 2⁰), le polytope $P_0\cdot\ldots\cdot P_l$ est la somme des simplexes $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ tels qu'on a, pour chaque $j\leqslant l$, $A_j\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq 0$. On en conclut, par définition du système $G_0, \ldots, G_m$, que $k\leqslant r$, donc que $\dim(p_{i_0}\ldots p_{i_k})\leqslant r$, d'où $\dim[\overline{g(A_0)}\cdot\ldots\cdot\overline{g(A_l)}]\leqslant\dim(P_0\cdot\ldots\cdot P_l)\leqslant r$.

5. Lemme. *Etant donnés: un espace métrique séparable $\mathfrak{X}$, un système de sous-ensembles $A_0, \ldots, A_l$ de $\mathfrak{X}$, un espace compact $\mathcal{Y}$ et un nombre entier r, l'ensemble des fonctions $g\,\epsilon\,\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ telles que* $\dim[\overline{g(A_0)}\cdot\ldots\cdot\overline{g(A_l)}]\leqslant r$ *est un G_δ.*

La fonction $F(g)=\overline{g(A)}$ étant continue (voir renvoi 1, p. 338), il s'agit de prouver que l'ensemble $\underset{F_0\ldots F_l}{E}[\dim(F_0\cdot\ldots\cdot F_l)\leqslant r]$ est un G_δ[1]) dans l'espace $(2^{\mathcal{Y}})^{l+1}$. Soit d_{r+1} le $r+1$-ème coefficient d'applatissement[2]). L'inégalité $\dim F\leqslant r$ étant équivalente à l'égalité $d_{r+1}(F)=0$, donc à l'hypothèse que, pour chaque m, $d_{r+1}(F)<{}^1/_m$, il reste à démontrer que l'ensemble $\underset{F_0\ldots F_l}{E}[d_{r+1}(F_0\cdot\ldots\cdot F_l)<{}^1/_m]$ est ouvert.

Or, soit $H_0, \ldots, H_j$ un système d'ensembles ouverts tel que

$$F_0\cdot\ldots\cdot F_l\subset H_0+\ldots+H_j,\quad H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{r+1}}=0 \quad\text{et}\quad \delta(H_i)<{}^1/_m.$$

On constate aussitôt que l'inclusion précédente reste valable, en remplaçant chaque F_i par un F_i^* suffisamment voisin. De sorte que $d_{r+1}(F_0^*\cdot\ldots\cdot F_l^*)<{}^1/_m$, c. q. f. d.

---

[1]) En particulier (pour $l=0$), l'ensemble $\underset{F}{E}(\dim F\leqslant r)$ est un G_δ dans l'espace $2^{\mathcal{Y}}$. Il est, peut-être, intéressant de remarquer que cela implique que *la fonction* $\dim F$ *est une fonction de deuxième classe (dans la classification de Baire) de la variable* F. Des simples exemples montrent qu'elle n'est pas de première classe.

[2]) Par définition, $d_{r+1}(F)$ est la borne inférieure des nombres η pour lesquels il existe un système fini d'ensembles ouverts $H_0, \ldots, H_j$ de diamètre $\leqslant\eta$ et tels que

$$F\subset H_0+\ldots+H_j \quad\text{et}\quad H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{r+1}}=0.$$

6. ***Démonstration du théor. 2*** (p. 337). D'après les énoncés des N⁰ 4 et 5, l'ensemble $\Phi_{0\ldots l}$ des fonctions g satisfaisant à l'inégalité (5) est résiduel. Il en est donc de même de l'ensemble $\Pi\Phi_{i_0\ldots i_l}$, la multiplication étant étendue à tous les systèmes finis $i_0, \ldots, i_l$.

Il reste à prouver que les fonctions g telles que la fonction partielle g/A_l est une homéomorphie constituent (pour l fixe) un ensemble Ψ résiduel.

Posons $A_l = A$ et désignons par $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'ensemble A. Soit R_i, R_j un couple tel que $\overline{R}_i \subset R_j$. Soit Ψ_{ij} l'ensemble des fonctions $g \epsilon (\mathcal{I}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ telles que $\overline{g(\overline{R}_i)} \cdot \overline{g(A - R_j)} = 0$. D'après les énoncés des N⁰ 4 et 5, où l'on pose $l=1$, $A_0 = \overline{R}_i$ et $A_1 = A - R_j$, l'ensemble Ψ_{ij} est résiduel. Il en est de même du produit $\prod_{ij} \Psi_{ij}$, donc de Ψ, puisque $\prod_{ij} \Psi_{ij} \subset \Psi$ selon le lemme du N⁰ 2.