Die Gleichung $y=f(x)$ definiert die Menge

$$J=\sum_x (x, f(x)),$$

von der X schlichte Projektion, also schlichtes stetiges Bild ist. Unter den $H(x)$ befindet sich eine gleichdimensionale Hülle von J, d. h. für ein gewisses x ist

$$J\subset H(x), \qquad \dim J=\dim H(x).$$

Für dieses x kann der Fall (β) nicht eintreten, weil dann der Punkt $(x, f(x))$ gleichzeitig zu $J\subset H(x)$ und nach (β) zu $Z-H(x)$ gehören würde. Also gilt (α) und

$$\dim J=\dim H(x)\geqslant \dim (x, Y)=\dim Y,$$

womit der Beweis geführt ist.

Beispiel. X sei nulldimensional; dann ist $\dim Z=\dim Y$, also auch $\dim J=\dim Y$. Jede nulldimensionale Menge X von der Mächtigkeit des Kontinuums ist also schlichtes stetiges Bild einer Menge J von beliebig vorgeschriebener (endlicher oder abzählbarer oder unabzählbarer) Dimension. Diese Mengen J haben wie X selbst lauter trennbare Punktpaare, d. h. für zwei verschiedene Punkte z_1, z_2 von J gibt es immer eine Zerstückelung $J=J_1+J_2$ in disjunkte, relativ abgeschlossene Mengen mit $z_1\in J_1$, $z_2\in J_2$, (J hat einpunktige Quasikomponenten). Die Existenz n-dimensionaler Mengen J mit lauter trennbaren Punktpaaren wurde von St. Mazurkiewicz (Fund. Math. 10 (1927), S. 311—319) bewiesen, mit der verschärfenden und viel tiefere Hilfsmittel erfordernden Bedingung, dass J ein G_δ im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum sein sollte. Dass ohne diese Verschärfung eine sehr einfache, auch von Herrn Mazurkiewicz (S. 318) verwendete Beweisidee ausreichend ist, sollte in dieser kleinen Mitteilung gezeigt werden.

Sur la dimension de certains ensembles singuliers.

Par

Stefan Mazurkiewicz et Edward Szpilrajn (Warszawa).

Nous examinons dans la note présente la dimension de certains ensembles singuliers, notamment des ensembles indénombrables, „minces" au point de vue soit de la catégorie (n⁰ 2), soit de la mesure (n⁰ 3).

En particulier, chaque ensemble qui jouit de la propriété nommée (λ) (cf. n⁰ 2) étant toujours de I[e] catégorie (c. à d. de I[e] catégorie sur chaque ensemble parfait)[1]), il résulte de notre proposition 2 (i) que *si* $\aleph_1=\mathfrak{c}$, *il existe un ensemble toujours de I[e] catégorie de chaque dimension*[2]).

Nous nous appuyons essentiellement sur le résultat de M. Hilgers publié dans la note qui précède[3]).

Termes et notations. $\mathcal{E}^n$ désignera l'espace cartésien à n dimensions; $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert et $\mathcal{H}_0$ l'espace composé de tous les points de $\mathcal{H}$ n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées $\neq 0$.

Un ensemble E qui n'est pas de dimension finie est dit *de dimension dénombrable*, lorsqu'il existe une décomposition de E en une suite d'ensembles de dimension 0; il est *de dimension indénombrable* dans le cas contraire. L'espace $\mathcal{H}_0$ est de dimension dénombrable et l'espace $\mathcal{H}$ de dimension indénombrable[4]).

---

[1]) Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 269.

[2]) C'est la solution du problème 72, Fund. Math. 27 (1936), p. 293.

[3]) A. Hilgers, *Bemerkung zur Dimensionstheorie*, Fund. Math. 28 (1937), pp. 303 et 304.

[4]) W. Hurewicz, *Über unendlich dimensionale Punktmengen*, Proc. Akad. Amsterdam 31 (1928), pp. 918—922.

1. Soit (π) une propriété d'ensembles métriques assujettie aux conditions suivantes:

1^0 Il existe un ensemble linéaire Z de puissance $\mathfrak{c}$, jouissant de la propriété (π).

2^0 La propriété (π) est un invariant des transformations biunivoques, inverses aux transformations continues.

Chaque ensemble linéaire de puissance $\mathfrak{c}$ étant (d'après le théorème cité de M. Hilgers) image biunivoque et continue d'un ensemble de dimension n situé dans $\mathcal{E}^{n+1}$ ($n=1, 2, \ldots$) (ainsi que d'un ensemble de dimension dénombrable et de dimension indénombrable situés respectivement dans $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$), nous obtenons ce théorème:

(i) *Pour chaque propriété (π) satisfaisant aux conditions 1^0 et 2^0, il existe un ensemble de dimension n situé dans $\mathcal{E}^{n+1}$ (de même qu'un ensemble de dimension dénombrable dans $\mathcal{H}_0$ et un autre de dimension indénombrable dans $\mathcal{H}$) qui jouit de la propriété (π).*

Dans la suite nous examinons certaines propriétés satisfaisant aux conditions 1^0 et 2^0. Remarquons que la propriété „d'être un ensemble séparé entre chaque couple de ses points", considérée dans la note précitée de M. Hilgers, satisfait également à ces conditions.

2. Soit E un espace métrique séparable. Considérons la propriété suivante:

(λ) Chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ dans E.

On sait que la propriété (λ) satisfait à la condition 2^0 (pour $\pi=\lambda$) et qu'il existe un ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ jouissant de la propriété (λ) [5]. Par conséquent, il résulte de 1 (i) que

(i) *Si $\aleph_1=\mathfrak{c}$, il existe un ensemble de dimension n situé dans $\mathcal{E}^{n+1}$ (de même qu'un ensemble de dimension dénombrable dans $\mathcal{H}_0$ et un autre de dimension indénombrable dans $\mathcal{H}$) qui jouit de la propriété (λ).*

Voici une construction directe d'un ensemble plan de dimension 1 jouissant de la propriété (λ). Soient: $a=(0, 1)$, $b=(0, -1)$ et Z un ensemble indénombrable jouissant de la propriété (λ) et situé sur l'axe des abscisses. La classe K de tous les continus plans qui coupent le plan entre a et b étant de puissance $\mathfrak{c}$, il existe (d'après l'hypothèse du continu) une correspondance biunivoque entre K et Z: soit $K(x)$ le continu venant correspondre au point x. Pour chaque $x \in Z$, désignons par $P(x)$ la ligne polygonale axb. Soient: $p(x)$ un point quelconque de l'ensemble $K(x)\cdot P(x)$, qui est évidemment non vide, et E l'ensemble des point $p(x)$ où x parcourt l'ensemble Z. L'ensemble Z étant une image biunivoque et continue de E, ce dernier ensemble jouit de la propriété (λ). D'autre part, il résulte facilement d'un théorème de MM. Knaster et Kuratowski [6] que l'ensemble E est de dimension positive.

[5]) Cf. p. ex. Kuratowski, l. c., pp. 269 et 271.

Un ensemble de dimension indénombrable à propriété (λ) peut être obtenu également de la façon suivante. Comme l'a démontré M. Hurewicz à l'aide de l'hypothèse du continu, il existe dans $\mathcal{H}$ un ensemble indénombrable $\mathcal{E}$ jouissant de la propriété suivante:

(H) chaque sous-ensemble indénombrable de E est de dimension indénombrable [7]).

Or, nous allons démontrer que *la propriété (H) entraîne la propriété (λ)* [8]). Soient: E un ensemble à propriété (H) et D un sous-ensemble dénombrable de E. L'ensemble D est donc contenu dans un sous-ensemble K de E, lequel est un G_δ dans E de dimension 0. Il résulte de la propriété (H) que l'ensemble K est dénombrable et, par conséquent, que l'ensemble $D=K-(K-D)$, en tant que différence d'un ensemble G_δ (dans E) et d'un ensemble dénombrable, est également un G_δ dans E.

Considérons encore la propriété suivante de E:

(σ) Chaque ensemble F_σ dans E est un G_δ dans E [9]).

On démontre immédiatement que cette propriété équivaut à celle-ci: chaque ensemble borelien dans E est un F_σ et G_δ dans E.

(ii) *Chaque ensemble de dimension finie, jouissant de la propriété (σ) est de dimension 0* [10]).

Supposons qu'un ensemble E jouisse de la propriété (σ) et que $\dim(E)=n>0$. Il existe par conséquent une décomposition $E=K+H$ où K est un F_σ dans E de dimension $n-1$ et H un G_δ dans E de dimension 0 [11]). Selon la condition (σ), H est également un F_σ dans E, donc (d'après l'„Additionssatz" de la théorie de dimensions [12])) l'ensemble E serait de dimension $n-1$, contrairement à l'hypothèse.

[6]) B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), p. 233, th. XXXVII.

[7]) W. Hurewicz, *Une remarque sur l'hypothèse du continu*, Fund. Math. 19 (1932), p. 8.

[8]) M. Hausdorff a démontré que chaque ensemble à propriété (H) est toujours de I^e catégorie. Voir Fund. Math. 27 (1936), p. 293.

[9]) Cf. p. ex. Kuratowski, l. c., p. 272.

[10]) Cette proposition est due à M. Kuratowski. On ignore s'il existe un ensemble à propriété (σ) de dimension infinie.

[11]) Cf. p. ex. Kuratowski, l. c., p. 128.

[12]) Cf. p. ex. Kuratowski, l. c., p. 126, th. I.

La propriété (σ) entraîne évidemment la propriété (λ); d'autre part, il résulte des propositions (i) et (ii) que

(iii) *Si* $\aleph_1=\mathfrak{c}$, *la propriété* (λ) *n'entraîne pas la propriété* (σ).

3. E étant un espace métrique, appelons *mesure dans* E chaque fonction finie[13]) non négative d'ensemble borelien dans E, absolument additive et s'annulant pour les ensembles composés d'un seul point. Considérons la propriété suivante:

(β) Chaque mesure dans E s'annule identiquement.

On sait que la propriété (β) satisfait à la condition 2^0 (voir n^0 1) et qu'il existe un ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ jouissant de la propriété (β) [14]). Par conséquent, il résulte de 1(i) que

(i) *Si* $\aleph_1=\mathfrak{c}$, *il existe un ensemble de dimension* n *situé dans* $\mathcal{E}^{n+1}$ *(de même qu'un ensemble de dimension dénombrable dans* $\mathcal{H}_0$ *et un autre de dimension indénombrable dans* $\mathcal{H}$*) qui jouit de la propriété* (β).

Considérons enfin la propriété suivante d'un ensemble E:

(C) Il existe pour chaque suite $\{a_n\}$ de nombres positifs une décomposition $E=E_1+E_2+\ldots$ telle que $\delta(E_n)<a_n$ $(n=1, 2, \ldots.)$.

On sait que chaque ensemble jouissant de la propriété (C) jouit également de la propriété (β) [15]) et qu'il est de dimension 0 [16]). Or, nous voyons d'après (i) que

(ii) *Si* $\aleph_1=\mathfrak{c}$, *la propriété* (β) *n'entraîne pas la propriété* (C) [17]).

[13]) Cette prémisse est essentielle. P. ex. la mesure linéaire d'ensembles situés dans un carré n'est pas une mesure dans ce sens.

[14]) W. Sierpiński et E. Szpilrajn, *Remarque sur le problème de la mesure*, Fund. Math. 26 (1936), pp. 256—261.

[15]) Théorème de M. Poprougénko. Cf. E. Szpilrajn, *Remarques sur les fonctions complètement additives*, Fund. Math. 22 (1934), p. 311 et Sierpiński-Szpilrajn, l. c.

[16]) Car la propriété (C) entraîne la mesure linéaire nulle et celle-ci entraîne la dimension 0. Cf. E. Szpilrajn, *La mesure et la dimension*, Fund. Math. 28 (1937), p. 85.

[17]) Une autre démonstration de cette proposition se trouve dans l'article de M. E. Szpilrajn, *Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables* (en polonais), C. R. de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie 30 (1937).

Some theorems on orthogonal systems.

By

J. Marcinkiewicz and A. Zygmund (Wilno).

1. Let $\{\varphi_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ be an arbitrary system of functions orthonormal in an interval (a, b), that is

$$\int_a^b \varphi_m\varphi_n dx = 0 \qquad (m, n=1, 2, \ldots)$$

$$\int_a^b \varphi_n^2\, dx = 1 \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

(For simplicity we restrict ourselves to the case of real functions φ_n.)

From the last equations it follows, in particular, that all the functions $\varphi_n(x)$ are of the class $L^2(a, b)$. If therefore we consider the Fourier coefficients

$$c_n=\int_a^b f\varphi_n\, dx \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

of any function f, with respect to the system $\{\varphi_n\}$, we must, in the general case, assume that $f\in L^2(a, b)$. Otherwise, the integrals (1.1) may not exist.

In the case when the functions φ_n are uniformly bounded, the integrals (1.1) exist for every $f\in L(a, b)$. In this case, a number of results have been proved about the coefficients c_n. These results generalize the well-known Bessel's inequality and the Riesz-Fischer theorem [1]).

[1]) Cf. F. Riesz [1]; the results are reproduced in Kaczmarz and Steinhaus [1] and in Zygmund [1].