Soient: $\psi(x)$ une homéomorphie entre $\mathcal{E}$ et $\underset{y}{\mathrm{E}}[y<0]$ et $f(x)$ une fonction biunivoque telle que

$$f(M_1)=H_1,\quad f(M_2)=H_2,\quad f(M_3)=\psi(M),\quad f(x)=\psi(x)\quad \text{pour}\quad x\in\mathcal{E}-M.$$

La fonction biunivoque $f(x)$ est ainsi définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$ tout entier et on a

$$f(\mathcal{E})=f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)+f(\mathcal{E}-M)=H_1+H_2+\psi(M)+\psi(E-M)= \\ =H_1+H_2+\psi(\mathcal{E})=\mathcal{E}.$$

De plus, $f(x)$ est mesurable (L), comme égale à la fonction continue $\psi(x)$ en dehors de l'ensemble M de mesure nulle.

En posant $g(x)=x$ pour tout $x\in\mathcal{E}$, il résulte du corollaire 2 que la fonction $\varphi(x)=f^{-1}(x)$ est la seule qui remplit l'équation (1). Or, elle n'est pas mesurable (L), car l'ensemble

$$H_1=\underset{y}{\mathrm{E}}[y\geqslant 0]\,\underset{y}{\mathrm{E}}[f^{-1}(y)>0]$$

n'étant pas mesurable, l'ensemble $\underset{y}{\mathrm{E}}[f^{-1}(y)>0]$ ne l'est non plus.

Bemerkung zur Dimensionstheorie.

Von

A. Hilgers (Düsseldorf).

Satz. *X, Y seien separable Räume, X von der Mächtigkeit des Kontinuums. Dann ist X schlichtes stetiges Bild einer Menge J mit*

$$\dim J\geqslant \dim Y.$$

Beweis. $Z=(X,Y)$ sei der Produktraum. Jede Menge $J\subset Z$ hat eine gleichdimensionale Hülle H, die ein $G_{\delta\sigma}$ (in Z) ist:

$$J\subset H\subset Z,\qquad \dim J=\dim H,\qquad H=G_{\delta\sigma}.$$

Hierzu ist zu bemerken: wir lassen auch Mengen zu, die nicht von endlicher Dimension sind; eine solche Menge heisst (nach W. Hurewicz, Amst. Proc. 31 (1928), S. 916—922) *abzählbar-dimensional*, wenn sie Summe von abzählbar vielen nulldimensionalen Mengen ist, andernfalls *unabzählbar-dimensional*; zwei solche Mengen heissen von gleicher Dimension, wenn sie beide abzählbar- oder beide unabzählbar-dimensional sind. Ein n-dimensionales J $(n=0,1,2,\dots)$ lässt sich bekanntlich schon in ein n-dimensionales G_δ einschliessen, ein abzählbar-dimensionales J in ein ebenfalls abzählbar-dimensionales $G_{\delta\sigma}$; für ein unabzählbar-dimensionales J können wir den Raum Z als Hülle wählen.

Die $G_{\delta\sigma}$ in Z bilden ein System von der Mächtigkeit des Kontinuums und lassen sich also den Punkten $x\in X$ zuordnen; $H(x)$ durchlaufe alle $G_{\delta\sigma}$. Ferner betrachten wir die „Geraden" $x=$const. der „Ebene" Z, d. h. die Mengen (x,Y), und wählen eine eindeutige Abbildung $y=f(x)$ von X in Y folgendermassen:

(α) für $(x,Y)\subset H(x)$ sei $f(x)$ beliebig;

(β) für $(x,Y)-H(x)\neq 0$ sei $(x,f(x))$ ein Punkt dieser Menge.

Die Gleichung $y=f(x)$ definiert die Menge

$$J=\sum_x (x, f(x)),$$

von der X schlichte Projektion, also schlichtes stetiges Bild ist. Unter den $H(x)$ befindet sich eine gleichdimensionale Hülle von J, d. h. für ein gewisses x ist

$$J \subset H(x), \qquad \dim J = \dim H(x).$$

Für dieses x kann der Fall (β) nicht eintreten, weil dann der Punkt $(x, f(x))$ gleichzeitig zu $J \subset H(x)$ und nach (β) zu $Z - H(x)$ gehören würde. Also gilt (α) und

$$\dim J = \dim H(x) \geqslant \dim (x, Y) = \dim Y,$$

womit der Beweis geführt ist.

Beispiel. X sei nulldimensional; dann ist $\dim Z = \dim Y$, also auch $\dim J = \dim Y$. Jede nulldimensionale Menge X von der Mächtigkeit des Kontinuums ist also schlichtes stetiges Bild einer Menge J von beliebig vorgeschriebener (endlicher oder abzählbarer oder unabzählbarer) Dimension. Diese Mengen J haben wie X selbst lauter trennbare Punktpaare, d. h. für zwei verschiedene Punkte z_1, z_2 von J gibt es immer eine Zerstückelung $J=J_1+J_2$ in disjunkte, relativ abgeschlossene Mengen mit $z_1 \epsilon J_1$, $z_2 \epsilon J_2$, (J hat einpunktige Quasikomponenten). Die Existenz n-dimensionaler Mengen J mit lauter trennbaren Punktpaaren wurde von St. Mazurkiewicz (Fund. Math. 10 (1927), S. 311—319) bewiesen, mit der verschärfenden und viel tiefere Hilfsmittel erfordernden Bedingung, dass J ein G_δ im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum sein sollte. Dass ohne diese Verschärfung eine sehr einfache, auch von Herrn Mazurkiewicz (S. 318) verwendete Beweisidee ausreichend ist, sollte in dieser kleinen Mitteilung gezeigt werden.

Sur la dimension de certains ensembles singuliers.

Par

Stefan Mazurkiewicz et Edward Szpilrajn (Warszawa).

Nous examinons dans la note présente la dimension de certains ensembles singuliers, notamment des ensembles indénombrables, „minces“ au point de vue soit de la catégorie (n° 2), soit de la mesure (n° 3).

En particulier, chaque ensemble qui jouit de la propriété nommée (λ) (cf. n° 2) étant toujours de I^e catégorie (c. à d. de I^e catégorie sur chaque ensemble parfait)[1]), il résulte de notre proposition 2 (i) que *si $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, il existe un ensemble toujours de I^e catégorie de chaque dimension*[2]).

Nous nous appuyons essentiellement sur le résultat de M. Hilgers publié dans la note qui précède[3]).

Termes et notations. $\mathcal{E}^n$ désignera l'espace cartésien à n dimensions; $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert et $\mathcal{H}_0$ l'espace composé de tous les points de $\mathcal{H}$ n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées $\neq 0$.

Un ensemble E qui n'est pas de dimension finie est dit *de dimension dénombrable*, lorsqu'il existe une décomposition de E en une suite d'ensembles de dimension 0; il est *de dimension indénombrable* dans le cas contraire. L'espace $\mathcal{H}_0$ est de dimension dénombrable et l'espace $\mathcal{H}$ de dimension indénombrable[4]).

---

[1]) Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 269.

[2]) C'est la solution du problème 72, Fund. Math. 27 (1936), p. 293.

[3]) A. Hilgers, *Bemerkung zur Dimensionstheorie*, Fund. Math. 28 (1937), pp. 303 et 304.

[4]) W. Hurewicz, *Über unendlich dimensionale Punktmengen*, Proc. Akad. Amsterdam 31 (1928), pp. 918—922.