Sur l'équation fonctionnelle $g(x)=f\varphi(x)$.

Par

Stefania Braun (Warszawa).

Dans son travail *Sur les fonctions dépendantes* [1]), M. W. Sierpiński a établi, entre autres, une condition nécessaire et suffisante que doivent remplir deux fonctions données $f(x)$ et $g(x)$ de variable réelle, pour qu'il existe une fonction de variable réelle $\varphi(x)$ qui remplisse l'équation $g(x)=\varphi f(x)$.

En assujettissant les fonctions données $f(x)$ et $g(x)$ à certaines conditions supplémentaires (telles que continuité, représentabilité au sens de Baire, mesurabilité (L)), M. Sierpiński en a déduit la possibilité ou l'impossibilité de certaines propriétés de la fonction $\varphi(x)$.

L'article présent est consacré aux problèmes tout-à-fait analogues, mais concernant l'équation fonctionnelle

$$g(x)=f\,\varphi(x). \tag{1}$$

Toutes les fonctions considérées dans la suite seront des fonctions d'une variable réelle qui ne prennent que des valeurs réelles.

Termes et notations. $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble de tous les nombres réels, $\underset{x}{\mathrm{E}}[\;]$ l'ensemble de nombres réels satisfaisant à la condition entre crochets. Etant donné un ensemble $X\subset\mathcal{E}$ et une fonction $f(x)$ de variable réelle, $f(X)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ sur X (à distinguer de l'*image* de la fonction f, c. à d. de l'ensemble des points (x,y) où $x\in X$ et $y=f(x)$). $f(x)$ étant une fonction biunivoque, $f^{-1}(x)$ en désigne la fonction inverse (définie par conséquent seulement pour $x\in f(\mathcal{E})$).

[1]) ce volume, p. 66.

Théorème 1. *Etant donné deux fonctions quelconques $f(x)$ et $g(x)$, pour qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation* (1), *il faut et il suffit que*

$$g(\mathcal{E})\subset f(\mathcal{E}). \tag{s}$$

Démonstration. La condition étant évidemment nécessaire, il reste à en établir la suffisance.

Définissons d'abord une fonction $\psi(x)$ satisfaisant à la condition:

$$\text{Si}\quad x\in f(\mathcal{E}),\quad \text{on a}\quad f\psi(x)=x. \tag{2}$$

Une telle fonction existe, quelle que soit la fonction $f(x)$. Pour l'obtenir, il suffit 1° de choisir comme $\psi(y)$ un nombre x arbitraire dans chaque ensemble $\mathcal{E}_y=\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=y]$ correspondant à un nombre réel $y\in f(\mathcal{E})$, c. à d. *uniformiser* [2]) l'image de la fonction $f(x)$ relativement à l'axe $0Y$ et traiter l'ensemble ainsi obtenu comme l'image de la fonction $\psi(y)$ définie sur l'ensemble $f(\mathcal{E})$, 2° de poser $\psi(y)=0$ pour $y\in\mathcal{E}-f(\mathcal{E})$.

Soit maintenant

$$\varphi(x)=\psi\,g(x). \tag{3}$$

Pour tout $x\in\mathcal{E}$, on a alors, selon (s), $g(x)\in f(\mathcal{E})$, donc, d'après (2), $f\psi g(x)=g(x)$, d'où, selon (3), $f\varphi(x)=g(x)$, de sorte que la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation (1).

Corollaire 1. *Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont à la condition* (s) *et la fonction $f(x)$ est biunivoque, il existe exactement une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation* (1).

Il suffit de faire correspondre à tout $x\in\mathcal{E}$ un nombre réel $\varphi(x)$ satisfaisant à (1). Un tel nombre existe en vertu de (s), et il est unique par suite de la biunivocité de la fonction $f(x)$.

Corollaire 2. *Si la fonction $f(x)$ est biunivoque et $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}$, la fonction*

$$\varphi(x)=f^{-1}\,g(x) \tag{4}$$

est, quelle que soit $g(x)$, la seule fonction satisfaisant à l'équation (1).

En effet, la fonction (4) est alors définie pour tout $x\in\mathcal{E}$, d'où identiquement $f\varphi(x)\equiv ff^{-1}g(x)=g(x)$, c. à d. que $\varphi(x)$ remplit l'équation (1). En outre, elle est unique en vertu du corollaire 1.

[2]) Cf. N. Lusin, *Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles*, Mathematica IV (Cluj 1930), p. 59 ou C. R. Paris 189 (1930), p. 349.

Lemme 1. Si

1^0 *la fonction* $f(x)$ *est continue,*

2^0 *l'ensemble* $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=y]$ *est, pour tout* $y \epsilon f(\mathcal{E})$, *borné inférieurement (supérieurement),*

3^0 *il n'existe dans* $\mathcal{E}$ *aucune suite* $\{x_k\}$ *divergente vers* $-\infty$ $(+\infty)$ *et telle que la suite* $\{f(x_k)\}$ *converge vers un nombre de* $f(\mathcal{E})$,

la fonction

(5) $$\psi(y)=\inf \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=y] \qquad \left(\psi(y)=\sup \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=y]\right)$$

définie sur l'ensemble $f(\mathcal{E})$, *est semicontinue inférieurement (supérieurement) sur cet ensemble.*

Démonstration. Soient:

(6) $$y_0 \epsilon f(\mathcal{E}), \quad y_k \epsilon f(\mathcal{E}) \quad \text{pour} \quad k=1,2,3,\ldots \quad \text{et} \quad y_0=\lim_{k\to\infty} y_k,$$

(7) $$x_k=\psi(y_k) \quad \text{pour} \quad k=1,2,3,\ldots$$

On a donc d'après la définition de la fonction $\psi(x)$:

(8) $$f(x_k)=y_k \quad \text{pour} \quad k=1,2,3,\ldots,$$

d'où, selon (6), $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=y_0 \epsilon f(\mathcal{E})$. On en conclut en vertu de 3^0 que la suite $\{x_k\}$ est bornée inférieurement.

Soit

(9) $$x_0=\liminf_{k\to\infty} x_k$$

et $\{x_{k_i}\}$ une suite partielle telle que $x_0=\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i}$; il en résulte, la fonction $f(x)$ étant continue, que $f(x_0)=\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{k_i})=\lim\limits_{i\to\infty} y_{k_i}=y_0$, d'où, selon (5), $\psi(y_0)\leqslant x_0$, et d'après (9) et (7),

(10) $$\psi(y_0)\leqslant \liminf \psi(y_k).$$

Ainsi (6) entraîne (10), c. q. f. d.

Théorème 2. *Si, la condition* (s) *étant satisfaite,* $f(x)$ *et* $g(x)$ *sont continues et* $f(x)$ *satisfait en outre aux conditions* 1^0, 2^0 *et* 3^0, *il existe une fonction* $\varphi(x)$ *remplissant l'équation* (1) *et qui est semi-continue inférieurement (supérieurement).*

Démonstration. Soit $\psi(x)$ la fonction définie par la formule (5). D'après (s), la fonction

(11) $$\varphi(x)=\psi g(x)$$

est définie pour tout $x \epsilon \mathcal{E}$ et $f\psi(y)=y$ pour tout $y \epsilon f(\mathcal{E})$, donc à plus forte raison pour tout $y \epsilon g(\mathcal{E})$. Il en résulte que l'on a $f\varphi(x)= =f\psi(g(x))=g(x)$ pour tout $x \epsilon \mathcal{E}$, c. à d. que la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation (1). La fonction $g(x)$ étant continue et la fonction $\psi(y)$ semi-continue inférieurement sur $f(\mathcal{E})$, donc aussi, d'après (s), sur $g(\mathcal{E})$, la fonction (11) est semi-continue inférieurement.

Théorème 3. *Il existe deux fonctions continues* $f(x)$ *et* $g(x)$ *satisfaisant à* (s) *et pour lesquelles il n'existe aucune fonction continue* $\varphi(x)$ *remplissant l'équation* (1).

Démonstration. Soient: $g(x)=x$ et $f(x)$ la fonction définie par les conditions:

(12) $$f(x)=\begin{cases} x & \text{pour} \quad x<0, \\ 0 & \text{pour} \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x-1 & \text{pour} \quad 1<x. \end{cases}$$

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont continues et, d'après $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}$, satisfont à (s). Or, si $\varphi(x)$ remplit l'équation (1), on a selon (12)

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{pour} \quad x<0, \\ x+1 & \text{pour} \quad x>0. \end{cases}$$

Le point $x=0$ est donc un point de discontinuité de la fonction $\varphi(x)$.

Lemme 2. *Si* $f(x)$ *est une fonction continue, il existe une fonction* $\psi(x)$ *définie sur* $f(\mathcal{E})$, *de classe* $\leqslant 1$ *de Baire sur cet ensemble et qui satisfait à l'équation*

(13) $$f\psi(x)=x \qquad \textit{pour} \quad x \epsilon f(\mathcal{E}).$$

Démonstration. Soit I_n l'intervalle $-n\leqslant x\leqslant n$. Par suite de la continuité de $f(x)$, l'ensemble $I_n\cdot\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=y]$ est fermé, borné et non vide pour tout $y \epsilon f(I_n)$. Par conséquent, la fonction

(14) $$\psi_n(y)=\inf I_n\cdot\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=y]$$

est définie dans l'ensemble $f(I_n)$ et on a

(15) $$f\psi_n(y)=y \qquad \text{pour tout} \quad y \epsilon f(I_n).$$

Soit, pour $y \epsilon f(\mathcal{E})$, n_y le plus petit nombre naturel n tel que $y \epsilon f(I_n)$. Un tel n_y existe, car $\mathcal{E}=\sum_{n=1}^{\infty} I_n$.

Posons

(16) $$\psi(y)=\psi_{n_y}(y) \qquad \text{pour} \quad y \epsilon f(\mathcal{E}).$$

La fonction $\psi(y)$ coïncide donc sur l'ensemble $f(I_1)$ avec $\psi_1(y)$ et, pour $n=2,3,\ldots$, sur les ensembles $f(I_n)-f(I_{n-1})$ avec $\psi_n(y)$. Or, les fonctions $\psi_n(y)$ sont d'après le lemme 1 semicontinues inférieurement sur $f(I_n)$ pour $n=1,2,\ldots$, donc en particulier sur les ensembles $f(I_n)-f(I_{n-1})$ où $n=2,3,\ldots$ Par suite de la continuité de $f(x)$, l'ensemble $f(I_1)$ est fermé et les ensembles $f(I_n)-f(I_{n-1})$ sont des F_σ. Par conséquent, la fonction $\psi(y)$ est de classe $\leqslant 1$ de Baire [3]) sur $f(\mathcal{E})$. En outre, d'après (16) et (15) elle satisfait à l'équation (13), c. q. f. d.

Théorème 4. *Si, la condition* (s) *étant satisfaite, la fonction $f(x)$ est continue et la fonction $g(x)$ est de classe $\leqslant \alpha$ de Baire, il existe une fonction de classe $\leqslant \alpha+1$ de Baire remplissant l'équation* (1).

Démonstration. Soit $\psi(x)$ la fonction définie par les formules (14) et (16). D'après (s), la fonction $\varphi(x)=\psi g(x)$ est définie pour tout $x \epsilon \mathcal{E}$. La fonction $g(x)$ étant de classe $\leqslant \alpha$ et la fonction $\psi(x)$ de classe $\leqslant 1$ sur $f(\mathcal{E})$, donc aussi de classe $\leqslant 1$ sur $g(\mathcal{E}) \subset f(\mathcal{E})$, la fonction $\varphi(x)$ est de classe $\leqslant \alpha+1$ de Baire [4]). La fonction $\psi(x)$ remplissant l'équation (13) en vertu du lemme 2, on a $f\varphi(x)=f\psi g(x)=g(x)$ pour $x \epsilon \mathcal{E}$, de sorte que la fonction $\varphi(x)$ remplit l'équation (1), c. q. f. d.

Lemme 3. *Pour tout couple d'ensembles analytiques linéaires (non vides) A_1 et A_2, il existe une fonction $f(x)$ qui est*

1^0 *semicontinue supérieurement (inférieurement),*

2^0 *telle que l'on a*

(17) $$\begin{aligned} &\textit{soit} \quad f(\mathop{\mathrm{E}}_x[x\geqslant 0])=A_1 \quad \textit{et} \quad f(\mathop{\mathrm{E}}_x[x<0])=A_2,\\ &\textit{soit} \quad f(\mathop{\mathrm{E}}_x[x<0])=A_1 \quad \textit{et} \quad f(\mathop{\mathrm{E}}_x[x\geqslant 0])=A_2.\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $l_2 \leqslant l_1$ où $l_1 \epsilon A_1$ et $l_2 \epsilon A_2$. Posons:

$$H_1^1=A_1\cdot\mathop{\mathrm{E}}_x[x\leqslant l_1], \qquad H_1^2=A_1\cdot\mathop{\mathrm{E}}_x[x\geqslant l_1],$$
$$H_2^1=A_2\cdot\mathop{\mathrm{E}}_x[x\leqslant l_2], \qquad H_2^2=A_2\cdot\mathop{\mathrm{E}}_x[x\geqslant l_2].$$

[3]) C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa—Lwów 1933, p. 179 (IV, 1).
[4]) C. Kuratowski, ibid., (III).

Les ensembles H_i^j (où $i=1,2$ et $j=1,2$) sont donc analytiques (non vides) et on a

(18) $$\inf H_2^2=\sup H_2^1=l_2\leqslant l_1=\sup H_1^1=\inf H_1^2.$$

Tout ensemble analytique (non vide) est, d'après un théorème de M. Sierpiński [5]), l'ensemble des valeurs d'une fonction semicontinue supérieurement. En particulier, $\mathcal{E}$ étant l'image continue de l'intervalle ouvert et de la demi-droite fermée, il existe donc des fonctions semicontinues supérieurement $f_i^j(x)$ (où $i=1,2$ et $j=1,2$) définies respectivement:

$$f_1^1(x) \text{ sur } \mathop{\mathrm{E}}_x[1<x<2], \qquad f_1^2(x) \text{ sur } \mathop{\mathrm{E}}_x[x\geqslant 2],$$
$$f_2^1(x) \text{ sur } \mathop{\mathrm{E}}_x[-1<x<0], \qquad f_2^2(x) \text{ sur } \mathop{\mathrm{E}}_x[x\leqslant -1]$$

et telles que H_i^j soit l'ensemble des valeurs de $f_i^j(x)$. En vertu de (18), la fonction $f(x)$ définie dans $\mathcal{E}$ par les formules:

$$f(x)=\begin{cases} f_2^2(x) & \text{pour} \quad x\leqslant -1\\ f_2^1(x) & \text{pour} \quad -1<x<0\\ l_1 & \text{pour} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ f_1^1(x) & \text{pour} \quad 1<x<2\\ f_1^2(x) & \text{pour} \quad x\geqslant 2\end{cases}$$

est semicontinue supérieurement dans l'ensemble $\mathcal{E}$ tout entier. De plus:

$$f(\mathop{\mathrm{E}}_x[x\geqslant 0])=f(\mathop{\mathrm{E}}_x[0\leqslant x\leqslant 1])+f(\mathop{\mathrm{E}}_x[1<x<2])+f(\mathop{\mathrm{E}}_x[x\geqslant 2])=$$
$$=f_1^1(\mathop{\mathrm{E}}_x[1<x<2])+f_1^2([x\geqslant 2])=H_1^1+H_1^2=A_1,$$

$$f(\mathop{\mathrm{E}}_x[x<0])=f(\mathop{\mathrm{E}}_x[-1<x<0])+f(\mathop{\mathrm{E}}_x[x\leqslant -1])=$$
$$=f_2^1(\mathop{\mathrm{E}}_x[-1<x<0])+f_2^2(\mathop{\mathrm{E}}_x[x\leqslant -1])=H_1^2+H_2^2=A_2,$$

c. q. f. d.

[5]) Cf. W. Sierpiński, *Les ensembles analytiques et les fonctions semi-continues*, Bull. Int. de l'Acad. Pol. Cracovie 1927, p. 697.

Théorème 5. *Il existe une fonction continue $g(x)$ et une fonction semicontinue supérieurement (inférieurement) $f(x)$ dont l'ensemble des valeurs coïncide avec $\mathcal{E}$* [6]*), pour lesquelles l'équation* (1) *n'est remplie par aucune fonction $\varphi(x)$ rentrant dans la classification de Baire.*

Démonstration. Soit

$$\mathcal{E} = A_1 + A_2 \tag{19}$$

une décomposition de $\mathcal{E}$ en deux ensembles analytiques tels que, pour toute décomposition de $\mathcal{E}$ en deux ensembles analytiques $\mathcal{E}=H_1+H_2$ où $H_1 \subset A_1$ et $H_2 \subset A_2$, on ait l'inégalité $H_1 \cdot H_2 \neq 0$ [7]).

Par conséquent $A_1 \neq 0 \neq A_2$.

Il existe donc, en vertu du lemme 3, une fonction $f(x)$ semicontinue supérieurement et assujettie à l'alternative (17). Admettons p. ex. que c'est le cas $f(\underset{x}{\mathrm{E}}[x \geqslant 0]) = A_1$ et $f(\underset{x}{\mathrm{E}}[x<0]) = A_2$ qui se présente.

Soient: $g(x)=x$ et $\varphi(x)$ une fonction satisfaisant à l'équation (1). Désignons par I l'image de la fonction $x=\varphi(y)$ et posons:

$$I_1 = I \cdot \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \geqslant 0], \qquad I_2 = I \cdot \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x<0]. \tag{20}$$

La fonction $x=\varphi(y)$ étant univoque, chaque parallèle à l'axe $0X$ rencontre l'ensemble I exactement en un point. Par conséquent, en désignant respectivement par P_i ($i=1$ et 2) les projections de I_i sur l'axe $0Y$, on a:

$$\mathcal{E} = P_1 + P_2, \tag{21}$$

$$P_1 \cdot P_2 = 0. \tag{22}$$

[6]) Il en résulte que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ remplissent la condition (s).

[7]) L'existence de la décomposition (19) s'obtient p. ex., en prenant les complémentaires de deux ensembles CA disjoints et non séparables B. Cf. N. Lusin, *Sur un principe général de la théorie des ensembles analytiques*, C. R. Ac. Sc. vol. 189 (1929), p. 390, *Sur les points d'unicité d'un ensemble mesurable B*, ibid. p. 423, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, pp. 220, 260 et 263; v. aussi P. Novikoff, *Sur les fonctions implicites mesurables B*, Fund. Math. 17 (1931), p. 16—25 et W. Sierpiński, *Sur deux complémentaires analytiques non séparables B*, ibid. p. 296.

L'existence de tels ensembles montre que la classe des ensembles analytiques ne satisfait pas à l'ainsi dit *théorème de réduction* (cf. C. Kuratowski, *Sur les théorèmes de la séparation dans la Théorie des ensembles*, Fund. Math. 26 (1936), p. 183).

Si $(x, y) \in I_1$, on a $x \geqslant 0$ et $\varphi(y)=x$ d'après (20), donc $y=f\varphi(y)=f(x) \in A_1$, c. à d.

$$P_1 \subset A_1. \tag{23}$$

Pareillement, si $(x, y) \in I_2$, on a $x<0$ et $\varphi(y)=x$ d'après (20), donc $y=f\varphi(y)=f(x) \in A_2$, c. à d.

$$P_2 \subset A_2. \tag{24}$$

Les formules (21), (23), (24) et (22) montrent en vertu de la définition des ensembles A_1 et A_2 que les ensembles P_1 et P_2 ne sont pas analytiques à la fois. Il en résulte que $\varphi(x)$ n'est pas une fonction de Baire, car dans le cas contraire les ensembles I_1 et I_2 seraient boreliens et, par conséquent, leurs projections P_1 et P_2 seraient des ensembles analytiques.

Remarques. Nous avons établi en même temps l'existence d'*un ensemble plan I qui est l'image d'une fonction $f(x)$ semicontinue supérieurement* (inférieurement) *dont l'ensemble des valeurs coïncide avec $\mathcal{E}$ et qui ne peut être uniformisé relativement à l'axe $0Y$ par aucun ensemble analytique.*

En modifiant légèrement notre démonstration, on peut démontrer que ce théorème subsiste, si l'on y remplace les mots „semicontinue supérieurement" par „définie et continue sur l'ensemble des nombres irrationnels".

Notre démonstration n'est d'ailleurs qu'une modification du raisonnement par lequel M. Novikoff a établi l'existence d'un I borelien dont la projection sur l'axe $0Y$ est un segment et qui présente la même impossibilité d'uniformisation [8]).

Théorème 6. *Il existe une fonction continue $g(x)$ et une fonction $f(x)$ mesurable (L) dont l'ensemble des valeurs coïncide avec $\mathcal{E}$, pour lesquelles l'équation* (1) *n'est remplie par aucune fonction $\varphi(x)$ mesurable (L).*

Démonstration. Soit sur l'axe $0X$

$$M = M_1 + M_2 + M_3,$$

où

$$M_1 \subset \underset{x}{\mathrm{E}}[x>0], \qquad M_2 \subset \underset{x}{\mathrm{E}}[x<0], \qquad M_3 \subset \mathcal{E} - (M_1+M_2),$$

$$\overline{\overline{M}}_1 = \overline{\overline{M}}_2 = \overline{\overline{M}}_3 = \mathfrak{c} \qquad \text{et} \qquad \text{mes}\, M = 0.$$

Soit sur l'axe $0Y$:

$$H_1 \subset \underset{y}{\mathrm{E}}[y>0], \qquad H_2 = \underset{y}{\mathrm{E}}[y \geqslant 0] - H_1, \qquad \overline{\overline{H}}_1 = \overline{\overline{H}}_2 = \mathfrak{c}$$

et H_1 non mesurable (L).

[8]) Cf. M. Novikoff, l. c., p. 25.

Soient: $\psi(x)$ une homéomorphie entre $\mathcal{E}$ et $\underset{y}{\mathrm{E}}[y<0]$ et $f(x)$ une fonction biunivoque telle que

$$f(M_1)=H_1,\quad f(M_2)=H_2,\quad f(M_3)=\psi(M),\quad f(x)=\psi(x)\quad \text{pour}\quad x\in\mathcal{E}-M.$$

La fonction biunivoque $f(x)$ est ainsi définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$ tout entier et on a

$$f(\mathcal{E})=f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)+f(\mathcal{E}-M)=H_1+H_2+\psi(M)+\psi(E-M)=$$
$$=H_1+H_2+\psi(\mathcal{E})=\mathcal{E}.$$

De plus, $f(x)$ est mesurable (L), comme égale à la fonction continue $\psi(x)$ en dehors de l'ensemble M de mesure nulle.

En posant $g(x)=x$ pour tout $x\in\mathcal{E}$, il résulte du corollaire 2 que la fonction $\varphi(x)=f^{-1}(x)$ est la seule qui remplit l'équation (1). Or, elle n'est pas mesurable (L), car l'ensemble

$$H_1=\underset{y}{\mathrm{E}}[y\geqslant 0]\,\underset{y}{\mathrm{E}}[f^{-1}(y)>0]$$

n'étant pas mesurable, l'ensemble $\underset{y}{\mathrm{E}}[f^{-1}(y)>0]$ ne l'est non plus.

Bemerkung zur Dimensionstheorie.

Von

A. Hilgers (Düsseldorf).

Satz. *X, Y seien separable Räume, X von der Mächtigkeit des Kontinuums. Dann ist X schlichtes stetiges Bild einer Menge J mit*

$$\dim J\geqslant\dim Y.$$

Beweis. $Z=(X,Y)$ sei der Produktraum. Jede Menge $J\subset Z$ hat eine gleichdimensionale Hülle H, die ein $G_{\delta\sigma}$ (in Z) ist:

$$J\subset H\subset Z,\qquad \dim J=\dim H,\qquad H=G_{\delta\sigma}.$$

Hierzu ist zu bemerken: wir lassen auch Mengen zu, die nicht von endlicher Dimension sind; eine solche Menge heisst (nach W. Hurewicz, Amst. Proc. 31 (1928), S. 916—922) *abzählbar-dimensional*, wenn sie Summe von abzählbar vielen nulldimensionalen Mengen ist, andernfalls *unabzählbar-dimensional*; zwei solche Mengen heissen von gleicher Dimension, wenn sie beide abzählbar- oder beide unabzählbar-dimensional sind. Ein n-dimensionales J $(n=0,1,2,\dots)$ lässt sich bekanntlich schon in ein n-dimensionales G_δ einschliessen, ein abzählbar-dimensionales J in ein ebenfalls abzählbar-dimensionales $G_{\delta\sigma}$; für ein unabzählbar-dimensionales J können wir den Raum Z als Hülle wählen.

Die $G_{\delta\sigma}$ in Z bilden ein System von der Mächtigkeit des Kontinuums und lassen sich also den Punkten $x\in X$ zuordnen; $H(x)$ durchlaufe alle $G_{\delta\sigma}$. Ferner betrachten wir die „Geraden“ $x=$const. der „Ebene“ Z, d. h. die Mengen (x, Y), und wählen eine eindeutige Abbildung $y=f(x)$ von X in Y folgendermassen:

(α) für $(x,Y)\subset H(x)$ sei $f(x)$ beliebig;
(β) für $(x,Y)-H(x)\neq 0$ sei $(x,f(x))$ ein Punkt dieser Menge.