the required formula we have only to show that $\int_0^{\nu_1}\{g_1(\nu)-g(\nu)\}\,dX(\nu)$ vanishes for all ν_1. This is true [13]), since $g_1(\nu)-g(\nu)$ vanishes except on the set EN, of measure zero, and $X(\nu)$ is VBG^* on $E\supset EN$. (For ν, t are different parameters for the same curve Γ, and $x(t)$ is VBG^* on $e=f^{-1}[F(E)]$.)

The corollary follows at once. E reduces to the whole interval, so that $g(\nu)$ vanishes, and the PS-integral reduces to an ordinary Perron integral.

---

[13]) loc. cit., Theorem 10.

Warszawa, 1936.

Ultraconvergence et espace fonctionnel.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1. Cette note contient un théorème général sur l'existence de séries de puissances *ultraconvergentes* [1]), basé sur l'étude d'un espace fonctionnel.

2. Désignons par R_2 le plan de la variable complexe z. G étant un domaine *simplement connexe*, désignons par $\mathfrak{A}(G)$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes dans G. Nous définirons dans $\mathfrak{A}(G)$, considéré comme un espace fonctionnel, une *distance* par une méthode due en principe à M. Fréchet. Choisissons dans G un point arbitraire z', posons $\lambda'=\varrho(z', R_2-G)$, enfin désignons pour $0<\lambda<\lambda'$ par $G^*(\lambda)$ l'ensemble des $z\in G$ tels que

$$(1)\qquad \varrho(z, R_2-G)>\lambda; \qquad |z-z'|<\frac{1}{\lambda}.$$

Soit $G(\lambda)$ le composant de $G^*(\lambda)$ contenant z'. $G(\lambda)$ est borné, simplement connexe, on a $\overline{G(\lambda_1)}\subset G(\lambda_2)\subset G$ pour $\lambda_1>\lambda_2$ et, pour une suite $\{\lambda_j\}$, la condition $\lambda_j\to 0$ entraîne $\sum_{j=1}^{\infty} G(\lambda_j)=G$.

Posons pour $f, g\in\mathfrak{A}(G)$:

$$(2)\qquad \sigma_G(f,0)=\operatorname*{Inf}_{\lambda}\,(\lambda+\operatorname*{Sup}_{z\in G(\lambda)}|f(z)|),$$

$$(3)\qquad \sigma_G(f,g)=\sigma_G(f-g,0).$$

---

[1]) Une série de puissances S est dite *ultraconvergente* dans un domaine U contenant le cercle de convergence de S, si une suite de sommes partielles de S converge dans U, la convergence étant uniforme dans tout sous-ensemble fermé et borné de U. L'ultraconvergence a été étudiée par M. M. Jentsch, Ostrowski et Bourion.

$\sigma_G(f, g)$ est alors une distance entre f et g, et $\mathfrak{A}(G)$ un espace métrique, séparable et complet. Pour une suite $\{f_n\}$, $f, f_n \in \mathfrak{A}(G)$, la relation $\sigma_G(f_n, f) \to 0$ exprime que f_n converge dans G vers f, la convergence étant uniforme dans tout sous-ensemble fermé et borné de G.

3. *Théorème.* *G étant un domaine simplement connexe, l'ensemble $\mathfrak{H}$ de toutes les fonctions $f \in \mathfrak{A}(G)$ telles que:*

I) *G est le domaine d'existence de f,*

II) *toute série de Taylor de f est ultraconvergente dans G,*

est un résiduel dans $\mathfrak{A}(G)$.

4. *Lemme.* *L'ensemble $\mathfrak{B}$ des fonctions $f \in \mathfrak{A}(G)$ telles que G est le domaine d'existence de f, (c. à d. que f est non prolongeable au delà de G) est un résiduel dans $\mathfrak{A}(G)$* [2].

Soit $H = \bar{G} - G$, B un sous-ensemble dénombrable de H dense dans H; $b_1, b_2, \dots$ les points de B. A tout b_j on peut faire correspondre une suite $\{b_{j,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$ telle que $b_{j,k} \in G$ et $\lim\limits_{k\to\infty} b_{j,k} = b_j$. Soit $\mathfrak{B}_{j,m,k}$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{A}(G)$ telles que $|f(b_{j,k})| > m$. Posons:

$$\mathfrak{B}^* = \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_{j,m,k}. \tag{4}$$

Evidemment $\mathfrak{B}_{j,m,k}$ est un ensemble ouvert, donc $\mathfrak{B}^*$ un G_δ dans $\mathfrak{A}(G)$. Soient: $g \in \mathfrak{A}(G)$, $0 < \eta < \lambda'$, j, m fixes. Comme $b_j \operatorname{non} \in G$, on a aussi $b_j \operatorname{non} \in \overline{G(\eta/4)}$; il existe donc un indice k_1 pour lequel $b_{j,k_1} \operatorname{non} \in \overline{G(\eta/4)}$. Comme $G(\eta/4)$ est simplement connexe, il existe d'après le théorème de Runge un polynome $p(x)$ tel que:

$$|p(b_{j,k})| > m, \tag{5}$$

$$|p(z) - g(z)| \leqslant \eta/3 \qquad \text{pour} \quad z \in \overline{G(\eta/3)} \subset G(\eta/4). \tag{6}$$

D'après (5) $p \in \mathfrak{B}_{j,m,k_1} \subset \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_{j,m,k}$ et d'après (6) $\sigma_G(p, q) < \eta$; par conséquent l'ensemble $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_{j,m,k}$ est dense dans $\mathfrak{A}(G)$ et $\mathfrak{B}^*$ en est un résiduel.

---

[2]) Ce lemme est une généralisation d'un théorème de MM. Kierst et Szpilrajn, Fund. Math. 21 (1933), p. 276.

D'autre part, si $f \in \mathfrak{B}^*$, on a $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |f(b_{j,k})| = +\infty$ pour $j = 1, 2, \dots$. Donc, comme $\bar{B} = H$, f n'est pas prolongeable au delà de G, c. à d. $f \in \mathfrak{B}$. Ainsi $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$ et le lemme est démontré.

5. *Lemme.* *La dérivation est une opération fonctionnelle uniformément continue dans $\mathfrak{A}(G)$.*

Autrement dit, à tout $2\eta > 0$ on peut faire correspondre un $\eta_1 > 0$ tel que pour $f, g \in \mathfrak{A}(G)$ l'inégalité $\sigma_G(f, g) < \eta_1$ entraîne $\sigma_G(f', g') < 2\eta$.

On peut supposer sans restreindre la généralité que $\eta < 1$ et $\eta < \lambda'$. Posons $\eta_1 = \eta^2/4$. L'inégalité $\sigma_G(f, g) < \eta_1$ entraîne alors

$$|f(x) - g(x)| < \eta^2/4 \tag{7}$$

pour $x \in G(\eta^2/4)$, donc à fortiori pour $x \in G(\eta/4)$. Soient: $z \in G(\eta/2)$ et K_z la circonférence de centre z et de rayon $\eta/4$. Alors $K_z \subset G(\eta/4)$, de sorte que l'on a (7) pour $x \in K_z$. Pour $z \in G(\eta/2)$, on a donc:

$$f'(z) - g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(K_z)} \frac{f(x) - g(x)}{(x - z)^2}\, dx, \tag{8}$$

$$|f'(z) - g'(z)| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\eta^2}{4} \cdot \frac{16}{\eta^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\eta}{4} = \eta, \tag{9}$$

$$\sigma_G(f', g') \leqslant \frac{\eta}{2} + \eta < 2\eta, \tag{10}$$

ce qui démontre le lemme.

6. Soit $f \in \mathfrak{A}(G)$. Nous désignons par $p_u^{(f)}(z)$ la série de Taylor de f au point $u \in G$ et, pour $k = 0, 1, 2, \dots$, par $p_{u,k}^{(f)}(z)$ les sommes partielles de $p_u^{(f)}(z)$, c. à d.:

$$p_u^{(f)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(s)}(u)}{s!} (z - u)^s, \tag{11}$$

$$p_{u,k}^{(f)}(z) = \sum_{s=0}^{k} \frac{f^{(s)}(u)}{s!} (z - u)^s. \tag{12}$$

7. Lemme. *L'opération fonctionnelle $p^{(f)}_{u,k}$ est pour $k=0,1,2,\ldots$ et $u\in G$ continue par rapport à f, la continuité étant uniforme par rapport à u dans tout sous-ensemble fermé et borné de G.*

Autrement dit: k étant fixe, on peut faire correspondre à chaque $\eta>0$ un $\mu>0$ tel que pour $u\in\overline{G(\eta)}$ et $f,g\in\mathfrak{A}(G)$ l'inégalité

$$\sigma_G(f,g)<\mu \tag{13}$$

entraîne

$$\sigma_G(p^{(f)}_{u,k},p^{(g)}_{u,k})<\eta. \tag{14}$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer $\eta<\lambda'$ et $\eta<1$. Soit $\mu_1=\frac{\eta}{2}e^{-3/\eta}<\eta$. D'après **5**, nous pouvons determiner $\mu>0$ de manière que (13) entraîne

$$\sigma_G(f^{(s)},g^{(s)})<\mu_1 \qquad \text{pour} \quad s=0,1,2,\ldots,k. \tag{15}$$

Il résulte de (15) que

$$|f^{(s)}(u)-g^{(s)}(u)|<\mu_1 \qquad \text{pour} \quad s=0,1,2,\ldots,k \quad \text{et} \quad u\in G(\mu_1). \tag{16}$$

On aura donc d'après (1) pour $u\in\overline{G(\eta)}\subset G(\mu_1)$ et $z\in G(\eta/2)$:

$$|p^{(f)}_{u,k}(z)-p^{(g)}_{u,k}(z)|<\mu_1 e^{|z-u|}<\mu_1 e^{3/\eta}=\eta/2. \tag{17}$$

Ainsi (13) et $u\in\overline{G(\eta)}$ entraînent (14), c. q. f. d.

8. Corollaire. *Soit $\beta>0$ et k fixe. L'ensemble des fonctions $f\in\mathfrak{A}(G)$ telles que*

$$\sigma_G(f,p^{(f)}_{u,k})<\beta \qquad \textit{pour} \quad u\in\overline{G(\beta)} \tag{18}$$

est ouvert dans $\mathfrak{A}(G)$.

9. Démonstration du théorème 3. Désignons par $\mathfrak{H}_{m,r}$ où $m=1,2,\ldots$ et $r=0,1,2,\ldots$ l'ensemble des $f\in\mathfrak{A}(G)$ telles que

$$\sigma_G(f,p^{(f)}_{u,r})<1/m \qquad \text{pour} \quad u\in\overline{G(1/m)}. \tag{19}$$

Posons:

$$\mathfrak{H}_m=\sum_{r=m}^{\infty}\mathfrak{H}_{m,r}, \tag{20}$$

$$\mathfrak{H}^*=\prod_{m=1}^{\infty}\mathfrak{H}_m. \tag{21}$$

D'après **8**, $\mathfrak{H}_{m,r}$, donc aussi $\mathfrak{H}_m$, est ouvert dans $\mathfrak{A}(G)$. Par conséquent $\mathfrak{H}^*$ est un G_δ dans $\mathfrak{A}(G)$.

Soient: $0<\eta<\lambda'$ et $g\in\mathfrak{A}(G)$. Le domaine $G(\eta/3)$ étant simplement connexe, il existe donc d'après le théorème de Runge et la relation $\overline{G(\eta/2)}\subset G(\eta/3)$ un polynome $q(z)$ pour lequel

$$\sup_{z\in G(\eta/2)}|g(z)-q(z)|<\eta/2, \tag{22}$$

d'où

$$\sigma_G(g,q)<\eta. \tag{23}$$

Soit s un entier supérieur à m et au dégré du polynome $q(z)$. Alors, quel que soit u, on aura $p^{(q)}_{u,s}=q$, donc $\sigma_G(q,p^{(q)}_{u,s})=0<1/m$, de sorte que $q\in\mathfrak{H}_{m,s}\subset\mathfrak{H}_m$. Par conséquent $\mathfrak{H}_m$ est dense dans $\mathfrak{A}(G)$ pour $m=1,2,\ldots$. $\mathfrak{H}^*$ et, d'après **4**, $\mathfrak{B}\mathfrak{H}^*$ est donc un résiduel dans $\mathfrak{A}(G)$.

Soit maintenant $f\in\mathfrak{B}\mathfrak{H}^*$. Alors G est le domaine d'existence de f. D'autre part, $f\in\mathfrak{H}_m$, pour $m=1,2,\ldots$. A chaque m correspond donc un $r_m\geqslant m$ tel que $f\in\mathfrak{H}_{m,r_m}$. Donc

$$\sigma_G(f,p^{(f)}_{u,r_m})<1/m \qquad \text{pour} \quad u\in G(1/m) \quad \text{et} \quad m=1,2,\ldots. \tag{24}$$

Soit $u_0\in G$. Il existe alors un m_0 tel que $u_0\in G(1/m)$ pour $m\geqslant m_0$, d'où

$$\sigma_G(f,p^{(f)}_{u_0,r_m})<1/m \qquad \text{pour} \quad m=m_0,\ m_0+1,\ldots \tag{25}$$

Ainsi la suite $\{p^{(f)}_{u_0,r_m}\}$ converge vers f dans G, la convergence étant uniforme dans tout sous-ensemble fermé et borné de G. Donc, $p^{(f)}_{u_0}$ est ultraconvergente dans G pour tout $u_0\in G$, c. à d. $f\in\mathfrak{H}$, et le théorème est démontré.

10. Corollaire. *G étant un domaine simplement connexe, il existe une fonction $f(z)$ possédant G comme domaine d'existence et telle que toutes ses séries de Taylor sont ultraconvergentes dans G.*

Warszawa, 22. XII. 1936.