Man ersieht ferner leicht, daß die Zuordnung von β zu α eine eineindeutige Abbildung der Menge der natürlichen Zahlen auf sich selbst ist. Wir bezeichnen diese Abbildung, d. h. dieses Element von S_∞, mit $s(n)$.

Betrachten wir nun den Automorphismus von S_∞:

$$\Phi(x) = s^{-1} F(x)\, s.$$

Es ist unser Zweck zu zeigen, daß

$$\Phi(x) \equiv x$$

ist. Man beachte, daß im Falle, wo x eine Transposition ist, dies direkt aus der Definition der Abbildung s folgt. Im Falle, wo x ein beliebiges Element von der Ordnung 2 ist, wird der Beweis indirekt geführt.

Es sei nämlich x_0 von der Ordnung 2 und $y_0 = \Phi(x_0) \neq x_0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $x_0(n_1) = n_2$ und $y_0(n_1) \neq n_2$ voraussetzen. Es sei z die Transposition (n_1, n_2). Man sieht, daß während das Element zx_0 von der Ordnung 2, das Element zy_0 von einer höheren Ordnung ist. Dies ist ein Widerspruch, da Φ ein Isomorphismus ist, woraus

$$\Phi(zx_0) = \Phi(z)\,\Phi(y_0) = zy_0 \qquad (z = \Phi(z)\ !)$$

folgt.

Um jetzt zu zeigen, daß $\Phi(x)$ überall, auch für die Elemente x höherer Ordnung als 2, identisch gleich x ist, benutzen wir die Tatsache, daß jedes Element z von S_∞ Produkt zweier Elemente von der Ordnung 2 ist:

$$z = xy, \qquad x^2 = y^2 = 1.$$

Dies folgt aus der Zerlegung von z in Zyklen und aus der Formel

$$(\ldots, 6, 4, 2, 1, 3, 5, \ldots) = [(1,2)\,(3,4)\ldots]\cdot[(1)\,(2,3)\,(4,5)\ldots]$$

sowie aus analogen Formeln für endliche Zyklen.

Es sei jetzt z ein beliebiges Element von S_∞. Wir können x und y von der Ordnung 2 finden, derart daß — wie wir schon wissen — $\Phi(x) = x$, $\Phi(y) = y$ gelte, und daß $z = xy$ sei. Es ist dann

$$\Phi(z) = \Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y) = xy = z, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ein analoger Satz kann für höhere Mächtigkeiten bewiesen werden:

Ist N eine Menge von beliebiger unendlicher Mächtigkeit, $S(N)$ die Gruppe aller Permutationen der Menge N, so ist jeder Automorphismus von $S(N)$ in der Gestalt $F(x) = s\,x\,s^{-1}$, wo $s \in S(N)$, darstellbar.

Dagegen bleibt die Frage nach der allgemeinen Gestalt eines mehrstufigen Isomorphismus, der S_∞ auf eine Teilmenge abbildet, offen.

Über Abbildungen einer abstrakten Menge auf ihre Teilmengen.

Von

J. Schreier (Drohobycz).

In einer mit S. Ulam gemeinsam veröffentlichten Note[1]) haben wir bewiesen, daß die Gruppe S_∞ aller Permutationen (d. h. eineindeutiger Abbildungen auf sich selbst) einer abzählbaren Menge nur *innere* Automorphismen besitzt; m. a. W. daß die Automorphismengruppe von S_∞ mit S_∞ isomorph ist. Diese Isomorphie ist, wie man leicht bemerkt, einstufig. Der Satz gilt aber auch für die Permutationen einer Menge von beliebiger unendlicher Mächtigkeit.

Es sei nun N eine gegebene Menge. $S(N)$ bezeichne die Menge aller Abbildungen der Menge N auf eine Teilmenge. Für je zwei Elemente f und g von $S(N)$, sei das Produkt fg durch die Formel

$$fg = f[g(n)] \qquad (n \in N)$$

erklärt. Damit bildet $S(N)$ nach der Terminologie von Garret Birkhoff[2]) eine Algebra.

Wir fragen nach der Automorphismengruppe dieser Algebra, d. h. nach der Gruppe der eineindeutigen Abbildungen F von $S(N)$ auf sich selbst, welche die Beziehung

$$(1) \qquad F(fg) = F(f)\,F(g) \qquad (f, g \in S(N))$$

erfüllen. Wir wollen beweisen, daß diese Gruppe mit der Gruppe aller Permutationen der Menge N identisch ist. Wir beweisen also den

[1]) J. Scheier und S. Ulam, *Über die Automorphismen der Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge*, Fund. Math. 28, S. 258—260.

[2]) Garret Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. Vol. 31 (1935), S. 433—454.

Satz. *Jede eineindeutige, die Beziehung* (1) *erfüllende Abbildung F der Menge $S(N)$ auf sich selbst hat die Gestalt $F(f)=\varphi f \varphi^{-1}$, wo φ eine Permutation der Menge N ist.*

Für ein gegebenes $n \epsilon N$ bezeichnen wir mit f_n die Funktion $f(m)\equiv n$ $(m \epsilon N)$. Für jedes $\varphi \epsilon S(N)$ gilt $f_n \varphi = f_n$, so daß $F(f_n \varphi) = F(f_n) F(\varphi)$. Andererseits ist $F(f_n \varphi) = F(f_n)$. Also

$$F(f_n) F(\varphi) = F(f_n). \tag{2}$$

Ist φ beliebig, so ist auch $F(\varphi)$ beliebig. Nimmt aber $F(f_n)$ zwei verschiedene Werte an, so kann für ein $F(\varphi)$, welches zwei Elemente vertauscht, in denen $F(f_n)$ verschiedene Werte annimmt, die Beziehung (2) nicht bestehen. Daher ist $F(f_n)$ mit einer Funktion f_m identisch. Auf diese Weise ordnet die Abbildung F jedem $n \epsilon N$ ein $m \epsilon N$ derart zu, daß $F(f_n) = f_m$ gilt. Man ersieht leicht, daß dadurch eine Permutation $\varphi_F(n)$ der Menge N erklärt wird.

Nun behaupten wir, daß

$$F(f) = \varphi_F f \varphi_F^{-1} \qquad (f \epsilon S(N)) \tag{3}$$

gilt. Diese Formel ergibt dann die gewünschte Zuordnung zwischen der Automorphismengruppe von $S(N)$ und der Permutationsgruppe der Menge N.

Die Formel (3) ist der Formel

$$\Phi(f) = \varphi_F^{-1} F(f) \varphi_F = f \qquad f \epsilon S(N) \tag{4}$$

äquivalent. Für $f = f_n$ $(n \epsilon N)$ folgt aber (4) direkt aus der Definition der Permutation φ_F und aus den Beziehungen $F(f_n) = f_m$, $f_m \varphi_F = f_m$. Es genügt also zu beweisen, daß eine Abbildung $\Phi(f)$ von $S(N)$ auf sich, welche die Bedingungen

$$\Phi(f_n) = f_n \qquad (n \epsilon N),$$

$$\Phi(fg) = \Phi(f) \Phi(g) \qquad (f, g \epsilon S(N))$$

erfüllt, eine Identität ist:

$$\Phi(f) = f \qquad (f \epsilon S(N)).$$

Wäre in der Tat für ein gewisses $\psi \epsilon S(N)$ und ein $n \epsilon N$

$$\Phi \psi(n) \neq \psi(n), \tag{5}$$

so hätten wir wegen

$$\psi f_n = f_{\psi(n)}, \qquad \Phi(\psi f_n) = \Phi(f_{\psi(n)}) = f_{\psi(n)},$$

$$\Phi(\psi f_n) = \Phi(\psi) \Phi(f_n) = \Phi(\psi) f_n = f_{\Phi\psi(n)},$$

die Gleichheit:

$$f_{\psi(n)} = f_{\Phi\psi(n)},$$

also einen Widerspruch mit (5).

Die angegebene Beweismethode liefert verschiedene Verallgemeinerungen, z. B.:

Es seien A und B zwei beliebige Mengen, $S(A,B)$ die Menge aller A in einen Teil von B abbildenden Funktionen. Jede eineindeutige Abbildung Φ der Räume $S(A)$, $S(B)$, $S(A,B)$ und $S(B,A)$ auf sich, welche die Beziehung

$$\Phi(fg) = \Phi(f) \Phi(g) \qquad (f \epsilon S(A,B),\ g \epsilon S(A,B))$$

erfüllt, ist von der Gestalt:

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \varphi^{-1} f g && \text{für } f \epsilon S(A), \\ \Phi(g) &= \psi^{-1} g \psi && \text{für } g \epsilon S(B), \\ \Phi(h) &= \varphi^{-1} h \psi && \text{für } h \epsilon S(A,B), \\ \Phi(h_1) &= \psi^{-1} h_1 \varphi && \text{für } h_1 \epsilon S(B,A), \end{aligned}$$

wo φ bzw. ψ Permutationen der Menge A bzw. B sind.

Ein anderes Beispiel stellt folgender Satz dar: Es sei Q eine Unteralgebra von $S(N)$, d. h. eine Menge, welche mit je zwei Elementen f und g auch ihr Produkt fg enthält. Q enthalte alle Elemente f_n $(n \epsilon N)$. Dann ist die Automorphismengruppe von Q mit der Untergruppe der Gruppe derjenigen Automorphismen von $S(N)$ identisch, welche die Unteralgebra Q invariant lassen.

Ist N insbesondere die Menge der reellen Zahlen, so ist $S(N)$ die Menge aller reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen. Q sei die aus allen stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen bestehende Unteralgebra von $S(N)$. Beachten wir nun, daß eine eineindeutige Abbildung $\varphi(x)$ der reellen Zahlengeraden auf sich, die jede stetige Funktion in eine stetige Funktion überführt, eine topologische Abbildung der Zahlengeraden auf sich ist, so erhalten wir den Satz:

$\Phi(f)$ sei eine die Menge aller stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen auf sich selbst eineindeutig abbildende und die Beziehung

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\,\Phi(g)$$

erfüllende Operation. Dann ist $\Phi(f)$ von der Gestalt

$$\Phi(f) = \varphi f \varphi^{-1},$$

wo φ eine topologische Abbildung der Zahlengeraden auf sich ist.

Analoge Sätze gelten offenbar für die Unteralgebren der meßbaren oder der differenzierbaren Funktionen.

Dagegen bleibt folgende Frage offen: Sei $T(R_n)$ die Gruppe aller topologischen Abbildungen des Euklidischen n-dimensionalen Raumes R_n. Besitzt $T(R_n)$ nur innere Automorphismen?

On the derivation of additive functions of intervals in m-dimensional space.

By

A. J. Ward (Cambridge, England).

Following on some recent work of Besicovitch[1]) and the present author[2]), Saks[3]) has proved the following theorem:

If a simply additive function of rectangles, $F(R)$, satisfies

$$\varliminf_{\substack{d(R)\to 0\\ R\supset(x,y)}} \frac{F(R)}{|R|} > -\infty$$

at each point (x, y) of a set E_0, then, almost everywhere in E_0,

$$\lim_{\substack{d(S)\to 0\\ S\supset(x,y)}} \frac{F(S)}{|S|}$$

exists, and is equal to

$$\varliminf_{\substack{d(R)\to 0\\ R\supset(x,y)}} \frac{F(R)}{|R|}.$$

Here R denotes any rectangle, and S any square, whose sides are parallel to the co-ordinate axes.

The demonstration made use of a simple geometrical property of rectangles lying in a plane, and the question naturally arose whether the theorem held, and could be proved in the same way, for functions of intervals in space of more than two dimensions. At one time I thought that the necessary geometrical lemma was

---

[1]) A. S. Besicovitch, Fund. Math. 25 (1935), 209—216.
[2]) A. J. Ward, Fund. Math. 26 (1936), 167—181.
[3]) S. Saks, Fund. Math. 27 (1936), 72—76.