Über die Automorphismen der Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge.

Von

J. Schreier und S. Ulam (Lwów).

In einer früheren Arbeit [1]) haben wir die Gruppe S_∞ aller eineindeutigen Abbildungen der Menge der natürlichen Zahlen auf sich selbst untersucht und u. a. die Normalteiler dieser Gruppe bestimmt [2]). Hier wollen wir die Automorphismen dieser Gruppe, d. h. alle eineindeutigen isomorphen Abbildungen der Gruppe auf sich selbst, behandeln.

Satz. *Ist $F(x)$ ein Automorphismus von S_∞, so gibt es ein Element $s \epsilon S_\infty$, derart daß*

$$F(x) = sxs^{-1}$$

identisch gilt.

In der üblichen Terminologie der Gruppentheorie kann man dies auch so aussprechen: *Es gibt keine äußeren Automorphismen von S_∞.*

Will man S_∞ als eine topologische Gruppe auffassen, so ergibt sich aus unserem Satze insbesondere, daß *jeder Automorphismus von S_∞ stetig ist.*

Beweis. Man bemerkt zunächst: wenn x und y zwei konjugierte Elemente sind $(x = tyt^{-1})$, so sind auch $F(x)$ und $F(y)$ konjugiert. Jede Menge von konjugierten Elementen geht daher wieder in eine solche über. Man ersieht auch sofort, daß die Elemente x und $F(x)$ immer von der gleichen *Ordnung* sind.

[1]) J. Schreier und S. Ulam, *Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge*, Studia Math. 4 (1933), S. 134—141.

[2]) Herr R. Baer hat uns darauf aufmerksam gemacht, daß diese Gruppe und ihre Normalteiler von Herrn Onufri behandelt wurde.

Wir bezeichnen mit C die Menge aller mit der *Transposition* $(1,2)$ konjugierten Elemente. Die Menge C ist die einzige abzählbare Menge konjugierter Elemente von der Ordnung 2, welche folgende Eigenschaft besitzt:

(α) *Die Produkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, wo $x_1, x_2, y_1, y_2 \epsilon C$, wenn sie beide Elemente von der Ordnung 2 darstellen, sind miteinander konjugiert.*

Sie gehören nämlich zur Menge derjenigen Elemente, die mit der Permutation $(1,2)(3,4)$ konjugiert sind.

Ist aber irgend eine andere abzählbare Menge von miteinander konjugierten Elemente der Ordnung 2 gegeben, so besitzt sie die Eigenschaft (α) nicht. Man kann dann nämlich immer zwei Paare von Elementen dieser Menge angeben, deren Produkte miteinander nicht konjugiert sind. Um dies einzusehen, betrachten wir eine Menge aller mit einer Permutation $(1,2), \ldots, (2n-1, 2n)$, wo $n>1$, konjugierten Elemente [3]). Man nehme:

$$x_1 = (1,2), \ldots, (2n-1, 2n), \quad y_1 = (2n+1, 2n+2), \ldots, \quad (4n-1, 4n),$$
$$x_2 = (1,2), \ldots, (2n-1, 2n), \quad y_2 = (1,2)(2n+1, 2n+2), \ldots, (4n-3, 4n-2).$$

Man ersieht, daß die entsprechenden Produkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ beide von der Ordnung 2, doch nicht miteinander konjugiert sind.

Wir betrachten jetzt die Menge $F(C)$. Aus der einleitenden Bemerkung folgt, daß $F(C)$ mit einer gewissen abzählbaren Menge von miteinander konjugierten Elementen der Ordnung 2 identisch sein muß. Dann aber besitzt $F(C)$ auch die Eigenschaft (α), da F ein Isomorphismus ist, und bei einem solchen, wie man sofort ersieht, diese Eigenschaft erhalten bleibt. Da C die einzige abzählbare Menge von konjugierten Elementen von der Ordnung 2 mit der Eigenschaft (α) ist, so folgt $F(C) = C$.

Wir untersuchen jetzt genauer die Abbildung $C \to F(C)$.

Zunächst bemerken wir, daß das Bild einer Folge von Transpositionen (a, n), wo a eine fixe Zahl ist und n alle Zahlen durchläuft, wieder eine solche Folge (β, n) ergibt. Um dies zu beweisen, genügt es zu bemerken, daß ein Produkt zweier Elemente aus C dann und nur dann ein Element von der Ordnung 3 ist, wenn beide Elemente zu einer einzelnen Folge von obiger Gestalt gehören.

[3]) Dies sind nämlich alle möglichen abzählbaren Klassen konjugierter Elemente, die aus Elementen von der Ordnung 2 bestehen.

Man ersieht ferner leicht, daß die Zuordnung von β zu α eine eineindeutige Abbildung der Menge der natürlichen Zahlen auf sich selbst ist. Wir bezeichnen diese Abbildung, d. h. dieses Element von S_∞, mit $s(n)$.

Betrachten wir nun den Automorphismus von S_∞:

$$\Phi(x) = s^{-1} F(x)\, s.$$

Es ist unser Zweck zu zeigen, daß

$$\Phi(x) \equiv x$$

ist. Man beachte, daß im Falle, wo x eine Transposition ist, dies direkt aus der Definition der Abbildung s folgt. Im Falle, wo x ein beliebiges Element von der Ordnung 2 ist, wird der Beweis indirekt geführt.

Es sei nämlich x_0 von der Ordnung 2 und $y_0 = \Phi(x_0) \neq x_0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $x_0(n_1) = n_2$ und $y_0(n_1) \neq n_2$ voraussetzen. Es sei z die Transposition (n_1, n_2). Man sieht, daß während das Element zx_0 von der Ordnung 2, das Element zy_0 von einer höheren Ordnung ist. Dies ist ein Widerspruch, da Φ ein Isomorphismus ist, woraus

$$\Phi(zx_0) = \Phi(z)\,\Phi(y_0) = zy_0 \qquad (z = \Phi(z)\,!)$$

folgt.

Um jetzt zu zeigen, daß $\Phi(x)$ überall, auch für die Elemente x höherer Ordnung als 2, identisch gleich x ist, benutzen wir die Tatsache, daß jedes Element z von S_∞ Produkt zweier Elemente von der Ordnung 2 ist:

$$z = xy, \qquad x^2 = y^2 = 1.$$

Dies folgt aus der Zerlegung von z in Zyklen und aus der Formel

$$(\ldots, 6, 4, 2, 1, 3, 5, \ldots) = [(1,2,)\,(3,4)\ldots]\cdot[(1)\,(2,3)\,(4,5)\ldots]$$

sowie aus analogen Formeln für endliche Zyklen.

Es sei jetzt z ein beliebiges Element von S_∞. Wir können x und y von der Ordnung 2 finden, derart daß — wie wir schon wissen — $\Phi(x) = x$, $\Phi(y) = y$ gelte, und daß $z = xy$ sei. Es ist dann

$$\Phi(z) = \Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y) = xy = z, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ein analoger Satz kann für höhere Mächtigkeiten bewiesen werden:

Ist N eine Menge von beliebiger unendlicher Mächtigkeit, $S(N)$ die Gruppe aller Permutationen der Menge N, so ist jeder Automorphismus von $S(N)$ in der Gestalt $F(x) = s\,x\,s^{-1}$, wo $s \in S(N)$, darstellbar.

Dagegen bleibt die Frage nach der allgemeinen Gestalt eines mehrstufigen Isomorphismus, der S_∞ auf eine Teilmenge abbildet, offen.

Über Abbildungen einer abstrakten Menge auf ihre Teilmengen.

Von

J. Schreier (Drohobycz).

In einer mit S. Ulam gemeinsam veröffentlichten Note[1]) haben wir bewiesen, daß die Gruppe S_∞ aller Permutationen (d. h. eineindeutiger Abbildungen auf sich selbst) einer abzählbaren Menge nur *innere* Automorphismen besitzt; m. a. W. daß die Automorphismengruppe von S_∞ mit S_∞ isomorph ist. Diese Isomorphie ist, wie man leicht bemerkt, einstufig. Der Satz gilt aber auch für die Permutationen einer Menge von beliebiger unendlicher Mächtigkeit.

Es sei nun N eine gegebene Menge. $S(N)$ bezeichne die Menge aller Abbildungen der Menge N auf eine Teilmenge. Für je zwei Elemente f und g von $S(N)$, sei das Produkt fg durch die Formel

$$fg = f[g(n)] \qquad (n \in N)$$

erklärt. Damit bildet $S(N)$ nach der Terminologie von Garret Birkhoff[2]) eine Algebra.

Wir fragen nach der Automorphismengruppe dieser Algebra, d. h. nach der Gruppe der eineindeutigen Abbildungen F von $S(N)$ auf sich selbst, welche die Beziehung

$$F(fg) = F(f)\,F(g) \qquad (f, g \in S(N)) \tag{1}$$

erfüllen. Wir wollen beweisen, daß diese Gruppe mit der Gruppe aller Permutationen der Menge N identisch ist. Wir beweisen also den

---

[1]) J. Scheier und S. Ulam, *Über die Automorphismen der Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge*, Fund. Math. 28, S. 258—260.

[2]) Garret Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. Vol. 31 (1935), S. 433—454.