1. Soit $S^2 \subset S^3$. Choisissons Ω_1 et Ω_2 dans deux domaines différents de $S^3 - S^2$. La sphère S^2 ne se laisse donc pas contracter en un point dans l'ensemble $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ et, par conséquent, ce dernier n'est pas asphérique.

2. Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles géométriques, enlacés et situés dans deux plans orthogonaux. Il existe alors dans $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ une surface T_2 d'un tore, laquelle est un rétracte de $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ par déformation. Or, T_2 étant asphérique, on en conclut que $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ l'est également.

3. Supposons que *le groupe* $\pi_1[S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)]$ *soit isomorphe à* $\mathfrak{F}_2$ (= groupe libre à 2 générateurs). *Alors l'ensemble* $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ *n'est pas asphérique.* En effet, s'il l'était, il se laisserait déformer dans lui-même en un sous-ensemble de dimension 1[15]). En particulier, son deuxième groupe de Betti s'annulerait, contrairement au théorème de dualité de M. J. W. Alexander, $\Omega_1 + \Omega_2$ étant non connexe.

On voit ainsi que l'asphéricité de $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ exprime une sorte d'„enchaînement" de Ω_1 et Ω_2.

Remarquons enfin que pour qu'un vrai sous-ensemble ouvert et connexe X de S^3 soit asphérique, il faut et il suffit que toute transformation continue de S^2 en un sous-ensemble de X soit inessentielle. Il est évident que la condition est nécessaire; d'autre part, elle implique[5]) l'égalité $\beta^2(\widetilde{X}) = 0$, où $\widetilde{X}$ designe l'espace de recouvrement universel de X. Comme on a aussi $\beta^n(\widetilde{X}) = 0$ pour $n \geqslant 3$, X est asphérique.

---

[15]) en vertu du théorème: *Tout polyèdre (même infini) connexe, asphérique et dont le groupe fondamental est un groupe libre à un nombre fini de générateurs se laisse déformer en un sous-polyèdre fini de dimension 1.* (S. Eilenberg, *Un théorème sur l'homotopie*, à paraître dans Ann. of Math. 38, (1937)).

Sur une classe de fonctionnelles linéaires.

Par

E. R. Love et L. C. Young (Cambridge, Angleterre).

1. Introduction. Dans un mémoire récent[1]), l'un de nous a montré le rôle important que joue la notion de *variation bornée d'ordre p* dans la théorie des intégrales de Stieltjes et dans des théorèmes nouveaux sur l'intégration terme à terme qui n'exigent plus l'hypothèse classique de l'intégrabilité absolue.

Nous démontrons ici des résultats en quelque sorte réciproques de ceux qui se trouvent dans le mémoire en question. Nous leur avons donnés une forme analogue à celle de théorèmes classiques de F. Riesz[2]) et H. Hahn[3]), mais légèrement plus compliquée. Par exemple, une fonctionnelle linéaire définie dans la métrique des fonctions continues qui ont variation bornée d'ordre p se révèle comme une intégrale de Stieltjes, mais seulement pour une famille de fonctions plus restreinte que celle qui sert comme point de départ.

2. La famille W_p. Soit f une fonction, réelle ou complexe, définie dans l'intervalle réel (a, b) que nous supposerons toujours fermé. On appelle *variation d'ordre* $p \geqslant 1$ la borne supérieure $V_p(f; a, b)$, ou simplement $V_p(f)$, des expressions

$$(\sum |\Delta f|^p)^{1/p}$$

pour les sommes d'intervalles Δ n'empiétant pas les uns sur les autres. Ici, comme dans la suite, Δf représente la différence $f(\beta) - f(\alpha)$ de la fonction f aux extrémités α et β de l'intervalle Δ.

---

[1]) Young [9].
[2]) Banach [1] p. 61 et Riesz [7].
[3]) Banach [1] p. 80, Théorème 5, et Hahn [4], p. 6.

Nous désignerons par W_p la famille des fonctions f telles que $V_p(f)$ reste fini. Lorsque $f \precsim W_p$, c. à d. lorsque $V_p(f)$ est fini, f a *variation bornée d'ordre p*. La condition pour qu'il en soit ainsi est d'ailleurs du type de Lipschitz, légèrement généralisée pour rendre la condition invariante par rapport à certaines transformations ponctuelles. En effet, il est aisé de voir que, *pour qu'une fonction f ait variation bornée d'ordre p, il faut et il suffit qu'il existe une fonction bornée croissante φ telle que*

$$|\Delta f| \leqslant (\Delta \varphi)^{1/p}$$

pour tout intervalle Δ. Lorsqu'il en est ainsi, il est clair que $V_p(f)$ ne dépassera pas $(\varphi(b)-\varphi(a))^{1/p}$. Et d'autre part, lorsque $V_p(f)$ est fini, on peut choisir $\varphi(x)=\{V_p(f,a,x)\}^p$.

3. Dimension de Carathéodory pour une courbe plane. Pour simplifier, nous ne traiterons que le cas de fonctions réelles. On peut alors rapprocher les définitions précédentes de celle de la mesure k-dimensionelle de Carathéodory [1]), qui généralise d'une façon tout à fait analogue la mesure linéaire correspondante. On a le théorème suivant:

Si $f < W_p$ $(p \geqslant 1)$, l'ensemble des (x,y) de la forme $(t, f(t))$ a mesure k-dimensionelle finie pour $k=2-1/p$. Plus généralement, *si $f(t) \precsim W_p$ et $g(t) \precsim W_q$ avec $p \leqslant q$, $1/p+1/q>1$, l'ensemble des points (x,y) de la courbe $f(t)\, g(t)$ a mesure k-dimensionelle finie pour $k=2-p\,(1/p+1/q-1)$.*

Démonstration. D'après notre hypothèse, f et g remplissent les conditions

$$|\Delta f|^p \leqslant \Delta\varphi, \qquad |\Delta g|^q \leqslant \Delta\psi$$

avec φ, ψ bornées et croissantes. Faisons le changement de la variable $u=\varphi(t)+\psi(t)=\chi(t)$. Puisque $\Delta\chi=0$ entraîne $\Delta f=\Delta g=0$, les fonctions f et g seront données de façon univoque pour toute valeur de u prise par $\varphi(t)+\psi(t)$. Nous complétons leur définition par continuité aux valeurs de u de la forme $\varphi(t\pm 0)+\psi(t\pm 0)$ et ensuite par interpolation linéaire dans les intervalles $(\chi(t-0), \chi(t))$ et $(\chi(t), \chi(t+0))$, ce qui ne peut qu'augmenter l'ensemble des points de notre courbe. Nous aurons maintenant

$$\text{(A)} \qquad |\Delta f|^p \leqslant \Delta u, \qquad |\Delta g|^q \leqslant \Delta u$$

1) Carathéodory [3], Hausdorff [5], et, pour des développements ultérieurs, Besicovitch [2].

où f et g sont devenues fonctions de u définies dans un intervalle borné, et nous supposerons que cet intervalle se réduit à $(0,1)$ (ce qui revient au même que de multiplier f et g par une constante).

Cela étant, divisons $(0,1)$ en N parties égales. En vertu de (A) les N parties correspondantes de notre courbe sont contenues dans N rectangles dont les côtés sont $N^{-1/p}$ et $N^{-1/q}=N^{-1/p}\cdot(N^{1/p-1/q})$. Soit N_1 le plus petit entier dépassant $N^{1/p-1/q}$. Chacun des rectangles en question peut évidemment être couvert par N_1 carrés de côté $N^{-1/p}$ et l'on a $N_1 \leqslant 1+N^{1/p-1/q} \leqslant 2N^{1/p-1/q}$. La courbe entière peut donc être couverte par $2N^{(1+1/p+1/q)}$ carrés au plus, de côtés $N^{-1/p}$.

Il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une couverture par des cercles de diamètres $d_i<\varepsilon$, tels que

$$\sum d_i^{p(1+1/p-1/q)} < 2\,(\sqrt{2})^{p(1+1/p-1/q)}.$$

Notre courbe a donc mesure k-dimensionelle finie pour $k=p(1+1/p-1/q)=2-p(1/p+1/q-1)$, c. f. q. d.

Remarquons encore que *l'hypothèse $1/p+1/q>1$ est essentielle pour que des conditions $f \precsim W_p$ et $g \precsim W_q$ on puisse déduire que la courbe $f(t), g(t)$ a mesure nulle.*

Si l'on fait $p=q=2$, des exemples classiques montrent que $f(t)$, $g(t)$ peut décrire une aire. On obtient sans peine des exemples analogues [1]) pour p, q quelconques $(\geqslant 1)$ liés par l'équation $1/p+1/q=1$.

Pour la courbe $x(t)$, $y(t)$ de Péano, qui décrit un carré de côté 1, lorsque t varie de 0 à 1, on sait [2]) que, si deux nombres t et t' ont les mêmes $2n$ premiers chiffres dans une représentation ternaire, les coordonnées des deux points correspondants de la courbe ont les mêmes n premiers chiffres. On en déduit que $x(t)$ et $y(t)$ remplissent la condition de Lipschitz d'ordre $1/2$ [3]) et par conséquent que $x(t) \precsim W_2$, $y(t) \precsim W_2$.

1) Pour ne pas lasser le lecteur par des constructions un peu laborieuses, mais dont le principe remonte en somme à il y a plus de trente ans, nous ne nous attarderons pas ici à discuter le cas général $1/p+1/q=1$, ni à montrer que, lorsque $1/p+1/q>1$ et $p \leqslant q$, la dimension $k=2-p(1/p+1/q-1)$ est effectivement atteinte pour certaines courbes.

2) Cf. par exemple Hobson [6], p. 424—426.

3) En effet, on trouve $|\Delta x|^2 \leqslant 36\,|\Delta t|$.

4. Existence de l'intégrale de Stieltjes. Les remarques qui précèdent donnent quelque idée de la portée des résultats obtenus dans le mémoire cité en ce qui concerne l'existence de l'intégrale de Stieltjes $\int_a^b f\,dg$.

Il y est démontré que *lorsque f et g n'ont pas de discontinuité commune, cette intégrale existe au sens de Riemann, si $f \precsim W_p$ et si $g \precsim W_q$, où* $1/p+1/q>1$. Lorsqu'il y a des discontinuités communes, l'intégrale existe encore, en un sens légèrement généralisé. *En outre, toujours pour $1/p+1/q>1$, on a l'inégalité*

$$\left|\int_a^b f\,dg - f(a)\,(g(b)-g(a))\right| \leqslant K(p,q)\,V_p(f)\,V_q(g),$$

où $K(p,q)$ est une constante dépendant de p,q seuls.

Ces résultats ne sont plus valables, lorsque $1/p+1/q=1$. Des exemples simples, que l'on trouvera dans le mémoire cité, font diverger l'intégrale, ce qui n'est pas à nous surprendre, puisque la courbe $f(t), g(t)$ peut remplir une aire.

Néanmoins, *pour certaines fonctions $g \precsim W_q$ — et n'appartenant à aucune des familles W_{q_1} pour $q_1<q$ — il peut arriver que l'intégrale existe encore, et que l'inégalité reste valable, avec K dépendant de g, pour toutes les fonctions f de la famille W_p définie par* $1/p+1/q=1$. C'est le cas de la fonction continue $g(t)$ qui s'annule en dehors des deux suites d'intervalles

$$1/[n+(1/\log n)]<t\leqslant 1/n \quad \text{et} \quad 1/n\leqslant t<1/[n-(1/\log n)]$$

dans lesquels $g(t)$ est linéaire et prend la valeur $1/\sqrt{n}\log n$ pour $t=1/n$. En effet, pour cette $g(t)$ particulière, on trouve assez facilement que $\int_\varepsilon^1 f\,dg$ existe et est majorée par $V_2(f)\,V_2(g)+O(\sqrt{\varepsilon})$ en vertu de l'inégalité classique de Hölder; en faisant tendre ε vers 0, on voit qu'il en est en corede même de $\int_0^1 f\,dg$, quelle que soit f dans W_2 s'annulant pour $t=1$.

5. L'intégrale comme fonctionnelle linéaire dans la métrique W_p. Il résulte en particulier des théorèmes cités dans **4** que, pour une fonction g *donnée* appartenant à W_q, notre intégrale existe au sens de Riemann pour toutes les fonctions f continues à variation bornée d'ordre p où $1/p+1/q>1$, et qu'elle représente, dans cette famille de fonctions, *une opération additive et homogène* $L(f)$ telle que

$$L(f)\leqslant M\cdot[|f(a)|+V_p(f)].$$

Or, l'expression

$$Q(f)=|f(a)|+V_p(f)$$

est elle-même *une fonctionnelle convexe et homogène*, c. à d. que l'on a

$$Q(f_1+f_2)\leqslant Q(f_1)+Q(f_2)$$

et

$$Q(\lambda f)=|\lambda|\,Q(f) \qquad \text{pour tout } \lambda \text{ réel.}$$

Cette fonctionnelle $Q(f)$ joue dans W_p le rôle d'une *norme*, tout comme p. ex. la racine p-ième de $\int |f|^p dx$ dans la famille des fonctions à p-ième puissance intégrable au sens de Lebesgue. On définit la *distance* dans W_p par l'expression $Q(f_1-f_2)$ et de là on passe à la *convergence* dans W_p, etc. Ces notions font de la famille W_p un *espace métrique complet* [1]). Nous n'utiliserons d'ailleurs en général que les fonctions continues de la famille W_p; elles en constituent un sous-espace qui est également un espace métrique complet [2]).

Dans la métrique ainsi définie, et que nous nommons simplement *métrique* W_p, on appellera, selon la terminologie de M. Banach [3]), *fonctionnelle linéaire* une opération additive et homogène $L(f)$ telle que $|L(f)|\leqslant M\cdot Q(f)$.

Lorsque $g \precsim W_q$ et $1/p+1/q>1$, l'intégrale $\int_a^b f\,dg$ est donc une fonctionnelle linéaire dans la métrique W_p des fonctions continues à variation bornée d'ordre p.

Plus généralement, *si, pour une fonction g donnée, l'intégrale*

$$\int_a^b f\,dg$$

existe au sens de Riemann pour toutes les fonctions continues f à variation bornée d'ordre p, cette intégrale est une fonctionnelle linéaire dans la métrique W_p des ces fonctions f, c. à d. il existe une constante M telle que

$$\left|\int_a^b f\,dg\right|\leqslant M\cdot[|f(a)|+V(f)].$$

---

[1]) Si $Q(f_m-f_n)\to 0$, lorsque m et n tendent vers l'infini, il y a *a fortiori* convergence uniforme au sens ordinaire. En désignant par f la limite au sens de la convergence uniforme, on trouve $Q(f-f_n)\leqslant \varliminf_{m\to\infty} Q(f_m-f_n)$, ce qui donne $Q(f-f_n)\to 0$, lorsque $n\to\infty$.

[2]) D'après [1]) la fonction limite est continue, lorsque les f_n le sont.

[3]) Banach [1], p. 54, Théorème 1.

Pour la démonstration, il suffit de faire appel au théorème classique [1]) d'après lequel toute opération additive, homogène et *mesurable* (B) est une fonctionnelle linéaire. En effet, l'intégrale est la limite des sommes finies $\sum f(t_i)(g(t_i)-g(t_{i-1}))$, qui sont évidemment continues; elle est donc mesurable (B).

6. Expression d'une fonctionnelle linéaire sous forme d'intégrale de Stieltjes. Ainsi que nous l'avons annoncé dans **1**, nous aurons à considérer une famille de fonctions plus restreinte que W_p.

Soit $V_p^{(\delta)}(f)$ la borne supérieure des expressions $(\sum|\Delta f|^p)^{1/p}$ pour des sommes d'intervalles Δ de longueur $<\delta$, n'empiétant pas les uns sur les autres. Nous dirons qu'une fonctions continue [2]) f appartient à *la famille* W_p^*, si $V_p^{(\delta)}(f)\to 0$ avec δ; en symboles

$$f \prec W_p^*.$$

Théorème. *Soit $L(f)$ une fonctionnelle linéaire définie dans la métrique des fonctions continues f à variation bornée d'ordre $p>1$. Il existe alors une fonction $g\prec W_q$ où $1/p+1/q=1$, telle que*

$$L(f)=\int_a^b f\,dg$$

pour les fonctions continues f de la famille W_p^* [et en particulier [3]) pour celles de la famille $W_{p-\varepsilon}$, quel que soit $\varepsilon>0$] [4]).

Nous montrerons même qu'on peut choisir g *de façon que $V_q(g)$ ne dépasse pas la borne supérieure $2^{1+1/q}M$ du quotient* $2^{1+1/q}|L(f)|/Q(f)$. A cet effet, nous aurons besoin du lemme suivant, qui joue le rôle de la réciproque de l'inégalité fondamentale du mémoire cité.

[1]) Banach [1], p. 23, th. 4.

[2]) La définition de la famille W_p^* est plus compliquée, si l'on omet l'hypothèse de la continuité. On la trouvera dans le mémoire cité. On peut lui donner aussi la forme d'une condition de Lipschitz: $|\Delta f|/|\Delta\varphi|^{1/p}$ borné pour tout Δ et tendant vers 0, lorsque $|\Delta\varphi|\to 0$, où φ est encore bornée et croissante.

[3]) En effet, on a $V_p^{(\delta)}(f)\leqslant\eta[V_{p-\varepsilon}(f)]^{\cdots}$ dès que l'oscillation de f dans tout intervalle de longueur δ ne dépasse pas $\eta^{\cdots}$. Donc $W_p^*\succ W_{p-\varepsilon}$. Cf. Wiener [8].

[4]) Nous démontrerons que l'intégrale $\int f\,dg$ existe.

Lemme. *Soient: $b_1,\dots,b_N$ une suite finie donnée et B la borne supérieure des valeurs de l'expression*

$$\Big(\sum_{0<k\leqslant K}\Big|\sum_{n_{k-1}<r\leqslant n_k} b_r\Big|^q\Big)^{1/q}$$

qui correspondent aux diverses façons de choisir dans $(0,N)$ en ordre croissant des entiers $n_0=0<n_1<\dots<n_K=N$. Il existe alors une seconde suite $a_1,\dots,a_K$ pour laquelle les valeurs de l'expression analogue

$$\Big(\sum_{0<k\leqslant K}\Big|\sum_{n_{k-1}<r\leqslant n_k} a_r\Big|^p\Big)^{1/p}$$

où $1/p+1/q=1$ ont la borne supérieure A telle que

$$\Big|\sum_{0<r\leqslant s\leqslant N}\sum a_r b_s\Big|\geqslant AB/2^{1+1/q}.$$

Démonstration du lemme. Soit $m_0=0<m_1<\dots<m_L=N$ une suite d'entiers pour laquelle la borne supérieure B est atteinte. Nous écrivons

$$y_l=\sum_{m_{l-1}<r\leqslant m_l} b_r \qquad l=1,2,\dots,L$$

et remarquons que l'une au moins des deux sommes

$$\sum_{l\text{ impair}}|y_l|^q,\qquad \sum_{l\text{ pair}}|y_l|^q$$

n'est pas moindre de $\frac{1}{2}B^q$. En y appliquant la réciproque de l'inégalité classique de Hölder, on démontre qu'il existe une suite, soit $x_1,x_2,\dots,x_L$, pour laquelle l'une des conditions:

$$x_l=0 \text{ pour } l \text{ pair},\qquad x_l=0 \text{ pour } l \text{ impair},$$

est satisfaite et, en outre, aussi les deux conditions

$$\Big(\sum_l|x_l|^p\Big)^{1/p}=X,\qquad \Big|\sum_l x_l y_l\Big|\geqslant XB/2^{1/q}.$$

Soit maintenant $z_0=0$ et $z_s=x_l$ pour les entiers s de l'intervalle $m_{l-1}<s\leqslant m_l$, ce qui, lorsque l parcourt la suite $1,2,\dots,L$, définit z_s pour $s=0,1,\dots,N$.

Pour une suite d'entiers $n_0=0<n_1<\ldots<n_K=N$ quelconques, croissants de 0 à N, l'expression

$$\Big(\sum_{0<k\leqslant K}|z_{n_k}-z_{n_{k-1}}|^p\Big)^{1/p}$$

ne peut dépasser $2X$. En effet, sa p-ième puissance peut s'écrire

$$\sum_{0<k\leqslant K}|x_{l_k}-x_{l_{k-1}}|^p,$$

si l'on choisit $l_0=0$, $l_k=\max(l)$ pour les l tels que $m_l\leqslant n_k$, lorsque $k\geqslant 1$. Evidemment, on peut omettre dans la somme les valeurs de k pour lesquelles l'intervalle $n_{k-1}<s\leqslant n_k$ ne contient aucun des entiers m_l, car alors $l_k=l_{k-1}$. Il s'ensuit que la somme est majorée par

$$2^{p-1}\{\sum|x_l|^p+\sum|x_l|^p\}=2^pX^p,$$

ce qui justifie notre affirmation. En outre, nous avons

$$|\sum_{s=1}^{N}z_s b_s|=|\sum x_l(b_{m_{l-1}+1}+\ldots+b_{m_l})|=|\sum x_l y_l|\geqslant XB/2^{1/q}.$$

Si l'on choisit maintenant $a_r=z_r-z_{r-1}$ $(r=1,2,\ldots,N)$, on trouve donc

$$A\leqslant 2X \qquad \text{et} \qquad |\sum_{0<r\leqslant s\leqslant N}\sum a_r b_s|\geqslant XB/2^{1/q},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème. Il résulte d'un principe de prolongement connu[1]) que la fonctionnelle linéaire, primitivement donnée dans la famille des fonctions continues f de W_p, admet au moins un prolongement linéaire dans la famille des fonctions de la forme $f+\varphi$, où les φ sont des fonctions „en escalier", ce prolongement étant tel que

$$L(f+\varphi)\leqslant M\cdot Q(f+\varphi),$$

donc que

$$|L(f+\varphi)|=\pm L(f+\varphi)\leqslant M\cdot Q(f+\varphi),$$

ce qui donne en particulier, lorsque $f=0$,

$$|L(\varphi)|\leqslant MQ(\varphi).$$

[1]) Banach [1], p. 29. Remarquons d'ailleurs que l'axiome du choix pour les ensembles non-dénombrables n'est pas indispensable ici, car on peut se borner aux fonctions „en escalier rationnel".

Désignons maintenant par $g(x)$ la valeur de $L(\varphi)$ pour la fonction particulière $\varphi(t)=[a,x]$, égale à 1 pour $t\leqslant x$ et à 0 pour $t>x$.

Nous affirmons que $V_q(g(x))\leqslant 2^{1+1/q}M$.

En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$(\sum_{i=1}^{N}|g(x_i)-g(x_{i-1})|^q)^{1/q}>2^{1+1/q}M$$

pour une certaine suite finie croissante $x_0=a<x_1<\ldots<x_N=b$ de points de division de (a,b). Posons $b_s=g(x_s)-g(x_{s-1})$. D'après le lemme, il existe des nombres $a_1,a_2,\ldots,a_N$ tels que

$$|\sum_{s=1}^{N}(a_1+a_2+\ldots+a_s)(g(x_s)-g(x_{s-1}))|>AM,$$

où A est la borne supérieure définie dans le lemme. Or, le membre gauche est la valeur de $|L(\varphi)|$ pour la fonction en escalier

$$\varphi=\sum_{s=1}^{N}(a_1+\ldots+a_s)([a,x_s]-[a,x_{s-1}]),$$

qui prend la valeur $a_1+a_2+\ldots+a_s$ pour $x_{s-1}<t\leqslant x_s$ et 0 pour $t=a$. On trouve $Q(\varphi)=V_p(\varphi)=A$. L'inégalité obtenue s'écrit donc $|L(\varphi)|>M\cdot Q(\varphi)$, ce qui contredit l'inégalité inverse, obtenue plus haut.

Pour terminer, nous montrerons que, *lorsque la fonction continue f appartient à la famille W_p^*, l'intégrale $\int f\,dg$ existe et a la valeur $L(f)$.*

A cet effet, considérons une division de (a,b) en parties (x_{i-1},x_i) de longueur moindre de δ, dans lesquelles nous choisissons les points représentatifs ξ_i $(i=0,1,2,\ldots,N)$. Nous avons à montrer que la somme de Cauchy

$$\sum_{i=1}^{N}f(\xi_i)\,(g(x_i)-g(x_{i-1}))$$

tend vers $L(f)$, lorsqu'on fait tendre δ vers 0. Mais cette somme de Cauchy n'est autre chose que la valeur de $L(\varphi)$ pour la fonction en escalier $\varphi(t)=\sum_{i=1}^{N}f(\xi_i)([a,x_i]-[a,x_{i-1}])$. En outre, lorsqu'on divise (a,b) de façon quelconque en parties Δ, on aura

$$\sum |\Delta(f-\varphi)|^p = \sum |\Delta' f|^p + \sum |\Delta''(f-\varphi)|^p,$$

où les Δ' sont intérieurs aux (x_{i-1}, x_i) et les Δ'' ne le sont pas. Or, $\Delta''(f-\varphi)$ a la forme $(f(\xi_i)-f(\xi_i^{(0)}))-(f(\xi_k)-f(\xi_k^{(0)}))$, où ξ_i, $\xi_i^{(0)}$ sont intérieurs à (x_{i-1}, x_i) et $\xi_k, \xi_k^{(0)}$ à (x_{k-1}, x_k), et où $i \neq k$. On en déduit que

$$\sum |\Delta(f-\varphi)|^p \leqslant (V_p^{(\delta)}(f))^p + 2^{p-1}[(V_p^{(\delta)}(f)^p + (V_p^{(\delta)}(f))^p] = (1+2^p)\,(V_p^{(\delta)}(f))^p,$$

ce qui donne

$$Q(f-\varphi) = V_p(f-\varphi) \leqslant (1+2^p)^{1/p}\, V_p^{(\delta)}(f) < \varepsilon_\delta,$$

où $\varepsilon_\delta \to 0$ avec δ, puisque f appartient à W_p^*. On a donc finalement

$$|L(f)-L(\varphi)| = |L(f-\varphi)| \leqslant Q(f-\varphi) < \varepsilon_\delta,$$

ce qui achève la démonstration, puisque $L(\varphi)$ est la somme de Cauchy en question.

7. La réciproque du théorème d'existence. Dans le cas de la fonctionnelle linéaire spéciale, qui est déjà définie dans la métrique des fonctions f continues de W_p, par une intégrale de Stieltjes

$$L(f) = \int_a^b f\, dg$$

existant au sens de Riemann, on peut compléter le théorème précédent. De ce dernier on tirerait seulement l'existence d'une fonction g^* de W_q, où $1/p+1/q=1$, telle que l'on ait $\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,dg^*$ pour celles des fonctions f qui appartiennent aussi à W_p^*. Or, nous allons voir que *la fonction g elle-même appartient à la famille W_q*.

En effet, supposons le contraire. On peut alors trouver, quel que soit l'entier n, des intervalles Δ n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que

$$(\sum |\Delta g|^q)^{1/q} > n.$$

Soit $a=x_1<x_1<\ldots<x_N=b$ une suite finie de points, choisie de façon que l'ensemble des x_i comprenne celui des extrémités de nos Δ et que toutes les différences x_i-x_{i-1} soient moindres de $1/n$. Dans chaque (x_{i-1}, x_i), nous choisissons un point intérieur ξ_i. Nous dé-

signons par $g_n(x)$ la fonction en escalier, prenant la valeur $g(x_i)$, pour $\xi_i \leqslant x < \xi_{i+1}$, lorsque $i \neq N$, et les valeurs $g(a), g(b)$ pour $a \leqslant x < \xi_1$ et $\xi_N \leqslant x \leqslant b$ respectivement.

La fonctionelle linéaire

$$L\ (f) = \int_a^b f\, dg_n$$

n'est pas autre chose qu'une somme de Cauchy s'approchant de $\int_a^b f\,dg$, lorsque $n \to \infty$. On a donc en tout cas

$$\overline{\lim}\, |L_n(f)| < \infty$$

pour chaque f continue de W_p. Or, en vertu d'un théorème connu, dû à H. Hahn[1]), cela n'est possible que s'il existe une constante M telle que

$$|L_n(f)| \leqslant M \cdot Q(f).$$

D'autre part, puisque $g_n = g$ aux extrémités des Δ qui correspondent à l'entier n, on a $V_q(g_n) > n$. Faisons l'usage du lemme démontré dans **6** avec $b_i = g(x_i) - g(x_{i-1}) = g_n(\xi_i+0) - g_n(\xi_i-0)$ et $B = V_q(g_n) > n$. On trouve alors qu'il existe une suite non nulle $a_1, a_2, \ldots, a_N$ telle que

$$\sum_{i=1}^{N} (a_1+\ldots+a_i)(g_n(\xi_i+0)-g_n(\xi_i-0)) \geqslant A\,n/2^{1+1/q}.$$

Désignons maintenant par $f(x)$ la fonction continue qui est linéaire dans (a, ξ_1) et dans chaque (ξ_i, ξ_{i+1}) $(i=1, 2, \ldots, N-1)$, qui est constante dans (ξ_N, b) et, en outre, telle que $f(a)=0$, $f(\xi_i) = a_1+a_2+\ldots+a_i$ $(i=1,2,\ldots,N)$. Nous aurons alors pour cette f particulière

$$|L_n(f)| \geqslant An/2^{1+1/q} > An/4,$$

où A est la borne supérieure qui se présente dans le lemme. D'autre part, en désignant par $\varphi(x)$ la fonction en escalier, constante pour $x_{i-1} < x \leqslant x_i$ et égale à f aux points a, b et ξ_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, on obtient $V_p(\varphi) = A$, $V_p(f) \leqslant V_p(f-\varphi) + V_p(\varphi)$ et, par un calcul tout à fait semblable à celui de la fin de **6**,

$$(V_p(f-\varphi))^p \leqslant (1+2^p) \sum_{i=1}^{N-1} (|a_i|+|a_{i+1}|)^p.$$

---

[1]) Banach [1], p. 80, Théorème 5, Hahn [4], p. 6.

Par conséquent

$$Q(f) = V_p(f) \leqslant (1+2(1+2^p)^{1/p})\, A \leqslant 8A,$$

ce qui donne pour notre fonction f

$$|L_n(f)| > n\, Q(f)/32.$$

Pour $n \geqslant 32M$, on est donc en contradiction avec l'inégalité du théorème de Hahn.

Nous avons ainsi démontré la réciproque suivante du théorème d'existence: *la condition $g \prec W_q$ est nécessaire pour que l'intégrale $\int_a^b f\,dg$ existe au sens de Riemann pour toutes les fonctions f continues de W_p où $1/p+1/q=1$.* Le théorème d'existence lui-même nous disait que la condition $g \prec W_{q-\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$ est suffisante. En outre, nous avons vu que dans le cas intermédiaire, où $g \prec W_q$ sans que $g \prec W_{q-\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$, il arrive soit que l'intégrale existe encore dans toute la famille conjuguée de fonction f, soit qu'elle cesse d'exister pour certaines de ces dernières.

8. Enoncés complets des théorèmes réciproques.

Pendant que, dans la métrique W_p, la fonctionelle $L(f) = \int_a^b f\,dg$ est une intégrale par rapport à une fonction g de W_q où $1/p+1/q=1$, nous savons aussi que, pour les f d'une famille plus restreinte, elle se laisse écrire $\int_a^b f\,dg^*$, où l'on a $V_q(g^*) \leqslant 2^{1+1/q} M$ pour une majorante M quelconque du quotient $L(f)/Q(f)$. Mais, puisque l'égalité $\int_a^b f\,dg^* = \int_a^b f\,dg$ a lieu en tout cas pour les fonctions f qui sont des intégrales indéfinies ordinaires de fonctions en escalier, on en déduit facilement, en intégrant par parties et en utilisant un théorème classique de Lebesgue, que $g(x)-g^*(x)$ a presque partout la valeur $g(a)-g^*(a)$, et, par symétrie, aussi la valeur $g(b)-g^*(b)$; donc g et g^* ne diffèrent que par une constante en tout point de continuité commune et aux extrémités a et b.

Il s'ensuit que les deux différences $g(x\pm 0)-g^*(x\pm 0)$ ont une même valeur constante pour tout x et, par conséquent, que *pour une fonction $g'(x)$ égale à $g(x)$ aux points a et b et à l'une des quantités $g(x\pm 0)$ pour $a<x<b$, on a $V_q(g'(x)) \leqslant 2^{1+1/q} M$ dès que la constante M majore le quotient $\left|\int_a^b f\,dg\right|/Q(f)$.*

D'autre part, on voit de suite que $\int_a^b f\,dg'$ *existe dès que* $\int_a^b f\,dg$ *existe au sens de Riemann, et que leurs valeurs sont les mêmes.* En effet, si $\int f\,dg = I$, il existe un nombre positif δ tel que, pour toute division de (a,b) en parties (x_{i-1}, x_i) de longueur moindre de δ, la somme de Cauchy $\sum f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1}))$, où $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, ne diffère jamais de I par plus de ε. En faisant tendre les x_i vers $x_i \pm 0$, on voit qu'il en est de même de la somme de Cauchy obtenue en remplaçant $g(x)$ par $g'(x)$.

Combinant ces remarques avec les résultats de **5**, **6** et **7**, nous obtenons le théorème suivant, analogue au théorème classique de F. Riesz:

Théorème I. (a) *Si, pour les f continues de W_p, $L(f)$ est une fonctionnelle linéaire majorée par $M(|f(a)|+V_p(f))$, alors, pour celles des f qui appartiennent à W_p^*, $L(f)$ peut s'écrire $\int_a^b f\,dg$ au sens de Riemann, où $V_q(g^*) \leqslant 2^{1+1/q} M$.*

(b) *Si l'expression $\int_a^b f\,dg$ existe au sens de Riemann pour les f continues de W_p, elle est majorée pour une certaine valeur de M par $M(|f(a)|+V_p(f))$ et l'on a $V_q(g) < \infty$. En outre, elle peut alors s'écrire $\int_a^b f\,dg^*$, où $V_q(g^*) < 2^{1+1/q} M$, cette fois pour toutes les f pour lesquelles $\int_a^b f\,dg$ existe.*

On peut donner à ce théorème une autre forme, en apparence plus générale, mais qui se réduit à lui, lorsqu'on utilise le théorème de Hahn. Nous nous bornerons à exprimer ainsi le cas (b). *Le théorème qui résulte constitue une réciproque de celui sur l'intégration terme à terme*, démontré dans le mémoire cité [1]).

Le rôle du théorème ainsi obtenu est d'ailleurs tout semblable à celui que joue le théorème de Hahn lui-même dans la métrique des fonctions continues et de la convergence uniforme.

---

[1]) Young [9], p. 269.

Théorème II. *Si, pour une suite donnée de fonctions* $\{g_n\}$, $\int_a^b f\,dg_n$ *existe au sens de Riemann pour tout* n *et* $\overline{\lim}\,|\int_a^b f\,dg_n|<\infty$ [1]), *quelle que soit la fonction continue* f *de* W_p, *alors on peut trouver une seconde suite* $\{g_n^*\}$ *telle que*

1⁰ $\int_a^b f\,dg_n=\int_a^b f\,dg_n^*$ *pour toute* f *et tout* n, *dès que le membre gauche existe*

2⁰ $\overline{\lim}\,V_q(g_n^*)<\infty$ *pour* $1/p+1/q=1$.

Posons en effet $L_n(f)=\int_a^b f\,dg_n$. Selon le théorème de Hahn, il vient $|L(f)|\leqslant M\,Q\,(f)$. Donc, par suite du théorème I(b), on peut écrire $\int_a^b f\,dg_n=\int_a^b f\,dg_n^*$ où $V_q(g_n^*)<2^{2+r/q}M$.

9. Cas de la famille Lip(1/*p*). On serait peut-être tenté de croire que ces résultats subsistent, lorsqu'on remplace la famille W_p par celle plus restreinte des fonctions f pour lesquelles

$$|\Delta f|\geqslant K(f)\,|\Delta t|^{1/p},$$

c. à d. par la famille Lip $(1/p)$.

Ce n'est pas le cas. Nous allons construire, en effet, une suite $\{g_n\}$ de fonctions continues très simples, pour lesquelles la suite $\int_a^b f\,dg_n$ est bornée, lorsque $f\prec$ Lip $(1/p)$, sans que $V_q(g_n)$ soit bornée.

Soit $C=2\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{-2p}$. Nous posons $c_n=2\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2p}$ et $d_n=c_n-n^{-2p}$. Soit $g(x)$ une fonction en zigzag, linéaire dans les intervalles (c_{n-1},d_n) et (d_n,c_n), qui s'annule aux points c_n et qui prend les valeurs $g(d_n)>0$ aux points d_n. Nous prenons pour $g_n(x)$ la fonction égale à $g(x)$ pour $x\geqslant c_n$ et nulle pour $x>c$.

Lorsque $f\prec$ Lip $(1/p)$, nous aurons

$$\left|\int_0^C f\,dg_n\right|=\left|\sum_{\nu=1}^{n}\int_{d_\nu}^{c_\nu}\left(f\left(x-\frac{1}{\nu^{2p}}\right)-f(x)\right)\nu^{2p}\,g(d_\nu)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant K(f)\sum_1^\infty\left(\frac{1}{\nu^{2p}}\right)^{1/p}\nu^{2p}\,g(d_\nu)\,(c_\nu-d_\nu)=K(f)\sum_1^\infty\frac{g(d_\nu)}{\nu^2}.$$

[1]) Le théorème subsiste d'ailleurs si, au lieu de $\overline{\lim}\,|\int f\,dg_n|<\infty$, on suppose seulement $\underline{\lim}\int f\,dg_n<\infty$. Mais la démonstration nous éloignerait trop des idées exposées ici.

Choisissons $g(d_\nu)=\sqrt{\nu}$. L'oscillation de g_n tend vers ∞ avec n, donc $V_q(g_n)$ n'est borné pour aucune valeur de q. Et cependant $|\int_0^C f\,dg_n|$ est borné pour chaque $f\prec$ Lip $(1/p)$.

Mémoires et livres cités.

[1] Banach S., *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne, Warszawa 1932.

[2] Besicovitch A. S., *On linear sets of fractional dimensions*, Math. Annalen 101 (1929), 161—193.

[3] Carathéodory C., *Über das lineare Mass*, Gött. Nachr. 1914.

[4] Hahn H., *Über Folgen linearer Operationen*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 32 (1922), 1—88.

[5] Hausdorff F., *Dimension und aüsseres Mass*, Math. Annalen 79 (1918), 157—179.

[6] Hobson E. W., *The theory of functions of a real variable*, 2 edition, vol. I, Cambridge 1921.

[7] Riesz. F., *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. des Sc. Paris 149 (1909), 974—977.

[8] Wiener N., *The Quadratic Variation of a function and its Fourier coefficients*, Journ. Mass. Inst. of Technology 3 (1924), 73—94.

[9] Young L. C., *An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration*, Acta Mathematica 67 (1936), 251—282.