Da $f(E_{ab})=\widehat{\alpha\beta}$ ein Kontinuum ist, so gibt es mindestens einen Punkt $\gamma\subset\widehat{\alpha\beta}$, dessen Urbilder in beiden Gebieten liegen, und zwar kann der Bogen $\widehat{cd}$ so gewählt werden, dass der Punkt γ ein nicht auf dem Rande $\widehat{cd}$ liegender Punkt der Membranenstücke $\Phi_1=f(\overline{\Gamma}_1)$, $\Phi_2=f(\overline{\Gamma}_2)$ ist. In der Tat, ist die Menge E_{ab} die Gesamturbildmenge des Bogens $\widehat{cd}$, also hat die Bildmenge des Bogens $\widehat{cd}$, der mit E_{ab} keine gemeinsame Punkte besitzt, keinen gemeinsamen Punkt mit $f(E_{ab})=\widehat{\alpha\beta}$.

Wir haben also unsere Aufgabe auf den ersten Fall zurückgeführt, da wir das Zusammenschmelzen zweier nicht auf $\widehat{cd}$ liegender Punkte der Membranenstücke Φ_1, Φ_2, und folglich auch Ψ_1, Ψ_2, bewiesen haben. Es existiert also, ebenfalls nach Hilfssatz IV, ein Verzweigungspunkt der Fläche F, was unmöglich ist.

Beide Fälle 1⁰ und 2⁰ haben sich als unmöglich erwiesen; also zerlegt der Bogen $\widehat{\alpha\beta}$ die Fläche F.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $\widehat{\alpha\beta}$ die Fläche F in irreduzibler Weise zerlegt, d. h. dass keine Teilmenge $M\subset\widehat{\alpha\beta}$ diese Eigenschaft besitzt. Wir entfernen einen beliebigen Punkt $\gamma\subset\widehat{\alpha\beta}$ und zeigen, dass $(F-\widehat{\alpha\beta})+\gamma$ zusammenhängend ist. Es seien in der Tat χ, λ zwei Punkte auf zwei verschiedenen Bögen $\widehat{\alpha\beta_1}$, $\widehat{\alpha\beta_2}$ des Randes Q^* von F. Wir können zwei Bögen $\widehat{\chi\gamma}$ und $\widehat{\lambda\gamma}$ konstruieren, die im Innern der Membranenstücke Φ_1 und Φ_2 verlaufen und ausser γ keinen Punkt mit dem Bogen $\widehat{\alpha\beta}$ gemein haben, da γ sowohl aus $\Phi_1-\widehat{\alpha\beta}$ als auch aus $\Phi_2-\widehat{\alpha\beta}$ erreichbar ist. Also ist $(F-\widehat{\alpha\beta})+\gamma$ wirklich zusammenhängend.

Alle Forderungen von L. Zippin sind somit für die unverzweigte Membran erfüllt. Also ist F einer Kreisscheibe homöomorph, w. z. b. w.

Als Korollar erhält man folgenden

Satz. *Jede stetige, zweistufig stetige, unverzweigte Fläche ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit.*

Wir verstehen dabei die zweistufige Stetigkeit (d. h. den lokalen Zusammenhang in 2 Dimensionen) im Sinne von Homotopie.

Sur les courbes sans noeuds.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Soient Ω_0 et Ω deux courbes simples fermées sans points communs, situées dans la sphère à 3 dimensions S^3 (espace euclidien avec point à l'infini).

Dans un travail récent de M. K. Borsuk et moi[1]), le théorème suivant est établi:

(*T*) *Pour que Ω soit un rétracte*[2]) *de $S^3-\Omega_0$, il faut et il suffit que* $\bar{v}(\Omega, \Omega_0)=1$.

La question de conditions nécessaires et suffisantes pour que Ω soit un rétracte de $S^3-\Omega_0$ par déformation[2]) y a été posée comme problème. Or, il est évident que si Ω est un rétracte de $S^3-\Omega_0$ par déformation, les groupes fondamentaux $\pi_1(S^3-\Omega_0)$ et $\pi_1(\Omega)$ sont isomorphes. Il en résulte que $\pi_1(S^3-\Omega_0)$ est alors isomorphe avec le groupe $\mathfrak{F}_1$ de tous les nombres entiers, ce qui signifie que, dans le sens de la théorie des noeuds (basée sur la notion de groupe fondamental), la courbe Ω_0 est sans noeud.

Je vais montrer dans le travail présent que c'est là la seule hypothèse à ajouter pour pouvoir remplacer dans l'enoncé (*T*) la rétraction ordinaire par celle de déformation.

J'obtiens en outre le résultat suivant: *pour qu'une courbe simple fermée $\Omega_0\subset S^3$ soit sans noeud, il faut et il suffit que l'ensemble $S^3-\Omega_0$ se laisse déformer dans lui-même en un polyèdre à 1 dimension.*

Les théorèmes démontrés seront ensuite étendus aux continus plus généraux que les courbes simples fermées.

---

[1]) K. Borsuk et S. Eilenberg, *Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. 26 (1936), p. 215.

[2]) ibid., p. 215, renvoi [16]).

I.

(1) *Pour tout complexe géometrique*[3]) K^n *de dimension* n *et tel que* $\beta_2^n(K^n)=0$, *on a* $\beta^n(K^n)=0$.

Démonstration. Soit $\gamma^{(n)} \neq 0$ un cycle n-dimensionnel dans K^n à coefficients entiers. Soit p le plus grand entier tel qu'il existe un cycle $\gamma_p^{(n)}$ pour lèquel $\gamma^{(n)}=2^p \cdot \gamma_p^{(n)}$. Le cycle $\gamma_p^{(n)}$ contient alors un simplexe Δ^n de dimension n muni d'un coefficient impair. Il en résulte que $\gamma_p^{(n)}$ *non* $\equiv 0$ mod 2, contrairement à l'hypothèse que $\beta_2^n(K^n)=0$.

(2) *Prémisses*: *1⁰* K^n *est un complexe géometrique de dimension* n, *tel que* $\beta_2^n(K^n)=0$,

2⁰ $\widetilde{K}^n$ *est un complexe de recouvrement à deux feuillets*[4]) *de* K^n.

Thèse: $\beta_2^n(\widetilde{K}^n)=0$.

Démonstration. Soit u la fonction projetant $\widetilde{K}^n$ sur K^n. Il existe alors une homéomorphie h de $\widetilde{K}^n$ en lui-même telle que l'on a pour tout $x \in \widetilde{K}^n$:

$$hh(x)=x, \qquad u(x)=uh(x).$$

Soit $\gamma^{(n)}$ un cycle n-dimensionnel mod 2 dans $\widetilde{K}^n$, tel que

(i) $$h(\gamma^{(n)})=\gamma^{(n)}.$$

Le complexe géométrique $|\gamma^{(n)}|$ jouit de la propriété suivante: tout simplexe Δ^{n-1} de dimension $n-1$ de $\widetilde{K}^n$ est la frontière d'un

[3]) Un *complexe géométrique* K est entendu comme un polyèdre avec décomposition simpliciale fixe. Si le complexe n'est pas supposé fini, le nombre de ses simplexes peut être infini et leur dimension non bornée.

Les *cycles algébriques* sont toujours entendus comme appartenant à la division simpliciale fixe de K. Etant donné un tel cycle n-dimensionnel $\gamma^{(n)}$ dans K, nous désignerons par $|\gamma^{(n)}|$ le sous-complexe de K de dimension n composé de tous ses simplexes de dimension n qui entrent dans $\gamma^{(n)}$ avec un coefficient non nul.

Nous entendons respectivement par $\beta^n(K)$ et $\beta_2^n(K)$ le n-ième groupe d'homologie (non réduit) et le n-ième groupe de Betti mod 2 de K.

Nous écrirons $\beta^n(K)=0$ (ou $\beta_2^n(K)=0$) pour dire que ce groupe se réduit à l'élément neutre.

[4]) Pour tout ce qui concerne la notion de *recouvrement* voir Seiffert-Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig—Berlin, B. G. Teubner, 1934, pp. 181—203.

nombre pair de simplexes de dimension n de $|\gamma^{(n)}|$. D'autre part, $|\gamma^{(n)}|$ est en vertu de (i) un complexe de recouvrement du complexe géométrique $u(|\gamma^{(n)}|)$. Ce dernier jouit donc de la propriété suivante: tout simplexe Δ^{n-1} de dimension $n-1$ de K^n est la frontière d'un nombre pair de simplexes de dimension n de $u(|\gamma^{(n)}|)$. Cette propriété implique l'existence dans K^n d'un cycle mod 2, $\gamma_1^{(n)}$, tel que $|\gamma_1^{(n)}|=u(|\gamma^{(n)}|)$. Or, en vertu de *1⁰*, on a $\gamma_1^{(n)}=0$, de sorte que $u(|\gamma^{(n)}|)$ est vide. Il en est donc de même pour $|\gamma^{(n)}|$, d'où $\gamma^{(n)}=0$.

Soit maintenant $\gamma^{(n)}$ un cycle n-dimensionnel arbitraire mod 2 dans $\widetilde{K}^n$. En posant $\gamma_1^{(n)}=\gamma^{(n)}+h(\gamma^{(n)})$, on a

$$h(\gamma_1^{(n)})=h(\gamma^{(n)})+hh(\gamma^{(n)})=h(\gamma^{(n)})+\gamma^{(n)}=\gamma_1^{(n)},$$

d'où $\gamma_1^{(n)}=0$ et par conséquent $\gamma^{(n)}+h(\gamma^{(n)})=0$. Les coefficients étant entendus mod 2, on a donc $\gamma^{(n)}=h(\gamma^{(n)})$, d'où $\gamma^{(n)}=0$, c. q. f. d.

Soient à présent: $\widetilde{K}$ un complexe de recouvrement d'un complexe géométrique K et u la fonction projetant $\widetilde{K}$ sur K.

Appelons ce recouvrement *cyclique infini*, lorsqu'il existe une transformation homéomorphe h de $\widetilde{K}$ en lui-même, telle que:

1⁰ aucune des homéomorphies itérées h^k $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ n'admet de point invariant:

2⁰ l'égalité $u(x_1)=u(x_2)$ équivaut à l'existence d'un entier k pour lequel $h^k(x_1)=x_2$.

La condition 2⁰ exprime que u est une fonction qui identifie chaque point $x \in \widetilde{K}$ avec tous les points de la forme $h^k(x)$.

Or, l'identification de chaque $x \in \widetilde{K}$ avec les points de la forme $h^{2k}(x)$ donne un complexe géométrique K_1, qui est un complexe de recouvrement à deux feuillets de K et pour lequel $\widetilde{K}$ est un complexe de recouvrement cyclique infini (qui correspond à l'homéomorphie h^2). En itérant ce procédé, on obtient pour tout p naturel une suite de complexes géométriques

(*) $$K=K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_p$$

telle que K_{i+1} est un complexe de recouvrement à deux feuillets de K_i $(i=0, 1, \ldots, p-1)$ et $\widetilde{K}$ est un complexe de recouvrement cyclique infini de K_p (qui correspond à l'homéomorphie h^{2^p}).

(3) *Etant donné un ensemble compact $X \subset \widetilde{K}$, il existe toujours un k_0 naturel tel que $X \cdot h^k(X) = 0$ pour tout entier k où $|k| \geqslant k_0$.*

Démonstration. Il existerait dans le cas contraire une suite d'entiers différents $\{k_r\}$ et une suite $\{x_r\}$ de points de X, telles que $h^{k_r}(x_r) \epsilon X$. L'ensemble X étant compact, on peut admettre que $\{x_r\}$ converge vers $y_0 \epsilon X$ et que $\{h^{k_r}(x_r)\}$ converge vers $x_0 \epsilon X$. Comme $u h^{k_r}(x_r) = u(x_r)$, on a $u(x_0) = u(y_0)$. Il existe par conséquent un entier s tel que $h^s(x_0) = y_0$. Considérons la suite des $y_r = h^{k_r+s}(x)$. On a $\lim_r y_r = h^s[\lim_r h^{k_r}(x_r)] = h^s(x_0) = y_0$. Nous avons ainsi obtenu deux suites $\{x_r\}$ et $\{y_r\}$ telles que 1^0 $\lim_r x_r = \lim_r y_r = y_0$, 2^0 $x_r \neq y_r$ pour tout r, sauf peut-être un, pour lequel $k_r + s = 0$, 3^0 $u(x_r) = u(y_r)$. Il en résulte que la fonction u n'est pas une homéomorphie locale au point y_0.

(4) *Prémisses*: *1^0 K^n est un complexe géométrique de dimension n, tel que $\beta_2^n(K^n) = 0$,*

2^0 $\widetilde{K}^n$ est un complexe de recouvrement cyclique infini de K^n.

Thèse: $\beta_2^n(\widetilde{K}^n) = 0$.

Démonstration. Soit $\gamma^{(n)}$ un cycle n-dimensionnel mod 2 dans $\widetilde{K}^n$. L'ensemble $|\gamma^{(n)}|$ étant compact, il existe en vertu de (3) un p naturel tel que

(ii) $$|\gamma^{(n)}| \cdot h^{k \cdot 2^p}(|\gamma^{(n)}|) = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 0.$$

Considérons la suite (*). En appliquant (2) p fois, on obtient

(iii) $$\beta_2^n(K_p^n) = 0.$$

Le complexe géométrique K_p^n s'obtient de $\widetilde{K}^n$ par l'identification de tout $x \epsilon \widetilde{K}^n$ avec les points de la forme $h^{k \cdot 2^p}(x)$. En désignant par u_1 la fonction qui projette $\widetilde{K}^n$ sur K_p^n, on trouve en vertu de (ii) que u_1 transforme $|\gamma^{(n)}|$ en $u_1(|\gamma^{(n)}|)$ par homéomorphie. D'autre part, en vertu de (iii), on a $u_1(\gamma^{(n)}) = 0$, d'où $\gamma^{(n)} = 0$.

(5) *Prémisses*: *1^0 K^n est une pseudo-multiplicité à n dimensions,*

2^0 $\widetilde{K}^n$ est un complexe de recouvrement cyclique infini de K^n,

3^0 K_1^n est un vrai sous-complexe fini de K^n, tel que $\beta_2^{n-1}(K_1^n) = 0$.

Thèse: $\beta_2^{n-1}(\widetilde{K}_1^n) = \beta^{n-1}(\widetilde{K}_1^n) = 0$.

Démonstration. Dans le cas où K_1^n est de dimension $n-1$ au plus, la thèse résulte de (4) et de (1). Soit donc $k > 0$ le nombre des simplexes de dimension n de K_1^n et admettons la thèse pour $k-1$.

K_1^n étant un vrai sous-complexe de la pseudo-multiplicité K^n, il existe dans K_1^n un simplexe n-dimensionnel Δ^n tel qu'une de ses faces $(n-1)$-dimensionnelles Δ^{n-1} n'appartient à aucun autre simplexe n-dimensionnel de K_1^n. Soit N la somme des faces $(n-1)$-dimensionnelles de Δ^n différentes de Δ^{n-1}. Le complexe $(n-1)$-dimensionnel N est évidemment un rétracte de Δ^n par déformation; de même $K_2^n = K_1^n - \Delta^n + N$ est un rétracte de K_1^n par déformation. Pareillement, $\widetilde{K}_2^n$ en est un de $\widetilde{K}_1^n$. Il en résulte que

(iv) $$\beta_2^{n-1}(K_2^n) = \beta_2^{n-1}(K_1^n) = 0,$$

(v) $$\beta_2^{n-1}(\widetilde{K}_2^n) \quad \text{est isomorphe à} \quad \beta_2^{n-1}(\widetilde{K}_1^n).$$

(vi) $$\beta^{n-1}(\widetilde{K}_2^n) \quad \text{est isomorphe à} \quad \beta^{n-1}(\widetilde{K}_1^n),$$

Le nombre de simplexes de dimension n de K_2^n étant $k-1$, il résulte de (iv) que $\beta_2^{n-1}(\widetilde{K}_2^n) = \beta^{n-1}(\widetilde{K}_2^n) = 0$, d'où, en vertu de (v) et (vi), $\beta_2^{n-1}(\widetilde{K}_1^n) = \beta^{n-1}(\widetilde{K}_1^n) = 0$, c. q. f. d.

Lemme. *Soit $X \subset S^3$ un continu qui ne coupe pas S^3. Soient: $K^3 = S^3 - X$ et $\widetilde{K}^3$ la multiplicité de recouvrement universel de K^3. Si le groupe $\pi_1(K^3)$ est isomorphe à $\mathfrak{J}_1$, on a*

$$\beta^n(\widetilde{K}^3) = 0 \quad \textit{pour} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Démonstration. 1^0 $n=1$. L'égalité $\beta^1(\widetilde{K}^3) = 0$ est alors une conséquence de l'hypothèse faite sur $\widetilde{K}^3$.

2^0 $n=2$. Soit $\{K_r^3\}$ une suite de complexes géométriques tels que

(vii) $$\sum_{r=1}^{\infty} K_r^3 = K^3,$$

(viii) $$K_{r+1}^3 \text{ contient } K_r^3 \text{ dans son intérieur},$$

(ix) $$S^3 - K_r^3 \text{ est connexe.}$$

En appliquant mod 2 le théorème de dualité de M. J. W. Alexander, on conclut de (ix) que $\beta_2^2(K_r^3) = 0$. L'hypothèse faite sur $\pi_1(K^3)$ implique que $\widetilde{K}^3$ est une multiplicité de recouvrement cyclique infini de K^3; en vertu de (5) on a donc

(x) $$\beta^2(\widetilde{K}_r^3) = 0.$$

Pour tout ensemble compact $Y \subset K^3$, il existe en vertu de (vii) et de (viii) un r tel que $Y \subset K^3_r$. Il existe par conséquent pour tout ensemble compact $Y' \subset \widetilde{K}^3$ un r tel que $Y' \subset \widetilde{K}^3_r$. On en tire $\beta^2(\widetilde{K}^3)=0$ en vertu de (x).

3^0 $n=3$. $\widetilde{K}^3$ est une multiplicité non-compacte à 3 dimensions. Par conséquent $\beta^3(\widetilde{K}^3)=0$.

4^0 $n \geqslant 4$. $\widetilde{K}^3$ étant de dimension 3, il en résulte que $\beta^n(\widetilde{K}^3)=0$.

II.

Un espace X est dit selon M. W. Hurewicz *asphérique*, lorsque toute transformation continue de la surface sphérique S^n à $n \geqslant 2$ dimensions en un sous-ensemble de X est inessentielle [5]).

On sait [6]) que l'asphéricité d'un polyèdre connexe X équivaut à l'ensemble des égalités

$$\beta^n(\widetilde{X})=0 \quad \text{pour} \quad n=1,2,\dots$$

où $\widetilde{X}$ désigne l'espace de recouvrement universel de X. Le lemme qui vient d'être établi prend donc la forme du suivant

Théorème 1. *Soit $X \subset S^3$ un continu qui ne coupe pas S^3. Si le groupe $\pi_1(S^3-X)$ est isomorphe à $\mathfrak{F}_1$, l'ensemble S^3-X est asphérique.*

Théorème 2. *Soit $X \subset S^3$ un continu qui ne coupe pas S^3. Si le groupe $\pi_1(S^3-X)$ est isomorphe à $\mathfrak{F}_1$, toute courbe simple fermée $\Omega \subset S^3-X$ qui est un rétracte de S^3-X en est un rétracte par déformation.*

Démonstration. Soit f_1 la fonction continue rétractant S^3-X en Ω. Choisissons un point $x_0 \epsilon \Omega$ comme l'origine de tous les parcours fermés dans S^3-X et dans Ω.

En assignant à la courbe simple fermée Ω une orientation, cette courbe pourra être considérée comme un parcours fermé W_0. Nous allons démontrer que W_0 peut être considéré comme base du groupe $\pi_1(S^3-X)$. En effet, ce groupe étant isomorphe à $\mathfrak{F}_1$, il existerait dans le cas contraire un parcours fermé W et un entier $n \neq \pm 1$ tel

[5]) W. Hurewicz, *Beiträge zur Topologie der Deformationen IV, Aspherische Räume*, Proceed. Akad. Amsterdam 39 (1936), p. 215.

[6]) ibid., p. 216.

que $W_0 \simeq W^n$ dans S^3-X (c. à d. que le parcours W_0 serait homotope avec le parcours W parcouru n fois). On aurait donc $f_1(W_0) \simeq [f_1(W)]^n$ dans Ω, ce qui est impossible, puisque $f_1(W_0)=W_0$ constitue une base de $\pi_1(\Omega)$.

Soit maintenant W un parcours fermé dans S^3-X. Il existe donc un entier n tel que $W \simeq W_0^n$ dans $S^3-\Omega$. On a donc aussi $f_1(W) \simeq [f_1(W_0)]^n$, mais comme $f_1(W_0)=W_0$, il vient $f_1(W) \simeq W$ dans S^3-X.

Posons $f_0(x)=x$ pour tout $x \epsilon S^3-X$. Les parcours $f_0(W)$ et $f_1(W)$ sont donc homotopes entre eux pour tout parcours fermé W dans S^3-X. Il en résulte que les fonctions f_0 et f_1 déterminent la même transformation de $\pi_1(S^3-X)$ en $\pi_1(S^3-X)$, notamment celle par l'identité. L'ensemble S^3-X étant asphérique d'après le th. 1, on en conclut, en vertu d'un théorème de M. W. Hurewicz [7]), que les transformations f_0 et f_1 sont homotopes, c. à. d. qu'il existe une transformation continue g du produit cartésien $(S^3-X)\times\langle 0,1\rangle$ en S^3-X, telle que $g(x,0)=f_0(x)=x$ et $g(x,1)=f_1(x)$ pour tout $x \epsilon S^3-X$. Or, cela signifie précisément que Ω est un rétracte de S^3-X par déformation.

Théorème 3. *Cinq propriétés suivantes sont équivalentes pour toute courbe simple fermée $\Omega_0 \subset S^3$:*

(α_1) *le groupe $\pi_1(S^3-\Omega_0)$ est isomorphe à $\mathfrak{F}_1$.*

(α_2) *toute courbe simple fermée $\Omega \subset S^3-\Omega_0$ telle que $\bar{v}(\Omega,\Omega_0)=1$ est un rétracte de $S^3-\Omega_0$ par déformation.*

(α_3) *il existe une courbe simple fermée $\Omega \subset S^3-\Omega_0$ qui est un rétracte de $S^3-\Omega_0$ par déformation.*

(α_4) *l'ensemble $S^3-\Omega_0$ se laisse déformer (dans $S^3-\Omega_0$) en un ensemble compact de dimension 1.*

(α_5) *l'ensemble $S^3-\Omega_0$ se laisse déformer (dans $S^3-\Omega_0$) en un polyèdre fini à 1 dimension.*

Démonstration. $(\alpha_1)\to(\alpha_2)$. En vertu du théorème (T), la courbe Ω est un rétracte de $S^3-\Omega_0$, puisque $\bar{v}(\Omega,\Omega_0)=1$. En vertu de (α_1) et du th. 2, Ω est donc un rétracte de $S^3-\Omega_0$ par déformation.

[7]) l. c., p. 217. Ce théorème n'a été énoncé par M. W. Hurewicz que pour le cas où les fonctions f_0 et f_1 sont définies sur des polyèdres finis. Or, sa démonstration, reconstruite d'après l'esquisse qu'il a donnée, permet de se rendre compte aussitôt que ce théorème subsiste dans le cas des polyèdres infinis.

$(\alpha_2)\to(\alpha_3)$ [8]. On a $p_1(\Omega_0)=1$ [9], d'où $b_1(S^3-\Omega_0)=1$ [10]. Par conséquent l'ensemble $S^3-\Omega_0$ n'est pas unicohérent [11]. Il contient donc une courbe simple fermée Ω qui est son rétracte [12]. En vertu de (T), on a alors $\bar{v}(\Omega,\Omega_0)=1$, ce qui implique selon (α_2) que Ω est un rétracte de $S^3-\Omega_0$ par déformation.

$(\alpha_3)\to(\alpha_4)\to(\alpha_5)$. Evident.

$(\alpha_5)\to(\alpha_1)$. Soit $g(x,t)$ une fonction continue pour

$$(x,t)\in(S^3-\Omega_0)\times\langle 0,1\rangle,$$

telle que l'on ait $g(x,t)\in S^3-\Omega_0$ pour tout $(x,t)\in(S^3-\Omega_0)\times\langle 0,1\rangle$, $g(x,0)=x$ pour tout $x\in S^3-\Omega_0$ et que l'ensemble $g(S^3-\Omega_0,1)=P$ soit un polyèdre fini à 1 dimension. Choisissons un point $x_0\in S^3-\Omega_0$ comme l'origine des parcours fermés dans $S^3-\Omega_0$, et le point $y_0=g(x_0,1)\in P$ comme l'origine de ceux dans P. On trouve immédiatement que si un parcours $g(W,1)$ est homotope à 1, il en est de même pour W. Il en résulte que le groupe $\pi_1(S^3-\Omega_0)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\pi_1(P)$. Comme le groupe $\pi_1(P)$ est libre, puisque P est un polyèdre fini à 1 dimension, le groupe $\pi_1(S^3-\Omega_0)$, en tant que sous-groupe d'un groupe libre, est lui-même un groupe libre [13].

Reste à montrer que $\pi_1(S^3-\Omega_0)$ n'est pas un groupe libre à un nombre >1 de générateurs. Or, cela résulte du fait que l'abelisation de $\pi_1(S^3-\Omega_0)$ donne le groupe $\beta^1(S^3-\Omega_0)$ [14], qui est isomorphe à $\mathfrak{F}_1$.

Nous allons généraliser à présent le th. 3. Remarquons d'abord que le th. (T) se laisse généraliser comme il suit (sans en modifier la démonstration):

---

[8]) L'existence d'une courbe simple fermée Ω avec $\bar{v}(\Omega,\Omega_0)=1$ peut être déduite plus directement à l'aide du théorème de dualité de M. J. W. Alexander. La démonstration du texte est plus avantageuse au point de vue de la généralisation qui sera donnée plus loin.

[9]) $p_n(X)$ et $B^{(n)}(X)$ désignent respectivement le n-ième nombre et le n-ième groupe de Betti de l'ensemble compact X. Ce groupe de Betti s'obtient en partant des cycles convergents $\Gamma^{(n)}$, introduits dans l'article cité de K. Borsuk et S. Eilenberg, p. 208, renvoi [6]).

[10]) ibid., p. 212, Satz 1.

[11]) ibid., p. 217, renvoi [22]).

[12]) K. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), p. 184.

[13]) O. Schreier, Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. 5 (1927), p. 161.

[14]) Seiffert—Threlfall, l. c., p. 173.

(T') *Pour que la courbe simple fermée $\Omega\subset S^n-X$ soit un rétracte de l'ensemble ouvert S^n-X, il faut et il suffit qu'il existe deux cycles: $\Gamma_1^{(1)}$ dans Ω et $\Gamma_2^{(n-2)}$ dans X* [9]), *pour lesquels $v(\Gamma_1^{(1)},\Gamma_1^{(n-2)})=1$.*

Si l'on suppose que $p_{n-2}(X)=1$, on peut définir le nombre $\bar{v}(\Omega,X)$ par la formule

$$\bar{v}(\Omega,X)=|v(\Gamma_1^{(1)},\Gamma_2^{(n-2)})|,$$

où $\Gamma_1^{(1)}$ est un cycle-base de $B^{(1)}(\Omega)$ et $\Gamma_2^{(n-2)}$ en est un de $B^{(n-2)}(X)$ [9]). La proposition (T') implique alors la suivante:

(T'') *Soit $X\subset S^n$ un ensemble fermé et $p_{n-2}(X)=1$. Pour que la courbe simple fermée $\Omega\subset S^n-X$ soit un rétracte de S^n-X, il faut et il suffit que $\bar{v}(\Omega,X)=1$.*

Théorème 3'. *Le th. 3 reste vrai, si on y remplace la courbe simple fermée $\Omega_0\subset S^3$ par un continu quelconque $X\subset S^3$ ne coupant pas S^3 et tel que $p_1(X)=1$.*

On n'a, en effet, qu'à remplacer dans la démonstration du th. 3 (T) par (T'') et à modifier légèrement la dernière partie du raisonnement.

Voici cette modification. Il s'agit de prouver que le groupe $\pi_1(S^3-X)$ n'est pas un groupe libre à un nombre >1 de générateurs. Or, $p_1(X)=1$ implique $b_1(S^3-X)=1$ [10]). Il suffit donc d'appliquer le théorème suivant:

Etant donné un polyèdre (infini) P, connexe et tel que $b_1(P)=1$, si le groupe $\pi_1(P)$ est libre, il est isomorphe à $\mathfrak{F}_1$.

La démonstration de ce théorème paraîtra dans mon article *Sur les espaces multicohèrents II*, qui sera publié dans Fund. Math. 29.

Nous avons démontré (th. 1) que, pour toute courbe simple fermée sans noeud $\Omega_0\subset S^3$, l'ensemble $S^3-\Omega_0$ est asphérique. Il nous paraît intéressant de savoir:

1⁰ *pour quelles courbes simples fermées $\Omega_0\subset S^3$ l'ensemble $S^3-\Omega_0$ est asphérique?*

2⁰ *pour quels couples $\Omega_1,\Omega_2\subset S^3$ de courbes simples fermées disjointes l'ensemble $S^3-(\Omega_1+\Omega_2)$ est asphérique?*

La portée intuitive du deuxième problème s'éclaircit par les remarques suivantes:

1. Soit $S^2 \subset S^3$. Choisissons Ω_1 et Ω_2 dans deux domaines différents de $S^3 - S^2$. La sphère S^2 ne se laisse donc pas contracter en un point dans l'ensemble $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ et, par conséquent, ce dernier n'est pas asphérique.

2. Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles géométriques, enlacés et situés dans deux plans orthogonaux. Il existe alors dans $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ une surface T_2 d'un tore, laquelle est un rétracte de $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ par déformation. Or, T_2 étant asphérique, on en conclut que $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ l'est également.

3. Supposons que *le groupe* $\pi_1[S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)]$ *soit isomorphe à* $\mathfrak{F}_2$ (= groupe libre à 2 générateurs). *Alors l'ensemble* $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ *n'est pas asphérique.* En effet, s'il l'était, il se laisserait déformer dans lui-même en un sous-ensemble de dimension 1 [15]). En particulier, son deuxième groupe de Betti s'annulerait, contrairement au théorème de dualité de M. J. W. Alexander, $\Omega_1 + \Omega_2$ étant non connexe.

On voit ainsi que l'asphéricité de $S^3 - (\Omega_1 + \Omega_2)$ exprime une sorte d'„enchaînement" de Ω_1 et Ω_2.

Remarquons enfin que pour qu'un vrai sous-ensemble ouvert et connexe X de S^3 soit asphérique, il faut et il suffit que toute transformation continue de S^2 en un sous-ensemble de X soit inessentielle. Il est évident que la condition est nécessaire; d'autre part, elle implique [5]) l'égalité $\beta^2(\widetilde{X}) = 0$, où $\widetilde{X}$ designe l'espace de recouvrement universel de X. Comme on a aussi $\beta^n(\widetilde{X}) = 0$ pour $n \geqslant 3$, X est asphérique.

[15]) en vertu du théorème: *Tout polyèdre (même infini) connexe, asphérique et dont le groupe fondamental est un groupe libre à un nombre fini de générateurs se laisse déformer en un sous-polyèdre fini de dimension 1.* (S. Eilenberg, *Un théorème sur l'homotopie*, à paraître dans Ann. of Math. 38, (1937)).

Sur une classe de fonctionnelles linéaires.

Par

E. R. Love et L. C. Young (Cambridge, Angleterre).

1. Introduction. Dans un mémoire récent [1]), l'un de nous a montré le rôle important que joue la notion de *variation bornée d'ordre p* dans la théorie des intégrales de Stieltjes et dans des théorèmes nouveaux sur l'intégration terme à terme qui n'exigent plus l'hypothèse classique de l'intégrabilité absolue.

Nous démontrons ici des résultats en quelque sorte réciproques de ceux qui se trouvent dans le mémoire en question. Nous leur avons donnés une forme analogue à celle de théorèmes classiques de F. Riesz [2]) et H. Hahn [3]), mais légèrement plus compliquée. Par exemple, une fonctionnelle linéaire définie dans la métrique des fonctions continues qui ont variation bornée d'ordre p se révèle comme une intégrale de Stieltjes, mais seulement pour une famille de fonctions plus restreinte que celle qui sert comme point de départ.

2. La famille W_p. Soit f une fonction, réelle ou complexe, définie dans l'intervalle réel (a, b) que nous supposerons toujours fermé. On appelle *variation d'ordre* $p \geqslant 1$ la borne supérieure $V_p(f; a, b)$, ou simplement $V_p(f)$, des expressions

$$(\sum |\Delta f|^p)^{1/p}$$

pour les sommes d'intervalles Δ n'empiétant pas les uns sur les autres. Ici, comme dans la suite, Δf représente la différence $f(\beta) - f(\alpha)$ de la fonction f aux extrémités α et β de l'intervalle Δ.

[1]) Young [9].
[2]) Banach [1] p. 61 et Riesz [7].
[3]) Banach [1] p. 80, Théorème 5, et Hahn [4], p. 6.