Sur l'uniformisation des ensembles fermés.

Par

Stefania Braun (Warszawa).

Un ensemble plan F est dit (suivant M. Lusin[1])) *uniformisé au moyen d'un ensemble* $Q \subset F$ (relativement à l'axe $0X$), si toute parallèle à l'axe $0Y$ qui rencontre F rencontre Q en un et un seul point.

Théorème 1. *Tout ensemble plan fermé peut être uniformisé au moyen d'un ensemble G_δ.*

Démonstration. Soient: F un ensemble plan fermé, D une droite parallèle à l'axe $0X$, F_1 l'ensemble de tous les points de F qui sont situés sur la droite D ou au-dessus et F_2 celui de tous les points de F qui sont situés sur D ou au-dessous. Les ensembles F_1 et F_2 sont donc fermés et

$$F = F_1 + F_2. \tag{1}$$

Désignons respectivement par Q_1 et Q_2 l'ensemble des y-minima[2]) de F_1 et celui des y-maxima[2]) de F_2. Les ensembles Q_1 et Q_2 sont donc des G_δ [3]).

[1]) Cf. N. Lusin, *Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles*, C. R. Acad. Sc., vol. 190 (1930), p. 349—351 et *Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles*, Mathematica, vol. IV (Cluj 1930), p. 59; cf. aussi W. Sierpiński, *Sur l'uniformisation des ensembles mesurables (B)*, Fund. Math. XVI (1930), p. 136.

[2]) selon de terminologie de M. S. Mazurkiewicz, *Sur une propriété des ensembles $C(A)$*, Fund. Math. XI, p. 172.

[3]) Cf. W. Sierpiński, *Sur une question concernant les ensembles analytiques plans*, Fund. Math. XI, p. 294.

Soient P_1 et P_2 les projections sur l'axe $0X$ de Q_1 et Q_2 respectivement. L'ensemble des ordonnées de points de F_1 étant borné inférieurement et celui de F_2 supérieurement, P_1 coïncide avec la projection de F_1 et P_2 avec celle de F_2 sur l'axe $0X$. Les ensembles P_1 et P_2 sont donc des F_σ, ainsi que l'ensemble $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \in P_1]$. L'ensemble $Q_2 - \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \in P_1]$, comme différence d'un G_δ et d'un F_σ, est donc un G_δ. Posons

$$Q = Q_1 + (Q_2 - \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \in P_1]). \tag{2}$$

Comme somme de deux G_δ, Q est donc un G_δ. Comme $Q_1 \subset F_1 \subset F$ et $Q_2 \subset F_2 \subset F$, on a $Q \subset F$.

Je vais montrer que F est uniformisé par Q relativement, à l'axe $0X$.

En effet, si $x_0 \in P_1$, la droite $x = x_0$ contient exactement un point de Q_1 et aucun point de $Q_2 - \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \in P_1]$, donc, en tout, un point de Q. Si $x_0 \in P_2 - P_1$, cette droite ne contient aucun point de Q_1 et elle rencontre Q_2 exactement en un point. Or, puisque $x_0 \,\mathrm{non}\!\in P_1$, ce point apparient à $Q_2 - \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \in P_1]$, donc à Q.

En résumé, si x_0 appartient à $P_1 + P_2$, c. à d. à la projection de F sur $0X$, la droite $x = x_0$ rencontre le sous-ensemble Q de F précisément en un point, c. q. f. d.

Théorème 2. *Il existe un ensemble plan fermé F qui ne peut être uniformisé par aucun ensemble F_σ.*

Démonstration. Soient:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots \tag{1}$$

la suite de tous les nombres rationnels de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ converge vers une limite finie.

Soit, pour $x = 0$, $\varphi(x) = 0$ et pour $0 < x \leqslant 1$, $\varphi(x)$ la somme des termes de la suite $\{\varepsilon_n\}$ dont les indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ remplissent la condition $r_{n_k} < x$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ Soit, de même, $\psi(x)$ la somme des termes de cette suite dont les indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ remplissent la condition $r_{n_k} \leqslant x$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

Je vais montrer que l'ensemble

$$F = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = \varphi(x)] + \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = \psi(x)]$$

est fermé et ne contient aucun F_σ qui l'uniformiserait (par rapport à l'axe $0X$).

On a, selon la définition des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, $\varphi(x) < \psi(x)$ ou $\varphi(x) = \psi(x)$, suivant que x est un nombre rationnel ou non de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$. En outre:

$$(2) \qquad \begin{array}{l} \text{si } 0 \leqslant x_n < x \text{ et } \lim\limits_{n=\infty} x_n = x \leqslant 1, \text{ on a } \lim\limits_{n=\infty} \varphi(x_n) = \lim\limits_{n=\infty} \psi(x_n) = \varphi(x); \\ \text{si } 1 \geqslant x_n > x \text{ et } \lim\limits_{n=\infty} x_n = x \geqslant 0, \text{ on a } \lim\limits_{n=\infty} \varphi(x_n) = \lim\limits_{n=\infty} \psi(x_n) = \psi(x). \end{array}$$

Il en résulte que F est fermé.

Soit à présent Q un sous-ensemble de F, l'uniformisant par rapport à l'axe $0X$. Or, comme F admet par définition sur chaque verticale $x = r_n$ exactement deux points, dont l'un appartient à Q, et sur chaque verticale d'abscisse irrationnelle un point au plus, qui appartient à Q, l'ensemble $F - Q$ est dénombrable.

En désignant donc par R l'ensemble des points de $F - Q$ d'abscisse $0 < x < 1$, R est également dénombrable.

En outre, R est dense en soi. Considérons en effet un point $p = (x_0, y_0)$ de R. Alors $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$ et $y_0 = \varphi(x_0)$ ou bien $y_0 = \psi(x_0)$.

Si $y_0 = \varphi(x_0)$, soit $\{r_{n_i}\}$ une suite de nombres rationnels entre 0 et x_0 qui converge vers x_0. Une telle suite existe, puisque $x_0 > 0$. Soit $p_i = (r_{n_i}, y_i)$ celui des deux points de F d'abscisse r_{n_i} qui appartient à R. Alors $y_i = \varphi(r_{n_i})$ ou bien $y_i = \psi(r_{n_i})$ et $r_{n_i} < x_0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$; de plus $x_0 = \lim\limits_{i=\infty} r_{n_i}$, d'où en vertu de (2) $\lim\limits_{i=\infty} y_i = \varphi(x_0) = y_0$, donc $\lim\limits_{i=\infty} p_i = p$ et, comme $r_{n_i} \neq x_0$, l'on a $p_i \neq p$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$

Si $y_0 = \psi(x_0)$, soit $\{r_{n_i}\}$ une suite de nombres rationnels entre x_0 et 1 qui converge vers x_0. Une telle suite existe, puisque $x_0 < 1$. Soit $p_i = (r_{n_i}, y_i)$ celui des deux points de l'ensemble F d'abscisse r_{n_i} qui appartient à R. Alors $y_i = \varphi(x_i)$ ou bien $y_i = \psi(x_i)$ et $r_{n_i} > x_0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$; en même temps $\lim\limits_{i=\infty} r_{n_i} = x_0$, d'où, en vertu de (2), $\lim\limits_{i=\infty} y_i = \psi(x_0) = y_0$ et $\lim\limits_{i=\infty} p_i = p$. Comme $r_{n_i} \neq x_0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, on a $p_i \neq p$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ Ainsi R est dense en soi.

Or, en supposant que Q puisse être un F_σ, l'ensemble $F - Q$, donc aussi l'ensemble R, serait un G_δ. Cependant un G_δ dense en soi ne peut pas être dénombrable.

Remarque 1 [4]. On peut prendre comme l'ensemble F la fermeture de l'image géométrique d'une fonction (croissante) quelconque de variable réelle qui admet un ensemble dénombrable de points de discontinuités dense dans tout intervalle. P. ex. on peut poser (Et désignant le plus grand entier ne dépassant pas t):

$$F = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\left[0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = \sum_{n=1}^{\infty} Enx/2^n\right].$$

Remarque 2. Par une légère modification de la définition de R, on peut établir l'impossibilité d'une uniformisation (relative à l'axe $0X$) au moyen d'un F_σ — aussi pour l'ensemble fermé F composé des points (x, y) tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$.

Théorème 3. *Tout ensemble plan F_σ peut être uniformisé au moyen d'un ensemble $G_{\delta\sigma}$.*

Chaque F_σ s'obtenant par l'addition dénombrable des ensembles fermés, le passage du th. 1 au th. 3 peut s'opérer par le même procédé qui a été employé par M. Lusin pour démontrer deux théorèmes suivants:

1) *Tout ensemble plan mesurable (B) qui est coupé par chaque parallèle à l'axe $0Y$ en une infinité au plus dénombrable de points peut être uniformisé relativement à l'axe $0X$ par un ensemble mesurable (B)* [5].

2) *Tout ensemble analytique plan qui est coupé par chaque parallèle à l'axe $0Y$ en une infinité au plus dénombrable de points peut être uniformisé relativement à l'axe $0X$ par une différence de deux ensembles analytiques* [6].

---

[4]) Cette remarque est due à M. W. Sierpiński.

[5]) Cf. N. Lusin, *Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles*, Mathematica, vol. IV (Cluj 1930), p. 60—61.

[6]) ibid. p. 62.

Quant aux ensembles mesurables (B) des autres classes, nous savons que *chaque ensemble plan mesurable* (B) *peut être uniformisé par un complémentaire analytique, et qu'il existe des* G_δ *plans, même parmi les images de fonctions* $y=f(x)$ *de I-e classe de Baire de variable réelle, qui ne peuvent être uniformisés relativement à l'axe* $0Y$ *par aucun ensemble analytique*[7]).

[7]) Cf. W. Sierpiński, *Sur l'uniformisation des ensembles mesurables* (B), Fund. Math. XVI, p. 136—40 et N. Lusin, *Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles*, Mathematica, vol. IV (Cluj 1930), p. 60, *Sur les points d'unicité d'un ensemble mesurable* (B), C. R. Acad. Sc., vol. 189, p. 423 et *Sur les ensembles analytiques*, Fund.. Math. X, p. 65.

Über stetige Abbildungen eines Elementes.

Von

Julia Różańska (Moskau).

Unter den stetigen Abbildungen eines kompakten metrischen Raumes auf ein Element spielen die sog. *wesentlichen* Abbildungen eine sehr wichtige Rolle, da sie mit der Dimension und anderen Homologie-Begriffen eng verbunden sind. Die Fragen der Homotopie sind dagegen mit den stetigen Bildern eines Elementes verknüpft.

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Theorie der Homologie- und Homotopie-Membranen und der dazugehörigen stetigen Abbildungen.

Das Hauptresultat besteht in dem Homöomorphie-Satze (§ 3), der besagt, dass eine *irreduzible nulldimensionale auf dem Rande eineindeutige Abbildung eines Elementes auf eine unverzweigte Homotopie-Membran ein Homöomorphismus ist.*

Man versteht dabei unter einer *unverzweigten Homotopie-Membran* ein stetiges, auf dem Rande eineindeutiges Bild eines Elementes derart, dass jeder nicht auf dem Rande liegender Punkt dieses Bildes durch eine *sphäroidale*[1]) Menge für jedes $\varepsilon > 0$ ε-ausgesondert werden kann.

Der Satz bildet in einem gewissen Sinne eine Charakteristik des n-dimensionalen Elementes, die aber Einschränkungen nicht nur auf die Struktur des Bildraumes, sondern auch auf den Charakter der betrachteten Abbildung zulässt. Für $n=2$ fallen diese Einschränkungen ab und man enthält eine neue Charakteristik der Kreisscheibe, als einer unverzweigten Homotopie-Membran (§ 4).

[1]) S ist *sphäroidal*, falls für jeden Punkt $x \epsilon S$ eine Umgebung $U_x \subset S$ existiert derart, dass $S \subset U_x$ ein absoluter Retrakt ist (K. Borsuk, *O zagadnieniu topologicznego scharakteryzowania sfer euklidesowych*, Wiadomości Matematyczne, Warszawa 1934, polnisch).