respondants de P_3 et les cycles $C_{i,j}$, obtenus par l'orientation cohérente des surfaces sphériques singulières $S_{i,j}$[18]), constituent une base du groupe $B^2(P_3)$. On prouve par un raisonnement analogue à celui employé pour la construction de P_1 qu'il existe dans P_4 des surfaces sphériques euclidiennes $S'_{i,j}$ disjointes deux à deux et telles que tout $C_{i,j}$ est homologue dans P_4 au cycle obtenu de $S'_{i,j}$ par l'une des deux orientations cohérentes des simplexes de $S'_{i,j}$. Or, ces derniers cycles constituent une base d'homologie de dimension 2 pour P_4.

Construction de P_5. Soit $E^3_{i,j}$ un élément euclidien de dimension 3 dont la frontière coïncide avec $S'_{i,j}$. En admettant que tous les éléments $E_{i,j}$ sont disjoints deux à deux, désignons par P_5 le polyèdre-somme $P_4+\sum_{i,j} E^3_{i,j}$. Tout parcours fermé Ω contenu dans P_5 étant évidemment déformable dans P_5 en un parcours fermé contenu dans P_4, et le groupe fondamental de P_4 se réduisant à zéro, on conclut que le groupe fondamental de P_5 disparaît. On constate en outre que les polyèdres $P'=P_4$ et $Q'=\sum_{i,j} E_{i,j}$ satisfont à la condition (4) pour tout $r=0,1,\ldots$. En s'appuyant donc sur la proposition (5), on conclut que le polyèdre P_5 est acyclique en toutes les dimensions, c. q. f. d.

Les problèmes suivants restent ouverts:

La thèse du théorème reste-t-elle vraie pour les espaces compacts arbitraires?

Le polyèdre qui n'admet de transformation essentielle en aucune surface sphérique est-il acyclique en toutes les dimensions?

[18]) $S_{i,j}$ étant un transformé simplicial d'une surface sphérique euclidienne $S^*_{i,j}$, le cycle $C_{i,j}$ est le cycle qui correspond par cette transformation simpliciale au cycle qu'on obtient de $S^*_{i,j}$ par l'orientation cohérente de ses simplexes.

Sur une propriété d'ensembles.

Par

Stefania Braun (Warszawa).

M. Lusin désigne par P_0 la propriété suivante d'ensembles:

Quel que soit un ensemble parfait Π, si l'ensemble E possède sur Π une infinité non dénombrable de points, le produit $E\Pi$ contient un ensemble parfait de points [1]).

M. Lusin écrit:

„*Or, en reprenant les déductions des idéalistes basées sur l'hypothèse du continu (c'est-à-dire une énumération des points du continu au moyen des nombres transfinis de seconde classe), on forme sans aucune difficulté une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ qui possèdent tous la propriété P_0 sans que leur partie commune la possède, bien qu'elle soit non dénombrable.*“ [2])

Je me propose de démontrer dans cette Note (toujours *en admettant l'hypothèse du continu*) *l'existence de deux ensembles à propriété P_0 dont la partie commune n'en jouit pas.*

Ma démonstration primitive étant plus compliquée, je donne ici la démonstration simplifiée par M. Sierpiński.

Lemme. *Il existe deux F_σ linéaires, disjoints et admettant des sous-ensembles parfaits non vides dans tout intervalle* [3]).

[1]) Cf. N. Lusin, *Sur les ensembles analytiques*, Fund. Math. X, p. 42.

[2]) ibidem, p. 43.

[3]) Cf. W. Sierpiński, *O pewnej mnogości punktowej i jej zastosowaniu do teorji funkcji zmiennej rzeczywistej*, Wektor IV, Warszawa 1914—15, p. 97—9 (en polonais).

Démonstration. Soit

(1) $$J_1, J_2, J_3, \ldots$$

une suite de tous les intervalles fermés aux extrémités rationnelles.

Soit $A_n^{(1)} \subset J_1$ un ensemble parfait non-dense et non vide. L'ensemble $J_1 - A_1^{(1)}$, comme un F_ϱ de II-ième catégorie, contient un ensemble parfait non-dense et non vide. Soit $A_1^{(2)}$ un tel ensemble. Nous avons donc:

(2) $$A_1^{(1)} + A_1^{(2)} \subset J_1 \quad \text{et} \quad A_1^{(1)} \cdot A_1^{(2)} = 0.$$

Nous allons définir les ensembles parfaits non-denses et non vides $A_n^{(1)}$ et $A_n^{(2)}$ de façon que les conditions suivantes soient remplies:

(3) $$A_n^{(1)} + A_n^{(2)} \subset J_n \quad \text{et} \quad A_n^{(1)} \cdot \sum_{j \leq n} A_j^{(2)} = A_n^{(2)} \cdot \sum_{j < n} A_j^{(1)} = 0.$$

Admettons en effet qu'il en est ainsi pour $A_{n-1}^{(1)}$ et $A_{n-1}^{(2)}$. L'ensemble $\sum_{j=1}^{n-1} A_j^{(2)}$ étant non-dense, l'ensemble $J_n - \sum_{j=1}^{n-1} A_j^{(2)}$, contient donc un ensemble parfait non-dense et non vide. Désignons-le par $A_n^{(1)}$. De même, l'ensemble $\sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)}$ étant non-dense, l'ensemble $J_n - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)}$ contient un sous-ensemble parfait non-dense et non vide. Désignons-le par $A_n^{(2)}$.

On a donc par définition $A_n^{(1)} \subset J_n - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(2)}$ et $A_n^{(2)} \subset J_n - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)}$, de sorte que les conditions (3) sont remplies pour n, pourvu qu'elles l'étaient pour $n-1$. Comme elles le sont d'après (2) pour $n=1$, les suites d'ensembles parfaits non-denses et non vides $\{A_n^{(1)}\}$ et $\{A_n^{(2)}\}$, satisfaisant aux conditions (3), se trouvent ainsi définies.

On conclut de (3) que les F_σ de I-e catégorie

(4) $$M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \quad \text{et} \quad M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)}$$

sont des ensembles linéaires disjoints.

Étant donné à présent un intervalle quelconque J, et J_n désignant un des intervalles de la suite (1) contenu dans J, l'ensemble $M_i J$, où $i=1$ et 2, contient selon (3) et (4) l'ensemble parfait non vide $A_n^{(i)}$.

Théorème. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe deux ensembles E_i (où $i=1$ et 2) jouissant de la propriété P_0 et dont la partie commune n'en jouit pas* (elle est donc indénombrable).

Démonstration. Soit L l'ensemble linéaire indénombrable, *construit à l'aide de l'hypothèse du continu* par M. Lusin et qui *est au plus dénombrable sur tout ensemble parfait non-dense*[4]). Posons:

(5) $$E_i = L + M_i \qquad (i=1 \text{ et } 2),$$

où les ensembles M_i sont situés sur la même droite que L et assujettis aux conditions du lemme.

Soit Π un ensemble parfait tel que $E_i \Pi$ soit indénombrable. On peut évidemment se borner au cas de Π linéaire, en désignant au besoin par Π l'ensemble parfait contenu dans son produit indénombrable avec la droite contenant E_i.

Si Π contient un intervalle J, l'ensemble $M_i J$ contient, selon la définition de M_i, un ensemble parfait non vide, qui est, en vertu de (5), un sous-ensemble de $E_i \Pi$. Si, au contraire, Π est non-dense, l'ensemble $L\Pi$ est, selon la définition de L, au plus dénombrable. L'ensemble $M_i \Pi = E_i \Pi - L\Pi$ est par conséquent un F_σ indénombrable. Comme tel, il contient un ensemble parfait et non vide, qui est donc encore un sous-ensemble de $E_i \Pi$. La propriété P_0 des ensembles E_1 et E_2 est ainsi établie.

Or, M_1 et M_2 étant disjoints, on conclut de (5) que $E_1 E_2 = L$. L'ensemble L est indénombrable et admet avec un ensemble parfait (notamment avec la droite où il est situé) une infinité indénombrable de points communs. D'autre part, L ne contient aucun sous-ensemble parfait non vide, car il est par définition au plus dénombrable sur tout ensemble parfait non-dense. Il est donc dépourvu de la propriété P_0, c. q. f. d.

---

[4]) Cf. N. Lusin, *Sur un problème de M. Baire*, C. R. de l'Acad. Sc. Paris, t. 158, Séance du 4 mai 1914; voir aussi Fund. Math. VI, p. 155.