ments de H_{m-1}, $z_1^m, z_2^m, \dots, z_{r_m}^m$, et un sous-ensemble H_m de S_m, de puissance $\aleph_{\alpha_{m-1}+1}$, tels que $H_{m-1}-(z_1^m, z_2^m, \dots, z_{r_m}^m) \subset H_m$ et qu'aucun couple d'éléments distincts de H_m n'est lié par la relation R.

L'ensemble Z de tous les éléments $z_1^m, z_2^m, \dots, z_{r_m}^m$ où $m=3,4,\dots$ est au plus dénombrable. Posons

$$H=(H_2+H_3+H_4+\dots)-Z. \tag{17}$$

Comme $\overline{\overline{Z}} \leqslant \aleph_0$ et $\overline{\overline{H}}_m = \aleph_{\alpha_{m-1}+1}$, l'ensemble H est, comme on voit sans peine, en tenant compte de (12), un sous-ensemble de E de puissance $\aleph_\alpha$. Montrons qu'aucun couple d'éléments distincts de H n'est lié par la relation R. En effet, soient x et $y \neq x$ deux éléments de H. D'après (17), il existe donc deux indices $p>1$ et $q>1$ tels que $x \epsilon H_p$ et $y \epsilon H_q$. Soit p. ex. $q \geqslant p$ (pour $q<p$ le raisonnement est tout à fait analogue). D'après $x \epsilon H$ et (17), on a $x \operatorname{non} \epsilon Z$, donc $x \epsilon H_p - Z$. Or, on voit aisément que $H_p - Z \subset H_q$. On a donc $x \epsilon H_q$ et $y \epsilon H_q$ et, d'après la définition de H_q, les éléments x et y ne sont pas liés par la relation R, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que la réponse au problème de M. Sierpiński est affirmative pour tout ensemble indénombrable E.

Sur les transformations des polyèdres acycliques en surfaces sphériques.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

D'après un théorème fondamental dû à M. H. Hopf[1]), le type d'homotopie[2]) d'une fonction continue f transformant un polyèdre P de dimension $\leqslant n$ en surface sphérique S_n (de dimension n) est défini par les grades avec lesquels f transforme en S_n les cycles (modulaires) n-dimensionnels de P. La situation est bien différente, lorsqu'on supprime l'hypothèse $\dim P \leqslant n$, car, d'après le résultat bien connu de M. H. Hopf, la surface sphérique S_3, qui est, bien entendu, acyclique en dimension 2[3]), admet des transformations essentielles[2]) en S_2. Or, la question s'impose s'il existe, pour un n, des polyèdres acycliques en toutes les dimensions et admettant des transformations essentielles en S_n. Le but de cet ouvrage est de résoudre cette question par la démonstration du théorème suivant:

Théorème. *P_0 étant un polyèdre acyclique en toutes les dimensions, chaque transformation continue de P_0 en une surface sphérique de dimension quelconque est inessentielle.*

---

[1]) H. Hopf, Comment. Math. Helv. 5 (1932), p. 39—54.

[2]) Deux fonctions continues f_0 et f_1 transformant un polyèdre P en S_n sont dites *homotopes* ou *du même type d'homotopie*, lorsqu'il existe pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ une fonction continue f_t transformant P en S_n et dépendant du paramètre t d'une manière continue. Les transformations de P en S_n homotopes avec une transformation de P en un seul point sont dites *inessentielles* et les autres *essentielles*.

[3]) Un polyèdre P est dit *acyclique en dimension r*, lorsque chaque cycle r-dimensionnel de P (aux coefficients arbitraires) est homologue à 0 dans P. Un polyèdre dont tous les groupes de Betti (aux coefficients entiers) disparaissent est acyclique en toutes les dimensions (Cf. P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1936, p. 228). Cela nous permet de ne considérer dans la suite que des cycles aux coefficients entiers.

Démonstration. Soit f une transformation continue de P_0 en S_n. Dans le cas où $n=0$, la thèse du théorème est une conséquence immédiate de la connexité de P_0; dans le cas où $n=1$, elle résulte du théorème, d'après lequel le type d'homotopie d'une transformation de P_0 en S_1 est défini par les grades avec lesquels f transforme les cycles 1-dimensionnels de P_0 en S_1[4]). Par conséquent, on peut se borner dans la suite au cas où $n \geqslant 2$.

Or, on sait que:

(1) *toute transformation continue en S_n d'un polyèdre contractile en soi est inessentielle.*

(2) *chaque polyèdre acyclique en toutes les dimensions et dont le groupe fondamental disparaît est contractile en soi*[5]).

Il ne reste donc à établir que l'existence d'un polyèdre $P_5 \supset P_0$ qui soit acyclique en toutes les dimensions, dont le groupe fondamental disparaisse et sur lequel f admette un prolongement continu (transformant P_5 en S_n).

Nous parvenons de P_0 au polyèdre P_5, en construisant successivement les polyèdres à indices intermédiaires par l'application convenable de deux opérations suivantes[5a]):

(a) multiplication cartésienne par un élément euclidien[6]),
(b) addition d'un polyèdre de dimension $\leqslant 3$.

Notons que la fonction f satisfait *dans le polyèdre P_0* à la condition:

(3) *la transformation des sous-polyèdres de dimension $\leqslant 2$ par f en S_n est inessentielle.*

En effet, c'est une conséquence du théorème de M. H. Hopf[1]), car P_0 est acyclique et $n \geqslant 2$.

[4]) Voir le livre cité de P. Alexandroff et H. Hopf, p. 517, th. IV'. Cf. aussi H. Hopf, Math. Ann. 104 (1931), p. 641, th. Va.

[5]) W. Hurewicz, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), p. 522, th. IV.

[5a]) Après avoir terminé ce travail, j'ai appris que M. N. Aronszajn a démontré un théorème général dont il résulte en particulier que l'on peut obtenir d'un polyèdre acyclique en toutes les dimensions un polyèdre contractile en soi à l'aide de l'opération (a) toute seule. La démonstration de M. N. Aronszajn va paraître prochainement dans Proceed. Akad. Amsterdam.

[6]) On entend par *élément euclidien* un polyèdre homéomorphe à une sphère euclidienne de dimension arbitraire et par une *surface sphérique euclidienne* un polyèdre homéomorphe à une surface sphérique de dimension arbitraire.

En admettant maintenant que la fonction f satisfait à la condition (3) dans un polyèdre donné P, nous allons prouver qu'elle admet un prolongement continu satisfaisant à la condition (3) sur tout polyèdre P^* qui s'obtient de P par les opérations (a)[7]) et (b).

Remarquons d'abord que pour que f soit inessentielle dans un ensemble A quelconque, il suffit que A soit susceptible (dans l'ensemble des arguments de f) d'une déformation continue $\varphi(x,t)$ en un ensemble B[8]) dans lequel f est inessentielle. En effet, la famille des fonctions $f_t(x)=f[\varphi(x,t)]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, qui sont alors continues, définies dans A et dépendent d'une manière continue du paramètre t, unit la fonction $f(x)=f_0(x)$ à la fonction $f_1(x)=f[\varphi(x,1)]$, qui est inessentielle, les valeurs de $\varphi(x,1)$ appartenant à B et f étant inessentielle dans B.

Ceci dit, considérons l'opération (a). Soit $P^*=P\times E$ où E est un élément euclidien de dimension arbitraire. Il existe alors une déformation continue $\psi_t(y)$ de E dans lui-même en un point arbitraire a de E. En posant $g_t(x,y)=(x,\psi_t(y))$, on a par conséquent une déformation continue de tous les polyèdres $T \subset P^*$ en leurs projections sur P[9]), donc en sous-polyèdres de P dont la dimension est $\leqslant \dim T$. Il s'en suit que tout prolongement de f sur $P\times E$ (p. ex. le prolongement défini par la formule $f(x,y)=f(x)$) satisfait à la condition (3).

Considérons maintenant l'opération (b). Soit $P^*=P+Q$ où Q est un polyèdre de dimension $\leqslant 3$. On peut admettre que P^* est donné sous la forme d'un complexe géométrique K dont P et Q sont des sous-complexes. Désignons par $P^{*(2)}$ la somme de tous les simplexes de K de dimension $\leqslant 2$ et par Q' la somme de tous les simplexes de K qui ne sont pas contenus dans P. La fonction f, comme inessentielle dans $P^{*(2)}\cdot P$, admet un prolongement continu sur $P^{*(2)}+Q'$ qui est inessentiel dans ce dernier ensemble. Comme

[7]) Dans le cas où P^* est obtenu de P par l'opération (a), c. à d. $P^*=P\times E$, où E est un élément euclidien, nous pouvons traiter P comme un sous-ensemble de P^*, en identifiant, pour un point a arbitrairement choisi dans E, tout point x de P avec le couple $(x,a) \epsilon P^*$. Cela nous permet de parler du prolongement sur P^* d'une fonction définie dans P.

[8]) c. à d. que $\varphi(x,t)$ soit une fonction continue, définie pour $x \epsilon A$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, dont les valeurs appartiennent à l'ensemble des arguments de f et qui satisfasse aux conditions: $\varphi(x,0)=x$ et $\varphi(x,1) \epsilon B$ pour tout $x \epsilon A$.

[9]) On entend par la *projection* du point $(x,y) \epsilon P^*=P\times E$ *sur* P le point $x \epsilon P$ ou, ce qui revient au même (comp. le renvoi [7])), le point (x,a) de P^*.

$P \cdot Q' \subset P^{*(2)}$, on parvient ainsi à une fonction continue f définie dans P^* tout entier et inessentielle dans $P^{*(2)}$. Or, chaque sous-polyèdre T de P^* de dimension $\leqslant 2$ se laisse déformer d'une manière continue en un sous-polyèdre de $P^{*(2)}$ par les projections successives sur la frontière des simplexes de K de dimension $\geqslant 3$ des points de T situés à l'intérieur de ces simplexes. Par conséquent f est inessentielle sur T, c. à d. que la fonction prolongée satisfait dans $P+Q$ à la condition (3).

Avant d'appliquer les opérations (a) et (b) à la construction des polyèdres $P_1, P_2, \ldots, P_5$ à l'aide de P_0, nous allons établir quelques propositions de nature combinatoire:

Soit P un polyèdre décomposé en deux sous-polyèdres P' et Q'. Admettons que P est donné sous la forme d'un complexe géométrique K dont les sous-complexes K' et L' représentent respectivement des décompositions simpliciales de P' et Q'. Chaque cycle $(r+1)$-dimensionnel C^{r+1} de K (aux coefficients entiers) peut être mis sous la forme d'une somme $A+B$ où A désigne un sous-complexe (algébrique) de K' et B de L'. Le complexe $C^r = \dot{A} = -\dot{B}$ est alors un cycle r-dimensionnel dans le complexe $K'+L'$. Il est connu[10]) que la classe d'homologie[11]) de C^r (dans $P' \cdot Q'$) ne dépend que de celle de C^{r+1} (dans P). En faisant donc correspondre à la classe d'homologie de C^{r+1} celle de C^r, on obtient une fonction φ qui établit une correspondance entre les éléments du groupe $(r+1)$-dimensionnel de Betti $B^{r+1}(P)$ du polyèdre P et ceux du groupe r-dimensionnel de Betti[12]) $B^r(P' \cdot Q')$ du polyèdre $P' \cdot Q'$. Comme additive, φ est une homomorphie qui transforme $B^{r+1}(P)$ en sous-groupe de $B^r(P' \cdot Q')$ que constituent toutes les classes d'homologie de $P' \cdot Q'$ composées de cycles r-dimensionnels homologues à zéro dans P' et dans Q'. Cette homomorphie a comme noyau[13]) le sous-groupe $V(P', Q')$ de $B^{r+1}(P)$ que constituent les classes d'homologie contenant des cycles de la forme $C'^{r+1} + D'^{r+1}$, où C'^{r+1} est un cycle de K' et D'^{r+1} un cycle de L'. L'homomorphie φ devient une isomorphie, lorsque $V(P', Q') = 0$, ce qui a lieu lorsque la condition suivante est remplie:

(4) *tout cycle de dimension $(r+1)$ situé dans P' ou dans Q' est homologue à zéro dans P.*

Par conséquent:

(5) *si le polyèdre P' est acyclique en dimension r, la condition (4) étant remplie, la fonction φ détermine une isomorphie entre le groupe $B^{r+1}(P)$ et le sous-groupe de $B^r(P' \cdot Q')$ que constituent les classes d'homologie composées de cycles homologues à zéro dans Q'.*

Ceci établi, passons à la construction successive des polyèdres $P_1, P_2, \ldots, P_5$.

Construction de P_1. Soient $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ les parcours polygonaux fermés dans P_0 avec le point initial commun c, qui constituent un système de générateurs du groupe fondamental de P_0. Le parcours Ω_i (considéré comme un cycle algébrique aux coefficients entiers) étant homologue à zéro dans P_0, il existe[14]) dans l'espace euclidien à 3 dimensions une surface polyédrique orientable F'_i ayant une courbe simple fermée Ω'_i pour frontière, et une fonction σ_i transformant simplicialement F'_i en un sous-ensemble de P de manière que la courbe Ω'_i (avec le point initial a_i et l'orientation choisie d'une manière convenable) soit transformée en Ω_i. On voit aisément que l'on peut admettre en outre que toutes les surfaces F'_i se trouvent dans un élément euclidien E_3 à trois dimensions et que la partie commune de F'_i et F'_j pour $i \neq j$ ne contient que le point $a = a_i = a_j$.

Envisageons le polyèdre $P_1 = P_0 \times E_3$. Les points de la forme $(\sigma_i(y), y)$ avec $y \in \Omega'_i$ constituent un parcours fermé Ω^*_i dans P_1 avec le point initial (c, a). On constate sans peine que le parcours Ω^*_i est homotope dans P_1 au parcours Ω_i [7]), de sorte que les parcours Ω^*_i constituent un système de générateurs du groupe fondamental de P_1. En faisant correspondre à tout $y \in F'_i$ le point $(\sigma_i(y), y) \in P_1$, on

[10]) Voir le livre cité de P. Alexandroff et H. Hopf, p. 293.

[11]) L'*homologie* est entendue dans ce travail dans le sens d'homologie forte, c. à d. sans division.

[12]) J'entends dans ce travail par *groupe de Betti* toujours le groupe de Betti aux coefficients entiers, non réduit (donc en général non libre).

[13]) On entend par *noyau* d'une homomorphie l'ensemble de tous les arguments de cette homomorphie auxquels correspond la valeur zéro.

[14]) Voir H. Seifert et W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig—Berlin 1934, p. 173, th. IV.

obtient donc une homéomorphie de l'ensemble $\sum_{i=1}^{n} F'_i$ tout entier qui fait correspondre à tout F'_i la surface F ayant le parcours Ω^*_i pour frontière.

Construction de P_2. Ajoutons à P_1 la somme Q_1 des éléments euclidiens $E_1^2, E_2^2, \ldots, E_k^2$ de dimension 2 dont les intérieurs sont disjoints deux à deux, la frontière de E_i^2 étant formée par la courbe fermée Ω^*_i. Les polyèdres P_1 et Q_1 étant acycliques en toutes les dimensions, la condition (4) est remplie pour tout $r=0,1,2,\ldots$. En vertu de (5) et de l'égalité $P_1\cdot Q_1=\Omega_1^*+\Omega_2^*+\ldots+\Omega_k^*$, le polyèdre $P_2=P_1+Q_1$ est donc acyclique en toute dimension $r\neq 2$, tandis que le groupe $B^2(P_1+Q_1)$ admet une base formée de classes d'homologie correspondant aux cycles C_i qui s'obtiennent des complexes $Z_i=F_i^*+E_i^2$ par l'orientation cohérente de leurs simplexes. Soit en outre Ω^* un parcours polygonal fermé avec le point initial (c,a) arbitrairement donné dans P_2. Une déformation continue, pendant laquelle ce point initial reste immobile, transforme Ω^* en un parcours polygonal fermé contenu dans P_1. Il en résulte que Ω^* est homotope à une combinaison des parcours $\Omega_1^*, \Omega_2^*, \ldots, \Omega_k^*$ et, par conséquent, homotope à 0 dans P_2. En conséquence, le groupe fondamental de P_2 disparaît.

Construction de P_3. Le polytope Z_i est, en vertu de sa définition, une surface orientable. Soit γ_i son genre („*Geschlecht*"). Il existe donc dans l'espace euclidien à 3 dimensions un polytope T_i ayant la forme d'une sphère euclidienne, muni de γ_i anses („*Henkeln*") et ayant Z_i pour frontière. On peut admettre en outre que la partie commune de T_i et T_j ne contient pour $i\neq j$ que le point (c,a) et que $T_i\cdot P_2=Z_i$. Le polyèdre $P_3=P_2+\sum_{i=1}^{k}T_i$ se décompose donc en deux polyèdres, à savoir P_2 et $Q_2=\sum_{i=1}^{k}T_i$ dont la partie commune coïncide avec $\sum_{i=1}^{k}Z_i$. Or, le polyèdre P_2 est acyclique en toute dimension $r\neq 2$ et les cycles C_i, qui en constituent une base d'homologie de dimension 2 [15]), sont homologues à 0 dans T_i. En s'appuyant en outre sur le fait connu que tout cycle de dimension 1 de T_i est homologue dans T_i à un cycle contenu dans Z_i, et en remarquant que le polyèdre $Q_2=\sum_{i=1}^{k}T_i$ est acyclique en toute dimension $r\neq 1$, on en conclut que les polyèdres $P'=Q_2$ et $Q'=P_2$ satisfont à la condition (4) pour tout $r=0,1,2,\ldots$. Ceci entraîne à son tour, en vertu de la proposition (5), que le polyèdre P_3 est acyclique en toute dimension $r\neq 2$. En tenant compte du fait élémentaire que toute ligne brisée parcourant dans T_i peut être transportée à la frontière Z_i de T_i par une déformation continue (dans T_i) laissant immobiles ses points situés dès le début sur Z_i, on constate sans peine que tout parcours fermé situé dans P_3 est homotope à un parcours fermé situé dans P_2. Ce dernier parcours étant homotope à 0 dans P_2, le groupe fondamental de P_3 disparaît.

Afin d'examiner le groupe $B^2(P_3)$, envisageons sur la surface Z_i de genre γ_i un système de lignes polygonales fermées, $\Omega_{i,1}, \Omega_{i,2}, \ldots, \Omega_{i,\gamma_i}$, disjointes deux à deux et telles que:

1) les cycles qui s'obtiennent des $\Omega_{i,j}$ par l'orientation cohérente de ses segments constituent une base du groupe des cycles 1-dimensionnels de Z_i qui sont homologues à 0 dans T_i;

2) il existe dans T_i un élément euclidien à 2 dimensions $E_{i,j}^2$ ayant $\Omega_{i,j}$ pour frontière.

Le groupe fondamental de P_2 se réduisant à zéro, il existe d'autre part dans P_2 un élément singulier $E_{i,j}'^2$ [16]) ayant aussi $\Omega_{i,j}$ pour frontière. Les éléments $E_{i,j}$ et $E'_{i,j}$, pris ensemble, déterminent une surface sphérique singulière [17]) $S_{i,j}$ dans P_3. De plus, il résulte de (5) que, par une orientation cohérente des simplexes des surfaces sphériques $S_{i,j}$, on obtient les cycles $C_{i,j}$ de dimension 2 qui constituent pour P_3 une base d'homologie de dimension 2.

Construction de P_4. Soit P_4 le produit cartésien du polyèdre P_3 et d'un élément euclidien à 3 dimensions. Le groupe fondamental et les groupes de Betti de P_4 coïncident alors avec les groupes cor-

[15]) Les cycles $C_1, C_2, \ldots, C_k$ constituent une *base d'homologie de dimension* r d'un polyèdre P, lorsque, pour tout cycle C de dimension r de P, il existe un système unique de nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que C est homologue au cycle $a_1C_1+a_2C_2+\ldots+a_kC_k$.

[16]) c. à d. un transformé simplicial d'un élément euclidien en un sous-polyèdre de P_2 dans lequel le parcours $\Omega_{i,j}$ correspond à la frontière de cet élément (l'orientation de cette frontière et le point initial étant choisis d'une manière convenable).

[17]) c. à d. un transformé simplicial d'une surface sphérique euclidienne en un sous-ensemble de P_3.

respondants de P_3 et les cycles $C_{i,j}$, obtenus par l'orientation cohérente des surfaces sphériques singulières $S_{i,j}$[18]), constituent une base du groupe $B^2(P_3)$. On prouve par un raisonnement analogue à celui employé pour la construction de P_1 qu'il existe dans P_4 des surfaces sphériques euclidiennes $S'_{i,j}$ disjointes deux à deux et telles que tout $C_{i,j}$ est homologue dans P_4 au cycle obtenu de $S'_{i,j}$ par l'une des deux orientations cohérentes des simplexes de $S'_{i,j}$. Or, ces derniers cycles constituent une base d'homologie de dimension 2 pour P_4.

Construction de P_5. Soit $E^3_{i,j}$ un élément euclidien de dimension 3 dont la frontière coïncide avec $S'_{i,j}$. En admettant que tous les éléments $E_{i,j}$ sont disjoints deux à deux, désignons par P_5 le polyèdre-somme $P_4+\sum_{i,j} E^3_{i,j}$. Tout parcours fermé Ω contenu dans P_5 étant évidemment déformable dans P_5 en un parcours fermé contenu dans P_4, et le groupe fondamental de P_4 se réduisant à zéro, on conclut que le groupe fondamental de P_5 disparaît. On constate en outre que les polyèdres $P'=P_4$ et $Q'=\sum_{i,j} E_{i,j}$ satisfont à la condition (4) pour tout $r=0, 1, \ldots$. En s'appuyant donc sur la proposition (5), on conclut que le polyèdre P_5 est acyclique en toutes les dimensions, c. q. f. d.

Les problèmes suivants restent ouverts:

La thèse du théorème reste-t-elle vraie pour les espaces compacts arbitraires?

Le polyèdre qui n'admet de transformation essentielle en aucune surface sphérique est-il acyclique en toutes les dimensions?

---

18) $S_{i,j}$ étant un transformé simplicial d'une surface sphérique euclidienne $S^*_{i,j}$, le cycle $C_{i,j}$ est le cycle qui correspond par cette transformation simpliciale au cycle qu'on obtient de $S^*_{i,j}$ par l'orientation cohérente de ses simplexes.

Sur une propriété d'ensembles.

Par

Stefania Braun (Warszawa).

M. Lusin désigne par P_0 la propriété suivante d'ensembles:

Quel que soit un ensemble parfait Π, si l'ensemble E possède sur Π une infinité non dénombrable de points, le produit $E\Pi$ contient un ensemble parfait de points [1]).

M. Lusin écrit:

„Or, en reprenant les déductions des idéalistes basées sur l'hypothèse du continu (c'est-à-dire une énumération des points du continu au moyen des nombres transfinis de seconde classe), on forme sans aucune difficulté une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ qui possèdent tous la propriété P_0 sans que leur partie commune la possède, bien qu'elle soit non dénombrable.“ [2])

Je me propose de démontrer dans cette Note (toujours *en admettant l'hypothèse du continu*) *l'existence de deux ensembles à propriété P_0 dont la partie commune n'en jouit pas.*

Ma démonstration primitive étant plus compliquée, je donne ici la démonstration simplifiée par M. Sierpiński.

Lemme. *Il existe deux F_σ linéaires, disjoints et admettant des sous-ensembles parfaits non vides dans tout intervalle* [3]).

---

1) Cf. N. Lusin, *Sur les ensembles analytiques*, Fund. Math. X, p. 42.

2) ibidem, p. 43.

3) Cf. W. Sierpiński, *O pewnej mnogości punktowej i jej zastosowaniu do teorji funkcji zmiennej rzeczywistej*, Wektor IV, Warszawa 1914—15, p. 97—9 (en polonais).