Le théorème de réduction suivant, dans le domaine des ensembles PCA [1]), est un cas particulier du théorème de réduction du N° 4: *étant donnée une suite* $A^0, A^1, \dots A^n, \dots$ $(n<\omega)$ *d'ensembles* PCA, *il existe une suite d'ensembles* PCA *disjoints* $B^0, B^1, \dots B^n, \dots$ *tels que* $B^n \subset A^n$ *et* $B^0+B^1+\dots=A^0+A^1+\dots$

En effet, en vertu du théorème précédent, il existe pour chaque n, une suite transfinie relativement analytique $A_0^n, A_1^n, \dots A_\alpha^n, \dots$ telle que $A^n=\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha^n$. La suite double $\{A_\alpha^n\}$ est évidemment [2]) aussi une suite relativement analytique, donc une suite de classe P_2 et C_2. Il existe, par conséquent, en vertu du théor. 2 du N° 4, une suite double $\{B_\alpha^n\}$ de classe P_2 d'ensembles disjoints et telle que $B_\alpha^n \subset A_\alpha^n$ et $\sum_n \sum_\alpha B_\alpha^n = \sum_n \sum_\alpha A_\alpha^n$.

Posons $B^n=\sum_\alpha B_\alpha^n$. La suite transfinie $B_0^n, B_1^n, \dots B_\alpha^n, \dots$ étant de classe P_2, pour n fixe, l'ensemble B^n l'est également (cf. N° 2).

Le théorème de réduction pour les ensembles PCA peut être déduit aussi (comme j'ai signalé dans la note précitée p. 188) du fait que, S_α^n désignant la somme partielle: $S_\alpha^n=A_0^n+\dots+A_\alpha^n$, l'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega}(S_\alpha^n-S_\alpha^m)$ est de classe PCA pour m et n fixes.

Or, la suite $A_0^n, A_1^n, \dots A_\alpha^n, \dots$ étant de classe P_2 et C_2 (pour n fixe), il en est de même (cf. N° 2) de la suite des sommes partielles $S_0^n, S_1^n, \dots S_\alpha^n, \dots$ donc (pour n et m fixes) de la suite des différences $\{S_\alpha^n-S_\alpha^m\}$, $\alpha<\Omega$. L'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega}(S_\alpha^n-S_\alpha^m)$ est donc de classe PCA. c. q. f. d.

---

1) En généralisant quelques théorèmes de séparation de M. Novikoff (Fund. Math. 25, p. 459), j'ai établi le théorème cité dans Fund. Math. 26, p. 187.

2) Une remarque analogue à celle du renvoi 1) p. 189 s'applique aux suites doubles transfinies: étant donnée pour chaque n une suite transfinie rel. analytique $A_0^n, A_1^n, \dots A_\alpha^n, \dots$, la suite double $\{A_\alpha^n\}$, $\alpha<\Omega$, $n<\omega$, est aussi rel. analytique. Car on a dans ce cas

$$\varphi(\alpha, \beta, x) \equiv (x \in A_\alpha^\beta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n=\beta)\,(x \in A_\alpha^n)$$

et la fonction propositionnelle $\psi_n(\alpha, x) \equiv (x \in A_\alpha^n)$ est, pour chaque n, rel. analytique.

Solution d'un problème de la théorie des relations.

Par

Sophie Piccard (Neuchâtel).

Le but de cette Note est de donner une solution complète du problème $\boldsymbol{P}$ suivant, posé récemment par M. Sierpiński [1]):

$\boldsymbol{P}$. *Soit* E *un ensemble indénombrable et* R *une relation entre les éléments de* E, *telle que pour tout élément donné* x *de* E *le nombre d'éléments* y *de* E *pour lesquels on a* xRy *est fini (ou nul). Existe-t-il toujours un sous-ensemble* E_1 *de* E, *de même puissance que* E *et tel que,* x *et* y *étant deux éléments distincts de* E, *on n'ait jamais* xRy?

M. Sierpiński a démontré (l. c.) que la réponse au problème $\boldsymbol{P}$ est affirmative:

1) si $\overline{\overline{E}}=2^{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal quelconque $\geqslant \aleph_0$,

2) si $\overline{\overline{E}}=\aleph_{\alpha+1}$ où α est un nombre ordinal arbitraire.

Il existe cependant des ensembles indénombrables E qui ne satisfont ni à la condition 1) ni à la condition 2), p. ex. tels que $\overline{\overline{E}}=\aleph_\omega$ [2]).

Nous prouverons ici que *la réponse au problème* P *est affirmative, quel que soit l'ensemble indénombrable* E.

---

1) W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie des relations*, Fund. Math. **28**, p. 71.

2) En effet, si l'on avait $\aleph_\omega=2^{\mathfrak{m}}$, on aurait $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ et $\aleph_n<\aleph_\omega$ pour $n=1,2,\dots$, d'où, d'après le théorème connu de J. König: $\aleph_1+\aleph_2+\aleph_3+\dots<\aleph_\omega\aleph_\omega\aleph_\omega\dots$, c. à d. $\aleph_\omega<\aleph_\omega^{\aleph_0}=2^{\mathfrak{m}\cdot\aleph_0}=2^{\mathfrak{m}}=\aleph_\omega$, ce qui est impossible.

Dans ce but, nous démontrerons d'abord ce

Lemme. *Soient: n un entier $\geqslant 1$, α un nombre ordinal quelconque, E un ensemble de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, R une relation telle que pour tout élément x de E il existe $<n$ éléments y de E pour lesquels xRy et enfin M un sous-ensemble de E dont aucun couple d'éléments distincts n'est lié par la relation R.*

Il existe alors un nombre fini (ou nul) d'éléments de M, $z_1, z_2, \ldots, z_k$, et un sous-ensemble H de E de puissance $\aleph_{\alpha+1}$ tel que $M-(z_1, z_2, \ldots, z_k) \subset H$ et qu'aucun couple d'éléments distincts de H n'est lié par la relation R.

Démonstration. Le lemme est évidemment vrai pour $n=1$. Admettons qu'il est vrai pour tout nombre naturel $n<m$ où m est un entier quelconque >1. Soient: E un ensemble (de puissance $\aleph_{\alpha+1}$), R une relation et M un sous-ensemble de E, assujettis aux conditions du lemme pour $n=m$.

Posons pour tout élément x de E:

(1) $$Z(x) = \mathop{\mathrm{E}}_{t}[t \epsilon E,\ tRx].$$

Nous pouvons évidemment supposer que $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{E}}$, donc que $\overline{\overline{M}} \leqslant \aleph_\alpha$, puisque pour $\overline{\overline{M}} = \aleph_{\alpha+1}$ le lemme serait vrai pour $n=m$, en posant $H=M$.

Posons pour $x \epsilon E$:

(2) $$V(x) = \mathop{\mathrm{E}}_{y}[y \epsilon E,\ xRy].$$

D'après l'hypothèse sur R, nous avons

(3) $$\overline{\overline{V}}(x) < m \qquad \text{pour} \quad x \epsilon E,$$

de sorte que l'ensemble

(4) $$V_0 = \sum_{x \epsilon M} V(x)$$

est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$, en tant que somme de $\leqslant \aleph_\alpha$ ensembles finis.

Distinguons maintenant deux cas:

a) Il existe un élément x_0 de E tel que l'ensemble $Z(x_0)$ est de puissance $\aleph_{\alpha+1}$.

b) Quel que soit l'élément x de E, l'ensemble $Z(x)$ est de puissance $<\aleph_{\alpha+1}$, donc de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$.

Dans le cas a), posons:

(5) $$E^* = [M + (Z(x_0) - V_0)] - (x_0).$$

Comme $\overline{\overline{V}}_0 \leqslant \aleph_\alpha$, l'ensemble E^* est selon a) de puissance $\aleph_{\alpha+1}$. Soit x un élément de E^*.

Si $x \epsilon M$, je dis qu'il n'existe aucun élément $y \neq x$ de E^*, tel que xRy. En effet, soit y un tel élément. On aurait donc, d'après (2), $y \epsilon V(x)$ et, d'après (4), $y \epsilon V_0$. Or, aucun couple d'éléments distincts de M n'étant lié par la relation R, on a $y \operatorname{non} \epsilon M$. Mais, d'après (5), les formules $y \epsilon V_0$ et $y \operatorname{non} \epsilon M$ sont incompatibles avec la formule $y \epsilon E^*$.

Si $x \operatorname{non} \epsilon M$, on a, d'après $x \epsilon E^*$ et d'après (5), $x \epsilon Z(x_0)$, donc, d'après (1), xRx_0. Selon l'hypothèse sur la relation R, il existe donc au plus $m-2$ éléments y de E, distincts de x_0 et tels que xRy. Il existe par conséquent moins que $m-1$ éléments de E^*, tels que xRy.

Finalement, quel que soit l'élément x de E^*, il existe $<m-1$ éléments de E^* pour lesquels xRy.

Posons $M^* = M - (x_0)$. D'après l'hypothèse sur M, aucun couple d'éléments distincts de M^* n'est lié par la relation R. Or, on a évidemment $M^* \subset E^*$. Le lemme étant, par hypothèse, vrai pour $n=m-1$, il existe un sous-ensemble H^* de E^*, de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, et un nombre fini (ou nul) d'éléments de M^*, $z_1, z_2, \ldots, z_k$, tels que $M^*-(z_1, z_2, \ldots, z_k) \subset H^*$ et qu'aucun couple d'éléments distincts de H^* n'est lié par la relation R. Posons $H=H^*$: nous aurons évidemment $M-(x_0, z_1, z_2, \ldots, z_k) = M^*-(z_1, z_2, \ldots, z_k) \subset H^* = H \subset E$ et l'ensemble H répond aux conditions de notre lemme.

Dans le cas b), on a

(6) $$\overline{\overline{Z(x)}} \leqslant \aleph_\alpha \qquad \text{pour} \quad x \epsilon E.$$

Du fait que $\overline{\overline{M}} \leqslant \aleph_\alpha$, l'ensemble

(7) $$T = \sum_{x \epsilon M} Z(x)$$

est donc une somme de $\leqslant \aleph_\alpha$ ensembles dont chacun est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$. Vu que $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$, on trouve donc

$$\overline{\overline{T}} \leqslant \aleph_\alpha.$$

Soit maintenant φ le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_{\alpha+1}$. Soit

(8) $$x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie formée de tous les éléments de l'ensemble E. Nous définirons par l'induction transfinie une suite transfinie

(9) $$p_1, p_2, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

d'éléments de E comme il suit.

Comme $\overline{\overline{M}}\leqslant\aleph_\alpha$, $\overline{\overline{V}}_0\leqslant\aleph_\alpha$ et $\overline{\overline{T}}\leqslant\aleph_\alpha$, l'ensemble $E-(M+V_0+T)$ est de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, donc non vide. Nous définirons p_1 comme le premier terme de la suite (8) appartenant à cet ensemble.

Soit maintenant λ un nombre ordinal donné, $0<\lambda<\varphi$, et supposons déjà définis tous les éléments p_ξ où $\xi<\lambda$: leur ensemble P_λ est donc de puissance $<\overline{\varphi}=\aleph_{\alpha+1}$, d'où $\overline{\overline{P}}_\lambda\leqslant\aleph_\alpha$. Posons:

$$U_\lambda=V_0+\sum_{\xi<\lambda}V(p_\xi)+\sum_{\xi<\lambda}Z(p_\xi). \tag{10}$$

En vertu des relations (3), $\overline{\overline{V}}_0\leqslant\aleph_\alpha$, (6) et $\lambda<\varphi$, on a $\overline{\overline{U}}_\lambda\leqslant\aleph_\alpha$ et l'ensemble $E-(M+T+U_\lambda+P_\lambda)$ est de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, donc $\neq 0$. Nous définirons p_λ comme le premier terme de la suite (8) qui appartient à cet ensemble.

La suite transfinie (9) est ainsi définie par l'induction transfinie et il est évident qu'elle contient $\aleph_{\alpha+1}$ termes différents, dont l'ensemble P est un sous-ensemble de E. Posons $H=M+P$.

Je dis que l'ensemble H répond aux conditions du lemme.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soient x et y deux éléments distincts de H, tels que xRy.

Si $x\in M$, l'hypothèse faite sur M exclut la relation $y\in M$. Comme $y\in H=M+P$, on a donc $y\in P$. Soit $y=p_\mu$ où $\mu<\varphi$. Par conséquent xRp_μ, où $x\in M$, d'où, selon (2), $p_\mu\in V(x)$ et d'après (4): $p_\mu\in V_0$, donc, d'après (10), $p_\mu\in U_\mu$, contrairement à la définition de p_μ.

Si x non $\in M$, on a $x\in P$. Soit $x=p_\lambda$ où $\lambda<\varphi$. Si $y\in M$, on a, d'après $p_\lambda Ry$ et (1): $p_\lambda\in Z(y)$, donc, d'après (7): $p_\lambda\in T$, contrairement à la définition de p_λ. Par conséquent y non $\in M$, d'où $y\in P$. Soit $y=p_\mu$. Comme $x\neq y$, on a $\lambda\neq\mu$. Si $\lambda<\mu$, on a d'après $p_\lambda Rp_\mu$ et (2): $p_\mu\in V(p_\lambda)$, donc, d'après (10): $p_\mu\in U_\mu$, ce qui est impossible. Si $\lambda>\mu$, on a, d'après $p_\lambda Rp_\mu$ et (1): $p_\lambda\in Z(p_\mu)$, donc, d'après (10), $p_\lambda\in U_\lambda$, ce qui est encore impossible.

La formule xRy ne peut donc pas se présenter pour deux éléments distincts x et y de H, c. q. f. d.

Le lemme étant ainsi établi, soient: E un ensemble indénombrable quelconque et R une relation telle qu'il existe pour tout élément x de E un nombre fini (ou nul) d'éléments y de E pour lesquels xRy. Désignons, pour $n=0,1,2,\ldots$, par E_n l'ensemble de tous les éléments x de E pour lesquels il existe exactement n éléments y de E, tels que xRy. Nous aurons évidemment

$$E=E_0+E_1+E_2+E_3+\ldots. \tag{11}$$

Posons $\overline{\overline{E}}=\aleph_\alpha$ et distinguons deux cas:

1) le nombre ordinal α est de première espèce.

2) le nombre ordinal α est de seconde espèce.

Dans le cas 1), il résulte du théorème de M. Sierpiński que E contient un sous-ensemble H de puissance $\aleph_\alpha$ et dont aucun couple d'éléments distincts n'est lié par la relation R.

Dans le cas 2), on déduit sans peine de (11) qu'il existe une suite infinie croissante de nombres naturels $k_1<k_2<k_3<\ldots$ et une suite infinie croissante de nombres ordinaux $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots$, telles que

$$\lim_{n<\omega}\alpha_n=\alpha \tag{12}$$

et

$$\overline{\overline{E}}_{k_n}=\aleph_{\alpha_n}. \tag{13}$$

Etant donné un nombre naturel $n>1$ quelconque, on a

$$\alpha_{n-1}+1\leqslant\alpha_n$$

et, d'après (13), il existe un sous-ensemble Q_n de E_{k_n} de puissance $\aleph_{\alpha_{n-1}+1}$. Posons:

$$S_n=Q_2+Q_3+\ldots+Q_n \qquad \text{pour} \quad n=2,3,\ldots \tag{14}$$

et

$$S=S_2+S_3+S_4+\ldots. \tag{15}$$

Comme $\overline{\overline{Q}}_n=\aleph_{\alpha_{n-1}+1}$ et $\alpha_{n-1}<\alpha_{n-1}+1\leqslant\alpha_n$ pour $n=2,3,\ldots$, on trouve sans peine, en tenant compte de (12):

$$\overline{\overline{S}}_n=\aleph_{\alpha_{n-1}+1} \qquad \text{pour } n=2,3,\ldots \qquad \text{et} \qquad \overline{\overline{S}}=\aleph_\alpha. \tag{16}$$

D'après (16) et en vertu du théorème de M. Sierpiński, il existe un sous-ensemble H_2 de S_2 de puissance $\aleph_{\alpha_1+1}$ et dont aucun couple d'éléments n'est lié par la relation R.

Considérons à présent un entier $m>2$ et admettons que nous avons déjà défini les ensembles $H_2, H_3, \ldots, H_{m-1}$ et que $H_{m-1}\subset S_{m-1}$, donc aussi $H_{m-1}\subset S_m$, aucun couple d'éléments distincts de H_{m-1} n'étant lié par la relation R. D'après (16), on a

$$\overline{\overline{S}}_m=\aleph_{\alpha_{m-1}+1}>\aleph_{\alpha_{m-2}+1} \text{ et } \aleph_{\alpha_{m-2}+1}=\overline{\overline{S}}_{m-1}\geqslant\overline{\overline{H}}_{m-1}, \text{ d'où } \overline{\overline{S}}_m>\overline{\overline{H}}_{m-1}.$$

L'ensemble S_m satisfait aux conditions du lemme (pour $n=k_m+1$, $\alpha=\alpha_{m-1}$ et $M=H_{m-1}$); il existe donc un nombre fini (ou nul) d'éléments de H_{m-1}, $z_1^m, z_2^m, \ldots, z_{r_m}^m$, et un sous-ensemble H_m de S_m, de puissance $\aleph_{\alpha_{m-1}+1}$, tels que $H_{m-1}-(z_1^m, z_2^m, \ldots, z_{r_m}^m) \subset H_m$ et qu'aucun couple d'éléments distincts de H_m n'est lié par la relation R.

L'ensemble Z de tous les éléments $z_1^m, z_2^m, \ldots, z_{r_m}^m$ où $m=3,4,\ldots$ est au plus dénombrable. Posons

(17) $$H=(H_2+H_3+H_4+\ldots)-Z.$$

Comme $\overline{\overline{Z}} \leqslant \aleph_0$ et $\overline{\overline{H}}_m = \aleph_{\alpha_{m-1}+1}$, l'ensemble H est, comme on voit sans peine, en tenant compte de (12), un sous-ensemble de E de puissance $\aleph_\alpha$. Montrons qu'aucun couple d'éléments distincts de H n'est lié par la relation R. En effet, soient x et $y \neq x$ deux éléments de H. D'après (17), il existe donc deux indices $p>1$ et $q>1$ tels que $x \in H_p$ et $y \in H_q$. Soit p. ex. $q \geqslant p$ (pour $q<p$ le raisonnement est tout à fait analogue). D'après $x \in H$ et (17), on a $x \operatorname{non} \in Z$, donc $x \in H_p - Z$. Or, on voit aisément que $H_p - Z \subset H_q$. On a donc $x \in H_q$ et $y \in H_q$ et, d'après la définition de H_q, les éléments x et y ne sont pas liés par la relation R, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que la réponse au problème de M. Sierpiński est affirmative pour tout ensemble indénombrable E.

Sur les transformations des polyèdres acycliques en surfaces sphériques.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

D'après un théorème fondamental dû à M. H. Hopf[1]), le type d'homotopie[2]) d'une fonction continue f transformant un polyèdre P de dimension $\leqslant n$ en surface sphérique S_n (de dimension n) est défini par les grades avec lesquels f transforme en S_n les cycles (modulaires) n-dimensionnels de P. La situation est bien différente, lorsqu'on supprime l'hypothèse $\dim P \leqslant n$, car, d'après le résultat bien connu de M. H. Hopf, la surface sphérique S_3, qui est, bien entendu, acyclique en dimension 2[3]), admet des transformations essentielles[2]) en S_2. Or, la question s'impose s'il existe, pour un n, des polyèdres acycliques en toutes les dimensions et admettant des transformations essentielles en S_n. Le but de cet ouvrage est de résoudre cette question par la démonstration du théorème suivant:

Théorème. *P_0 étant un polyèdre acyclique en toutes les dimensions, chaque transformation continue de P_0 en une surface sphérique de dimension quelconque est inessentielle.*

---

[1]) H. Hopf, Comment. Math. Helv. 5 (1932), p. 39—54.

[2]) Deux fonctions continues f_0 et f_1 transformant un polyèdre P en S_n sont dites *homotopes* ou *du même type d'homotopie*, lorsqu'il existe pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ une fonction continue f_t transformant P en S_n et dépendant du paramètre t d'une manière continue. Les transformations de P en S_n homotopes avec une transformation de P en un seul point sont dites *inessentielles* et les autres *essentielles*.

[3]) Un polyèdre P est dit *acyclique en dimension* r, lorsque chaque cycle r-dimensionnel de P (aux coefficients arbitraires) est homologue à 0 dans P. Un polyèdre dont tous les groupes de Betti (aux coefficients entiers) disparaissent est acyclique en toutes les dimensions (Cf. P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1936, p. 228). Cela nous permet de ne considérer dans la suite que des cycles aux coefficients entiers.