Les suites transfinies d'ensembles et les ensembles projectifs[1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

La note présente est intimement liée à mon ouvrage „*Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable*" (paru dans ce volume). Elle en contient plusieurs applications et généralisations.

Dans l'ouvrage précité, nous avons fait correspondre à chaque sous-ensemble Φ de l'ensemble $\mathfrak{T}$ de tous les types ordinaux dénombrables un sous-ensemble F de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor: à savoir $F = \underset{t}{E}(\bar{t} \in \Phi)$[2]). D'une façon plus générale, Φ étant un ensemble de types ordinaux „complexes" (c. à d. que $\Phi \subset \mathfrak{T}^m$ ou $\Phi \subset \mathfrak{T}^{\aleph_0}$), l'ensemble F qui lui vient correspondre est un sous-ensemble du produit $\mathcal{C}^m$ resp. $\mathcal{C}^{\aleph_0}$: $\mathfrak{d}$ étant une suite finie ou infinie $\mathfrak{d}^1, \mathfrak{d}^2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{C}$, on désigne par $\bar{\mathfrak{d}}$ la suite $\overline{\mathfrak{d}^1}, \overline{\mathfrak{d}^2}, \ldots$ et on pose $F = \underset{\mathfrak{d}}{E}(\bar{\mathfrak{d}} \in \Phi)$.

Considérons, à présent, le cas „mixte", où Φ est un sous-ensemble du produit cartésien de $\mathfrak{T}$ et d'un espace donné $\mathcal{X}$ (de l'espace des nombres réels par exemple, ou plus généralement, d'un espace complet séparable); cela veut dire que les éléments de Φ sont des couples (τ, x) où $\tau \in \mathfrak{T}$ et $x \in \mathcal{X}$. Dans ce cas nous posons $F = \underset{tx}{E}[(\bar{t}, x) \in \Phi]$. Comme on voit, F est un sous-ensemble du produit $\mathcal{C} \times \mathcal{X}$.

[1]) Présenté à la Soc. Pol. de Math., Section de Varsovie, le 16. X. 1936.

[2]) Rappelons que $\bar{t}$ a été défini comme suit: soit $r_1, r_2, \ldots$ la suite de tous les nombres rationnels; si $t = \frac{t^1}{3} + \frac{t^2}{9} + \ldots$ ($t^n = 0$ ou 2), $\bar{t}$ désigne le type d'ordre de l'ensemble M_t de tous les r_n tels que $t^n = 2$.

D'une façon analogue, si $\Phi \subset \mathfrak{T}^m \times \mathcal{X}$ (m fini ou $\aleph_0$), on pose $F = \underset{\mathfrak{d}x}{E}[(\bar{\mathfrak{d}}, x) \in \Phi]$. En généralisant la définition énoncée p. 169, nous dirons que *l'ensemble Φ est de classe projective P_n (ou C_n) lorsqu'il en est ainsi de l'ensemble F. Autrement dit, la fonction propositionnelle $\varphi(\tau, x)$, où τ est un type ordinal variable (complexe ou non) et où x parcourt l'espace $\mathcal{X}$, est de classe P_n (ou C_n), lorsque la fonction propositionnelle $\varphi(\bar{\mathfrak{d}}, x)$ est de telle classe.*

Le cas le plus intéressant est où Φ est contenu dans le produit de l'ensemble $\mathcal{O}$ des nombres ordinaux ($< \Omega$) par $\mathcal{X}$. Dans ce cas, en désignant par A_α l'ensemble des x tels que le couple (α, x) appartient à Φ, on dira que la suite transfinie $A_0, A_1, \ldots A_\alpha, \ldots$ est de classe P_n (ou C_n) lorsque Φ est de telle classe. Inversement, à chaque suite transfinie $\{A_\alpha\}$ correspond l'ensemble $\Phi = \underset{\alpha x}{E}(x \in A_\alpha)$, dont la suite $\{A_\alpha\}$ se dérive comme auparavant.

Le problème s'impose d'étudier les suites transfinies d'ensembles, actuellement considérées en mathématiques, au point de vue de leur projectivité.

Dans cet ordre d'idées, je démontre dans l'ouvrage présent que la suite des „constituantes" d'un ensemble de classe CA est une suite de classe CA et, en même temps, une suite relativement analytique (par rapport au produit $\mathcal{O} \times \mathcal{X}$, voir N° 7); la suite des constituantes d'un ensemble PCA est relativement analytique (N° 8)[1]). Dans une note sur „*Les ensembles projectifs et l'induction transfinie*" j'ai exposé une méthode qui permet de reconnaître la projectivité des suites transfinies d'ensembles définies par l'induction transfinie[2]). Ainsi, par exemple, j'y considère une suite transfinie $A_0, A_1, \ldots A_\alpha, \ldots$ où A_α est un ensemble borelien précisément de classe α et je démontre que cette suite est projective[3]).

[1]) Il n'y aurait nonplus aucune difficulté de démontrer que la suite des „constituantes intérieures" d'un ensemble analytique est projective.

[2]) Fund. Math. 27 (1936), p. 269. Cf. aussi une note de M. v. Neumann et moi, qui paraîtra dans les Annals of Math., contenant une méthode d'évaluation de la classe projective, due à M. v. Neumann, et qui est, dans certains cas, plus efficace.

[3]) On pourrait aussi déduire sans difficulté du théorème général de ma note citée que la suite des „dérivés verticaux" d'ordre α d'un ensemble fermé (plan) est projective. J'entends par dérivé vertical d'un ensemble plan F l'ensemble des points xy tels que y appartient au dérivé de l'intersection de F avec la verticale à abscisse x. Le dérivé d'ordre $\alpha + 1$ est le dérivé du dérivé d'ordre α et la dérivé d'ordre λ limite est la partie commune des dérivés d'ordres inférieurs à λ.

Sans prétendre d'épuiser le sujet, je me propose d'établir ici quelques théorèmes généraux sur les suites transfinies projectives et d'en donner quelques applications. Ainsi, en particulier, je démontre l'invariance des classes projectives, à partir de la deuxième, par rapport à l'opération ($\mathcal{A}$), je donne une forme général d'un théorème de réduction (qui implique les théorèmes de réduction et de séparation de MM. Lusin et Novikoff) et j'envisage les problèmes du genre suivant: étant donnée une suite transfinie projective d'ensembles $A_0, A_1, \dots A_\alpha, \dots$ (la suite des constituantes d'un ensemble CA, par exemple) et un ensemble Φ de nombres ordinaux, quelle est la classe projective de l'ensemble $\sum\limits_{\alpha\epsilon\Phi} A_\alpha$? [1]). Les théorèmes généraux des NN° 2 et 3 en donnent la réponse.

§ 1. Théorèmes généraux.

1. ***Règles de calcul.*** Le calcul de la classe projective d'un ensemble $\Phi \subset \mathfrak{T}^m \times \mathfrak{X}$, ou ce qui revient au même, d'une fonction propositionnelle $\varphi(\tau, x)$, s'effectue à l'aide de la méthode générale, qui a été appliquée dans le cas de fonction propositionnelle $\varphi(\tau)$ (cf. p. 171). Les règles suivantes s'établissent comme dans ce cas particulier.

1) Si $\varphi(\tau, x)$ est de classe P_n, $\varphi'(\tau, x)$ est de classe C_n.

2) Si $\varphi(\tau, x)$ est de classe P_n (ou C_n) dans l'espace $\mathfrak{T} \times \mathfrak{X}$, il en est de même dans l'espace $\mathfrak{T}^2 \times \mathfrak{X}$ ainsi que dans $\mathfrak{T} \times \mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ (où $\mathcal{Y}$ est un espace complet séparable arbitraire).

3) Si les fonctions $\varphi_1(\tau, x)$, $\varphi_2(\tau, x)$, ... sont de classe P_n (ou C_n), il en est de même des fonctions $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau, x)$ et $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau, x)$.

4) $\varphi(\tau, \sigma, x, y)$ étant de classe P_n, il en est de même des fonctions $\sum\limits_\sigma \varphi(\tau, \sigma, x, y)$, $\sum\limits_y \varphi(\tau, \sigma, x, y)$, $\varphi(\tau, \sigma_0, x, y)$, $\varphi(\tau, \sigma, x_0, y)$, $\varphi(\tau, \tau, x, y)$, $\varphi(\tau, \sigma, x, x)$.

5) Si $\varphi(\sigma, x)$ est de classe P_n (ou C_n), les fonctions

$$\psi(\tau, x) \equiv \sum_{\sigma<\tau} \varphi(\sigma, x) \quad \text{et} \quad \chi(\tau, x) \equiv \prod_{\sigma<\tau} \varphi(\sigma, x)$$

le sont également.

[1]) Des problèmes de ce genre ont été étudiés par M. Lusin. Voir son „compte rendu sur la théorie descriptive des fonctions présenté à l'Académie des Sc. d'URSS.“ (en russe), 1935, p. 37.

Car $t^{(n)}$ étant définie comme p. 174, on a

$$\psi(\bar{t}, x) \equiv (\bar{t} \neq 0) \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\overline{t^{(n)}}, x).$$

Soit $\mu(x)$ une fonction qui fait correspondre à chaque $x \epsilon \mathfrak{X}$ un type ordinal (complexe ou non) $\mu(x)$. Cette fonction est dite de classe P_n (ou C_n) lorsqu'il en est ainsi de la relation $\tau = \mu(x)$. Comme dans le N° 4, p. 176, on démontre que

6) $\mu(x)$ étant une fonction de classe P_n $(n>0)$ et Φ un ensemble de classe P_n (ou C_n), l'ensemble $\mu^{-1}(\Phi) = \underset{x}{E}[\mu(x) \epsilon \Phi]$ est de classe P_n (resp. C_n). Si les fonctions $\mu_1(x), \dots, \mu_m(x)$, où $x \epsilon \mathfrak{X}$ ou $x \epsilon \mathfrak{T}$, sont de classe P_n et la fonction propositionnelle $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_m, y)$ est de classe P_n ou C_n, il en est de même de la fonction propositionnelle $\varphi[\mu_1(x_1), \dots, \mu_m(x_m), y]$. En particulier, les relations $\varphi(\tau, x) \equiv [\tau \leqslant \mu(x)]$ et $\chi(\tau, x) \equiv [\tau < \mu(x)]$ sont de classe P_n.

2. ***Suites transfinies d'ensembles.*** Etant donnée une suite transfinie $A_0, A_1, \dots A_\alpha, \dots$ $(\alpha < \Omega)$ de sous-ensembles de $\mathfrak{X}$, considérons l'ensemble $\underset{\alpha x}{E}(x \epsilon A_\alpha)$. Si cet ensemble est de classe P_n (ou C_n), dans le sens de la définition p. 187, c. à d. si l'ensemble $\underset{tx}{E}(x \epsilon A_{\bar{t}})$ est de telle classe, *la suite sera dite de classe P_n (resp. C_n)*. Comme on voit, *la classe projective de la suite transfinie $\{A_\alpha\}$ n'est rien d'autre que la classe de la fonction propositionnelle* $\varphi(\alpha, x) \equiv (x \epsilon A_\alpha)$ [1]).

On n'altère pas la définition, en supposant que α est un nombre ordinal „complexe“ (élément de $\mathcal{O}^m$ où m est fini ou $\aleph_0$). Si, par exemple, $\alpha \epsilon \mathcal{O}^2$, on est dans le cas d'une suite double $\{A_{\beta,\gamma}\}$, $\beta < \Omega$, $\gamma < \Omega$.

Une suite transfinie $\{A_\alpha\}$ est relativement analytique par rapport au produit $\mathcal{O} \times \mathfrak{X}$ (ou, tout court, *relativement analytique*) lorsqu'il existe une fonction propositionnelle analytique $\varphi^*(\tau, x)$ telle que

$$\varphi^*(\tau, x) \cdot (\tau < \Omega) \equiv \varphi(\tau, x).$$

[1]) Bien entendu, chaque suite infinie $A_0, A_1, \dots A_n, \dots$ $(n < \omega)$ d'ensembles de classe P_n (ou C_n) est une suite de telle classe. Car on a

$$\varphi(\alpha, x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n = \alpha)(x \epsilon A_n).$$

Autrement dit: lorsqu'il existe une extension de la fonction A_α (de l'argument α) qui s'étend à tous les arguments $\tau \epsilon \mathfrak{T}$ et telle que l'ensemble $\underset{\tau x}{E}(x \epsilon A_\tau)$ soit analytique.

La définition précédente se généralise aussitôt au cas où α parcourt les nombres ordinaux complexes.

Une suite transfinie sera dite *élémentaire* si elle est simultanément de classe CA et relativement analytique; ou encore, si elle est de classe CA de même que la suite de ses complémentaires $\{A'_\alpha\}$.

Les termes d'une suite élémentaire sont des ensembles boreliens, comme ensembles qui sont de classe CA de même que leurs complémentaires. D'après N° 1, *la somme et le produit* (finis ou dénombrables) ainsi que *la différence* de suites élémentaires sont élémentaires; la suite des *sommes partielles* $S_\alpha = \underset{\beta<\alpha}{E} A_\beta$ d'une suite élémentaire est élémentaire (selon 5)). Il en est encore de même de la suite $D_\alpha = A_\alpha - \sum_{\beta<\alpha} A_\beta$.

D'une façon analogue, si au lieu de supposer que les suites considérées sont élémentaires, on admet qu'elles sont *de classe P_n et C_n* ($n>1$), on constate que les opérations de *somme, produit, différence et de sommation partielle ne conduisent pas en dehors de ces classes*. En outre, *si la suite $\{A_\alpha\}$ est de classe P_n, l'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ l'est également*. Car (cf. N° 1, 4)): $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha = \underset{x}{E} \sum_{\alpha} (x \epsilon A_\alpha)$.

3. *Suites provenant de l'inversion des fonctions.* Etant donnée une fonction $\mu(x)$, définie pour $x \epsilon \mathfrak{X}$ et telle que $\mu(x) \epsilon \mathfrak{T}$, posons

$$A_\tau = \mu^{-1}(\tau) = \underset{x}{E}[\mu(x) = \tau].$$

Les ensembles A_τ sont évidemment disjoints et leur somme remplit l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier.

Théorème 1. *$\mu(x)$ étant une fonction de classe P_n ($n>0$) et Φ un ensemble de classe P_n (ou C_n), l'ensemble $\sum_{\tau\epsilon\Phi} A_\tau$ est de classe P_n (resp. C_n). En particulier, l'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ est de classe C_n et, dans le cas où $n>1$, est en même temps de classe P_n.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 6) du N° 1, en vertu de l'identité $\sum_{\tau\epsilon\Phi} A_\tau = \mu^{-1}(\Phi)$.

Théorème 2. *$\mu(x) \lesssim \tau$ étant une relation de classe P_n avec $n>1$, la somme $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ est aussi de classe P_n.*

On a, en effet, (cf. p. 171, déf. 5)

$$[\mu(x) < \Omega] \equiv \sum_{\tau} [\mu(x) \lesssim \tau] \, (\tau < \Omega)$$

et l'ensemble $\underset{\tau}{E}(\tau<\Omega)$ étant de classe P_2 (comme ensemble de classe CA), on en conclut que la fonction propositionnelle $[\mu(x) \lesssim \tau] \, (\tau<\Omega)$ est de classe P_n. Il en est donc de même de la fonction propositionnelle $[\mu(x)<\Omega]$, donc de l'ensemble

$$\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha = \underset{x}{E}[\mu(x)<\Omega].$$

Théorème 3. *Si la fonction $\mu(x)$ est de classe P_n ($n>1$), la suite transfinie $A_0, A_1, \ldots A_\alpha, \ldots$ est simultanément de classe P_n et C_n; elle est élémentaire si la fonction $\mu(x)$ est analytique.*

On a, en effet,

$$[(x \epsilon A_\tau)\,(\tau<\Omega)] \equiv [\tau = \mu(x) < \Omega] \equiv [(\tau \nless \mu(x) \nless \tau)\,(\tau, \mu(x) < \Omega)].$$

La troisième des fonctions propositionnelles entre crochets [ ] est de classe C_n selon N° 1, 6) (pour $n>0$); tandis que la deuxième est relativement analytique si $\mu(x)$ est analytique, et est de classe P_n pour $n>1$.

4. *Suites doubles.* Conformément au N° 2, une suite double $\{A_\alpha^\beta\}$ (α, $\beta<\Omega$) est dite élémentaire (ou de classe P_n ou C_n) lorsque l'ensemble $\underset{x\alpha\beta}{E}(x \epsilon A_\alpha^\beta)$ est élémentaire (resp. de classe P_n ou C_n).

Théorème 1. *Chaque suite double $\{A_\alpha^\beta\}$ élémentaire (ou de classe P_n ou C_n avec $n>1$) peut être rangée en une suite simple C_γ, $\gamma<\Omega$, élémentaire (resp. de classe P_n ou C_n).*

Démonstration. Nous avons défini en effet p. 185 deux fonctions élémentaires $\nu(\gamma)$ et $\varrho(\gamma)$ qui établissent une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$ et celui de tous les couples de nombres ordinaux $<\Omega$. Posons

$C_\gamma = A_{\nu(\gamma)}^{\varrho(\gamma)}$. La fonction propositionnelle $\varphi(x, \alpha, \beta) \equiv (x \in A_\alpha^\beta)$ étant supposée élémentaire, il en est de même de $\varphi[x, \nu(\gamma), \varrho(\gamma)] \equiv (x \in C_\gamma)$ selon N⁰ 1, 6).

Le cas de classe P_n ou C_n est analogue.

Théorème 2 (de réduction). *Etant donnée une suite double $\{A_\alpha^\beta\}$ élémentaire (ou de classe P_n et C_n avec $n > 1$), il existe une suite double $\{B_\alpha^\beta\}$ élémentaire (ou de classe P_n et C_n) à termes disjoints et telle que*

$$B_\alpha^\beta \subset A_\alpha^\beta \qquad \textit{et} \qquad \sum_{\alpha, \beta < \Omega} B_\alpha^\beta = \sum_{\alpha, \beta < \Omega} A_\alpha^\beta.$$

Démonstration. C_γ étant défini comme dans la démonstration précédente, posons $D_\gamma = C_\gamma - \sum_{\delta < \gamma} C_\delta$. La suite $\{A_\alpha^\beta\}$ étant supposée élémentaire, il en est de même de $\{C_\gamma\}$, donc de $\{D_\gamma\}$ (cf. p. 190). Soit $\mu(\alpha, \beta)$ la fonction inverse à la fonction „complexe" $[\nu(\gamma), \varrho(\gamma)]$; c. à d. que $\mu[\nu(\gamma), \varrho(\gamma)] = \gamma$. Cette fonction étant élémentaire (voir N⁰ 10, p. 184), il en est de même de la suite $B_\alpha^\beta = D_{\mu(\alpha, \beta)}$. Les termes de la suite $\{D_\gamma\}$ étant évidemment disjoints et la fonction $\mu(\alpha, \beta)$ étant biunivoque, les termes de la suite $\{B_\alpha^\beta\}$ sont aussi disjoints. Puis $B_\alpha^\beta \subset C_{\mu(\alpha, \beta)} = A_\alpha^\beta$ et enfin $\sum_{\alpha, \beta < \Omega} B_\alpha^\beta = \sum_{\gamma < \Omega} C_\gamma = \sum_{\alpha, \beta < \Omega} A_\alpha^\beta$.

Le raisonnement est analogue si la suite $\{A_\alpha^\beta\}$ est simultanément de classe P_n et C_n.

§ 2. Applications aux ensembles projectifs.

5. *Cribles.* Toute fonction $\{W_r\}$ qui fait correspondre à chaque nombre rationnel de l'intervalle 01 un ensemble W_r est dite un *crible* [1]). Etant donné un crible $\{W_r\}$, posons

$$N_x = \underset{r}{E}(x \in W_r), \qquad \mu(x) = \overline{N}_x \text{ (type d'ordre de } N_x\text{)},$$

$$A_\tau = \underset{x}{E}[\mu(x) = \tau].$$

Les ensembles A_α avec $\alpha < \Omega$ sont nommés les *constituantes* déterminées par le crible $\{W_r\}$.

Théorème 1. *Si, quel que soit r, l'ensemble W_r est simultanément de classe P_n et C_n avec $n > 0$, la fonction $\mu(x)$ est de classe P_n.*

[1]) Cette notion est due à M. Lusin. Cf. Fund. Math. 10 (1927), p. 9.

En effet [1]), en vertu de la déf. 2, p. 170, on a

$$\{\bar{t} = \mu(x)\} \equiv \{\overline{M}_t = \overline{N}_x\} \equiv \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} \{\prod_n [(\mathfrak{z}^n \in M_t)\,(\mathfrak{y}^n \in N_x)] \cdot$$
$$\cdot \prod_k [(r_k \in M_t) \to \sum_n (r_k = \mathfrak{z}^n)]\,[(r_k \in N_x) \to \sum_n (r_k = \mathfrak{y}^n)] \prod_{ij} [(\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j) \equiv (\mathfrak{y}^i < \mathfrak{y}^j)]\}.$$

En remplaçant $\mathfrak{z}^n \in M_t$ par $\sum_k (r_k = \mathfrak{z}^n)\,(t^k = 2)$, $\mathfrak{y}^n \in N_x$ par $\sum_l (r_l = \mathfrak{y}^n)\,(x \in W_{r_l})$, $r_k \in M_t$ par $t^k = 2$ et $r_k \in N_x$ par $x \in W_{r_k}$, — on constate aussitôt que l'ensemble $\underset{tx}{E}\{\bar{t} = \mu(x)\}$ est de classe P_n.

En vertu des théorèmes 1 et 3 du N⁰ 3, on en déduit le

Corollaire. *Dans les mêmes hypothèses sur le crible $\{W_r\}$, les ensembles A_τ sont de classe P_n, les constituantes A_α sont simultanément de classe P_n et C_n, l'ensemble $\sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha$ est de classe C_n et, dans le cas où $n > 1$, il est en même temps de classe P_n. Enfin la suite $A_0, A_1, \ldots A_\alpha, \ldots$ est élémentaire pour $n = 1$ et elle est de classe P_n et C_n pour $n > 1$.*

Théorème 2. *Si, quel que soit r, l'ensemble W_r est de classe C_n avec $n > 0$, la relation $\mu(x) \precsim \tau$ est de classe P_n.*

Il vient, en effet, selon la déf. 5, p. 171,

$$\{\mu(x) \precsim \bar{t}\} \equiv \{\overline{N}_x \precsim \overline{M}_t\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} \{\prod_k [(r_k \in N_x) \to \sum_n (r_k = \mathfrak{y}^n)] \cdot (\mathfrak{z}^k \in M_t) \cdot \prod_{ij} [(\mathfrak{y}^i < \mathfrak{y}^j) \to (\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j)]\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} \prod_k \{[(x \in W_{r_k})' + \sum_n (r_k = \mathfrak{y}^n)] \sum_l (r_l = \mathfrak{z}^k)\;(t^l = 2)\} \cdot \prod_{ij} [\mathfrak{y}^i < \mathfrak{y}^j) \to (\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j)],$$

d'où la conclusion demandée.

Le théor. 2 du N⁰ 3 entraîne directement le

Corollaire. *Dans les mêmes hypothèses sur le crible $\{W_r\}$, la somme $\sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha$ est, pour $n > 1$, un ensemble de classe P_n.*

6. *Opération* ($\mathcal{A}$). Si à chaque système fini $k_1 \ldots k_m$ d'entiers positifs correspond un ensemble $X_{k_1 \ldots k_m}$, on appelle résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur ce système l'ensemble-somme de tous les produits de la forme $X_{k_1} \cdot X_{k_1 k_2} \cdot X_{k_1 k_2 k_3} \cdot \ldots$; en symboles: l'ensemble

$$S = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_n X_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^n}. \tag{1}$$

[1]) On rapprochera les démonstrations des théor. 1 et 2 de celle d'un „lemme de M. Lusin"; voir par ex. ma *Topologie I*, p. 258.

Si le système $\{X_{k_1 \dots k_m}\}$ est régulier, c. à d. si l'on a toujours $X_{k_1 \dots k_m} \supset X_{k_1 \dots k_m k_{m+1}}$, les ensembles $X_{k_1 \dots k_m}$ peuvent être numerotés à l'aide des nombres rationnels de façon que l'on ait, pour le crible $\{W_r\}$ ainsi obtenu, l'équivalence

$$(2) \qquad (x \in S) \equiv (\mu(x) \not< \Omega)\ ^{1)}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{X} - S = \sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha.$$

Théorème[2]. Les *classes projectives* C_n *avec* $n>1$ (*ainsi que les classes* P_n *avec* $n>0$) *sont invariantes par rapport à l'opération* $(\mathcal{A})$.

Admettons, en effet, que les ensembles $X_{k_1 \dots k_m}$ sont de classe C_n $(n>1)$. On peut admettre que le système de ces ensembles est régulier, car dans le cas contraire on n'aurait qu'à remplacer l'ensemble $X_{k_1 \dots k_m}$ par $X_{k_1} \cdot X_{k_1 k_2} \cdot \dots \cdot X_{k_1 \dots k_m}$, ce qui n'affectuerait ni la classe projective de cet ensemble, ni l'ensemble S. Le crible $\{W_r\}$ qui correspond au système d'ensembles (ainsi régularisé) se compose donc d'ensembles de classe C_n et selon le corollaire du théor. 2 du N⁰ précédent, l'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ est de classe P_n. L'ensemble S est donc selon (2) de classe C_n.

L'invariance des classes P_n $(n>0)$ est une conséquence facile de la formule (1)[3].

Corollaire[4]. *La plus petite famille d'ensembles qui contient tous les ensembles fermés et qui est close par rapport à l'opération* $(\mathcal{A})$ *et à la soustraction est contenue dans les classes* PCA *et* $CPCA$.

7. ***Applications aux ensembles*** $\boldsymbol{CA}$. Chaque ensemble analytique S étant le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur un système régulier d'ensembles fermés, il existe un crible $\{W_r\}$ composé d'ensembles fermés et tel que $\mathcal{X} - S = \sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$, A_α désignant — comme auparavant — la α-ième constituante déterminée par ce crible.

---

[1] Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 11, p. 16 ou *Topologie I*, p. 256.

[2] Voir ma note des C. R. Paris, t. 203 (1936), p. 911.

[3] Cf. *Topologie I*, p. 240.

[4] Ce corollaire a été signalé par MM. Kantorovitch et Livensohn dans les C. R. t. 190 (1930), p. 1115 et dans Fund. Math. 18 (1932), p. 217 (sans démonstration complète). Cf. aussi les indications de M. Lusin sur des travaux de M. Novikoff sur ce sujet dans son compte rendu sur la théorie descriptive des fonctions p. 61, que j'ai cité p. 188, renvoi 1.

D'après le théor. 1 et le cor. du N⁰ 5, *la fonction* $\mu(x)$ *est analytique, la suite des constituantes* $A_0, A_1, \dots A_\alpha, \dots$ *est élémentaire et les constituantes sont des ensembles boreliens.*

Il en résulte[1] en vertu du théor. 1 du N⁰ 3 que Φ *étant un ensemble* CA *de nombres ordinaux, l'ensemble* $\sum_{\alpha\in\Phi} A_\alpha$ *est également un* CA. *En particulier* (cf. pp. 171 et 184), *si* Φ *désigne l'ensemble des nombres pairs, impairs, limites,* ε-*iens, l'ensemble* $\sum_{\alpha\in\Phi} A_\alpha$ *est de classe* CA, *de même que* $\sum_{\alpha\in\mathcal{O}-\Phi} A_\alpha$.

Parmi les nombreuses conséquences du même genre, citons la suivante: $A_0, A_1, \dots A_\alpha, \dots$ *et* $B_0, B_1, \dots B_\alpha, \dots$ *étant deux suites de constituantes correspondantes à deux complémentaires analytiques, l'ensemble* $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha \cdot B_\alpha$ *est de classe* CA.

En effet, soient $\{W_r\}$ et $\{Z_r\}$ les deux cribles qui déterminent les deux suites transfinies considérées et soient $\mu(x)$ et $\nu(x)$ les deux fonctions qui correspondent à ces cribles. Ces fonctions étant analytiques et la relation $\tau = \sigma < \Omega$ étant de classe CA, il en est de même (voir N⁰ 1, 6)) de la fonction propositionnelle $\mu(x) = \nu(x) < \Omega$, c. à d. de l'ensemble $\underset{x}{E}[\mu(x) = \nu(x) < \Omega]$. Mais ce dernier ensemble coïncide évidemment avec l'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha \cdot B_\alpha$.

8. ***Applications aux ensembles*** $\boldsymbol{PCA}$. Z étant un ensemble de classe PCA situé dans l'espace $\mathcal{X}$, il existe dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ un ensemble V de classe CA dont Z est la projection. Décomposons V, conformément au N⁰ 7, en une série transfinie élémentaire d'ensembles boreliens: $V = \sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha$. Soit P_α la projection de A_α, c. à d. $P_\alpha = \underset{x}{E} \sum_{y} [(xy) \in A_\alpha]$. La fonction propositionnelle $\varphi(x, y, \alpha) \equiv [(xy) \in A_\alpha]$ étant relativement analytique, il en est de même (selon N⁰ 1, 4)) de la fonction propositionnelle $\psi(x, \alpha) \equiv \sum_{y} [(xy) \in A_\alpha]$. On parvient ainsi à la conclusion suivante:

Théorème. *Chaque ensemble de classe* PCA *admet une décomposition en une série transfinie relativement analytique d'ensembles analytiques:* $Z = \sum_{\alpha<\Omega} P_\alpha$.

---

[1] Cf. le renvoi 1, p. 188.

Le théorème de réduction suivant, dans le domaine des ensembles PCA [1]), est un cas particulier du théorème de réduction du N° 4: *étant donnée une suite* $A^0, A^1, \dots A^n, \dots$ $(n<\omega)$ *d'ensembles* PCA, *il existe une suite d'ensembles* PCA *disjoints* $B^0, B^1, \dots B^n, \dots$ *tels que* $B^n \subset A^n$ *et* $B^0+B^1+\dots = A^0+A^1+\dots$

En effet, en vertu du théorème précédent, il existe pour chaque n, une suite transfinie relativement analytique $A_0^n, A_1^n, \dots A_\alpha^n, \dots$ telle que $A^n = \sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha^n$. La suite double $\{A_\alpha^n\}$ est évidemment [2]) aussi une suite relativement analytique, donc une suite de classe P_2 et C_2. Il existe, par conséquent, en vertu du théor. 2 du N° 4, une suite double $\{B_\alpha^n\}$ de classe P_2 d'ensembles disjoints et telle que $B_\alpha^n \subset A_\alpha^n$ et $\sum_n \sum_\alpha B_\alpha^n = \sum_n \sum_\alpha A_\alpha^n$.

Posons $B^n = \sum_\alpha B_\alpha^n$. La suite transfinie $B_0^n, B_1^n, \dots B_\alpha^n, \dots$ étant de classe P_2, pour n fixe, l'ensemble B^n l'est également (cf. N° 2).

Le théorème de réduction pour les ensembles PCA peut être déduit aussi (comme j'ai signalé dans la note précitée p. 188) du fait que, S_α^n désignant la somme partielle: $S_\alpha^n = A_0^n + \dots + A_\alpha^n$, l'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega}(S_\alpha^n - S_\alpha^m)$ est de classe PCA pour m et n fixes.

Or, la suite $A_0^n, A_1^n, \dots A_\alpha^n, \dots$ étant de classe P_2 et C_2 (pour n fixe), il en est de même (cf. N° 2) de la suite des sommes partielles $S_0^n, S_1^n, \dots S_\alpha^n, \dots$ donc (pour n et m fixes) de la suite des différences $\{S_\alpha^n - S_\alpha^m\}$, $\alpha<\Omega$. L'ensemble $\sum_{\alpha<\Omega}(S_\alpha^n - S_\alpha^m)$ est donc de classe PCA. c. q. f. d.

[1]) En généralisant quelques théorèmes de séparation de M. Novikoff (Fund. Math. 25, p. 459), j'ai établi le théorème cité dans Fund. Math. 26, p. 187.

[2]) Une remarque analogue à celle du renvoi [1]) p. 189 s'applique aux suites doubles transfinies: étant donnée pour chaque n une suite transfinie rel. analytique $A_0^n, A_1^n, \dots A_\alpha^n, \dots$, la suite double $\{A_\alpha^n\}$, $\alpha<\Omega$, $n<\omega$, est aussi rel. analytique. Car on a dans ce cas

$$\varphi(\alpha, \beta, x) \equiv (x \in A_\alpha^\beta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n=\beta)\,(x \in A_\alpha^n)$$

et la fonction propositionnelle $\psi_n(\alpha, x) \equiv (x \in A_\alpha^n)$ est, pour chaque n, rel. analytique.

Solution d'un problème de la théorie des relations.

Par

Sophie Piccard (Neuchâtel).

Le but de cette Note est de donner une solution complète du problème $\boldsymbol{P}$ suivant, posé récemment par M. Sierpiński [1]):

$\boldsymbol{P}$. *Soit E un ensemble indénombrable et R une relation entre les éléments de E, telle que pour tout élément donné x de E le nombre d'éléments y de E pour lesquels on a xRy est fini (ou nul). Existe-t-il toujours un sous-ensemble E_1 de E, de même puissance que E et tel que, x et y étant deux éléments distincts de E, on n'ait jamais xRy?*

M. Sierpiński a démontré (l. c.) que la réponse au problème $\boldsymbol{P}$ est affirmative:

1) si $\overline{\overline{E}} = 2^{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal quelconque $\geqslant \aleph_0$,

2) si $\overline{\overline{E}} = \aleph_{\alpha+1}$ où α est un nombre ordinal arbitraire.

Il existe cependant des ensembles indénombrables E qui ne satisfont ni à la condition 1) ni à la condition 2), p. ex. tels que $\overline{\overline{E}} = \aleph_\omega$ [2]).

Nous prouverons ici que *la réponse au problème P est affirmative, quel que soit l'ensemble indénombrable E.*

[1]) W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie des relations*, Fund. Math. **28**, p. 71.

[2]) En effet, si l'on avait $\aleph_\omega = 2^{\mathfrak{m}}$, on aurait $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ et $\aleph_n < \aleph_\omega$ pour $n=1,2,\dots$, d'où, d'après le théorème connu de J. König: $\aleph_1+\aleph_2+\aleph_3+\dots < \aleph_\omega\aleph_\omega\aleph_\omega\dots$, c. à d. $\aleph_\omega < \aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\mathfrak{m}\cdot\aleph_0} = 2^{\mathfrak{m}} = \aleph_\omega$, ce qui est impossible.