Supposons dans ce but que $f(x)$ soit continue sur H. Comme $E=Z(L)$ et la fonction $f(x)$, définie dans T, est inverse à la fonction $Z(y)$ définie pour $0<y\leqslant 1$, on a $L=f(E)$. Par conséquent $f(H)\subset f(E)=L$. L'ensemble $f(H)$ est donc indénombrable et (en tant que sous-ensemble de L) ne contient aucun ensemble indénombrable non-dense. Comme tel, il ne jouit pas — on le sait — de la propriété de Baire.

Or, la fonction f étant par hypothèse continue sur H et la fonction $Z(y)$ continue sur N, donc à plus forte raison sur $f(H)\subset L\subset N$, la fonction $f(x)$ établit une homéomorphie entre les ensembles H et $f(H)$. L'ensemble H étant toujours de I-re catégorie (comme sous-ensemble de E), il en serait donc le même de $f(H)$, ce qui est toutefois impossible, puisque $f(H)$ ne jouit pas de la propriété de Baire. Ainsi la fonction $f(x)$ n'est pas continue sur H, c. q. f. d.

Comme toute fonction $f(x)$ définie sur un ensemble linéaire, semi-continue supérieurement sur cet ensemble et n'y prenant que des valeurs $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ se laisse étendre à une fonction d'une variable réelle, semi-continue supérieurement et ne prenant que des valeurs du même intervalle, on apperçoit sans peine, en analysant la démonstration de mon théorème de *Fund. Math.* t. 27, p. 191 (surtout p. 198), qu'elle fournit en même temps la démonstration de la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, de classe 1 de Baire, et un ensemble linéaire indénombrable E tel que la fonction $f(x)$ n'est semi-continue supérieurement sur aucun sous--ensemble indénombrable de E.

Eine projektive Menge der Klasse *PCA* im Funktionalraum.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Sei R die Menge aller reellen Zahlen, I das abgeschlossene Interval $\langle 0,1\rangle$. Dann bezeichnet $I\times I$ das Einheitsquadrat und $R^{I\times I}$ den Raum aller für $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ definierten stetigen Funktionen $f(x,y)$.

Nachstehend gebe ich im Raum $R^{I\times I}$ ein einfaches Beispiel einer projektiven Menge genau dritter Klasse [1]), d. h. einer *PCA*-Menge an.

Satz. *Die Menge Ψ aller $f\in R^{I\times I}$, welche für mindestens ein y für alle $x\in I$ nach x partiell differenzierbar sind, ist eine PCA-Menge.*

Beweis. Die logisch-symbolische Formel

$$(1)\qquad f\in\Psi\equiv\sum_{y}\prod_{x,m}\sum_{n}\prod_{r_1,r_2}\left\{|x-r_1|<\frac{1}{n}>|x-r_2|\rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow\left|\frac{f(r_1,y)-f(x,y)}{r_1-x}-\frac{f(r_2,y)-f(x,y)}{r_2-x}\right|\leqslant\frac{1}{m}\right\},$$

wo $m,n=1,2,\dots$ und r_1, r_2 rationale Zahlen aus I sind, zeigt, dass Ψ höchstens von der Klasse *PCA* ist.

---

[1]) in der Terminologie von Kuratowski: *Topologie I*, Monografje Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 234.

Sei $M \subset I$ eine perfekte nulldimensionale Menge und $L \subset M$ eine PCA-Menge. Dann ist [2]) L die Projektion auf die z-Achse einer CA-Menge $K \subset \underset{y,z}{\mathrm{E}}[(y \in M)(z \in M)] = M \times M$. Die letztere ist aber perfekt und nulldimensional; daher existiert [3]) eine für $x \in I$, $y \in M$, $z \in M$ stetige Funktion $F(x, y, z)$ mit folgenden Eigenschaften: ist $(y, z) \in K$, so existiert $\frac{\partial F}{\partial x}$ für alle $x \in I$; ist dagegen $(y, z) \in (M \times M) - K$, so ist $F(x, y, z)$ für mindestens ein $x \in I$ nach x nicht differenzierbar.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf vorausgesetzt werden, dass $0 \in M$ und $1 \in M$. Dann ist

$$(2) \qquad I - M = \sum_{m=1}^{\infty} U_m,$$

wo U_m ein offenes Intervall mit Endpunkten in M bedeutet. Sei a_m der Mittelpunkt und d_m die halbe Länge von U_m. Wir definieren eine für $x \in I$, $y \in M$, $z \in I$ stetige Funktion $G(x, y, z)$ in folgender Weise:

$$(3) \qquad G(x, y, z) = F(x, y, z), \qquad \text{wenn} \quad z \in M,$$

$$(4) \qquad \begin{aligned} G(x, y, z) = F(x, y, a_m - d_m) \cdot \frac{a_m + d_m - z}{2d_m} + \\ + F(x, y, a_m + d_m) \cdot \frac{z - a_m + d_m}{2d_m}, \qquad \text{wenn} \quad z \in U_m. \end{aligned}$$

Nach dem Weierstrassschen Satz kann man nun für jedes $m = 1, 2, \ldots$ eine Folge von Polynomen in x, z

$$\{p_n^{(m)}(x, z)\} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

derart bestimmen, dass:

$$(5) \qquad \lim_{n \to +\infty} p_n^{(m)}(x, z) = G(x, a_m + d_m, z), \qquad \lim_{n \to -\infty} p_n^{(m)}(x, z) = G(x, a_m - d_m, z),$$

und zwar gleichmässig für $(x, z) \in I \times I$. Sei $h(x)$ eine beliebige in I stetige, in mindestens einem Punkt von I nicht differenzierbare Funktion und $g(y)$ eine Funktion, die durch die Gleichungen definiert ist:

[2]) Kuratowski: l. c., p. 240.

[3]) Mazurkiewicz: Fund. Math. XXVII, p. 245.

$$(6) \qquad g(y) = 0 \qquad \text{für} \quad y \in M,$$

$$(7) \qquad g(y) = d_m^2 - (y - a_m)^2 \qquad \text{für} \quad y \in U_m.$$

Jetzt definieren wir eine für $(x, y) \in I \times I$ und $z \in M$ stetige Funktion $H(x, y, z)$ in folgender Weise:

$$(8) \qquad H(x, y, z) = G(x, y, z) = F(x, y, z) \qquad \text{für} \quad x \in I, \ y \in M, \ z \in M;$$

$$(9) \qquad H(x, y, z) = h(x)\, g(y) + p_n^{(m)}(x, z) \frac{b_{n+1}^{(m)} - y}{b_{n+1}^{(m)} - b_n^{(m)}} + p_{n+1}^{(m)}(x, z) \frac{y - b_n^{(m)}}{b_{n+1}^{(m)} - b_n^{(m)}}$$
$$\text{für} \quad b_n^{(m)} < y \leqq b_{n+1}^{(m)},$$

wo

$$(10) \qquad b_n^{(m)} = a_m + \frac{n}{|n| + 1} d_m \qquad m = 1, 2, \ldots; \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Schliesslich, setzen wir

$$(11) \qquad H_1(x, y, z) = z + H(x, y, z) - H(0, 0, z).$$

Wegen (5) und (6) ist $H(x, y, z)$, also auch $H_1(x, y, z)$ stetig. Es ist ferner

$$(12) \qquad H_1(0, 0, z) = z.$$

Sei nun $z \in L$; dann existiert ein y, derart dass $(y, z) \in K$; für dieses y ist $F(x, y, z)$, also, vermöge (8), auch $H(x, y, z)$ und $H_1(x, y, z)$ für alle $x \in I$ nach x differenzierbar.

Sei $z \in M - L$ und $y \in I$; dann unterscheiden wir zwei Fälle. Erstens, $y \in M$. In diesem Fall gilt die Formel (8) und es ist $(y, z) \in M - K$, also $F(x, y, z)$ und somit auch $H(x, y, z)$ und $H_1(x, y, z)$ für mindestens ein $x \in I$ nach x nicht differenzierbar. Zweitens, $y \in I - M$. Dann ist $b_n^{(m)} < y \leqq b_{n+1}^{(m)}$ für ein bestimmtes Zahlenpaar m, n. Demnach gilt die Formel (9). Der zweite und dritte Summand auf der rechten Seite von (9) sind Polynome in x, also nach x überall differenzierbar; der erste Summand dagegen ist für mindestens ein $x \in I$ nach x nicht differenzierbar. Es ist also auch in diesem Fall $H(x, y, z,)$ und somit $H_1(x, y, z)$ für mindestens ein $x \in I$ nach x nicht differenzierbar.

Wir haben demnach folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz. *Sei* $M \subset I$ *eine perfekte nulldimensionale Menge,* $L \subset M$ *eine PCA-Menge; dann existiert eine Funktion* $H_1(x, y, z)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(a_1) $H_1(x, y, z)$ *ist für* $(x, y) \in I \times I$, $z \in M$ *stetig,*

(a_2) *aus* $(z_1 \neq z_2)$ *folgt* $[H_1(0, 0, z_1) \neq H_1(0, 0, z_2)]$,

(a_3) *aus* $(z \in L)$ *folgt* $[H_1(x, y, z) \in \Psi]$,

(a_4) *aus* $(z \in M - L)$ *folgt* $[H_1(x, y, z)$ *non* $\in \Psi]$.

Der Übergang von diesem Hilfssatz zum Satz erfolgt nun in genau derselben Weise, wie in meiner unter [3]) zitierten Arbeit (S. 248—249).

Żegiestów, 3/IX 1936.

Formal definitions in the theory of ordinal numbers [1]).

By

Alonzo Church and S. C. Kleene (Princeton, N. J.).

1. The purpose of this paper is to extend to the transfinite ordinals, and functions of transfinite ordinals, the theory of formal definition which has been developed by one of the present authors [2]) for functions of positive integers. The notation and terminology are those previously employed by the authors [3]).

---

[1]) Presented to the American Mathematical Society, September 1935.

[2]) S. C. Kleene, *A theory of positive integers in formal logic,* Amer. Jour. Math., vol. 57, 1935, pp. 153—173, 219—244. It should be observed that the part of this paper of Kleene which is concerned with problems of formal definition depends only on Church's rules of procedure I—III and is therefore unaffected by the fact that the complete system of Church, making use of the properties of Π and &, is now known to lead to contradiction (S. C. Kleene and J. B. Rosser, *The inconsistency of certain formal logics,* Ann. Math., vol. 36, 1935, pp. 630—636). Indeed these problems of formal definition have an interest which is independent even of the question whether there exists a consistent, adequate system of symbolic logic which embodies the rules of procedure I—III. The fact of this independent interest is made especially clear by the results of S. C. Kleene, loc. cit., § 18, and of Alonzo Church, *An unsolvable problem of elementary number theory,* forthcoming (abstract in Bull. Amer. Math. Soc., vol. 41, 1935, p. 332). Also it is thought that the considerations of the present paper have a bearing on the distinction between constructive and non-constructive ordinals, and on questions of enumerability and effective enumerability.

[3]) See Alonzo Church, *A set of postulates for the foundation of logic,* Ann. Math., vol. 33, 1932; pp. 346—366; S. C. Kleene, *loc. cit.*, and *Proof by cases in formal logic,* Ann. Math., vol. 35, 1934, pp. 529—544; Alonzo Church and J. B. Rosser, *Some properties of conversion,* forthcoming (abstract in Bull. Amer. Math. Soc., vol. 41, 1935, p. 332). These papers will hereafter be referred to by author or by author and date.

Note particularly the definition of *well-formed* (Kleene 1934 § 1), the abbreviations of well-formed formulas (Church 1932 § 6 and Kleene 1934 § 3), the use of heavy-type letters (Kleene 1934 § 3, (1) and (2), and 1935, footnotes