If $s_n(x)$ is the n-th partial sum of the Fourier series of f, then, observing that $I_{n,u}[f]-s_n=I_{n,u}[f-s_n]$, we have

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|I_{n,u}(x,f)-s_n(x)|^2\,du\,dx=2\sum_{\lambda=n+1}^{\infty}{}'|\gamma_\lambda|^2.$$

Thence we easily deduce the inequality

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}'\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|I_{n,u}-s_n|^2\,du\,dx\leqslant C\sum_{\lambda=1}^{\infty}{}'\lambda\,|\gamma_\lambda|^2,$$

where C is an absolute constant. Similarly, if $n_{k+1}/n_q>q>1$ and $n_1\geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|I_{n_k,u}-s_{n_k}|^2\,du\,dx\leqslant C_q\sum_{\lambda=2}^{\infty}{}'|\gamma_\lambda|^2\log\lambda,$$

with C_q depending on q only.

The first of these inequalities shows that, if $\sum'\lambda\,|\gamma_\lambda|^2<\infty$, then, for almost every translation u, the sequence $I_{n,u}(x,f)$ converges to $f(x)$ almost everywhere in the interval $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. The same may be said of the lacunary sequence $I_{n_k,u}[f]$, provided that the series $\sum|\gamma_\lambda|^2\log\lambda$ converges.

Bibliography.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G., [1] Inequalities, Cambridge, 1934.

Jackson, D., [1], The Theory of Approximation.

Jessen, B., [1], On the approximation of Lebesgue integrals by Riemann sums, *Annals of Mathematics*, 35 (1934), 248—251.

Kolmogoroff, A., [1], Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, *Fund. Math.*, 7 (1935), 23—28.

Marcinkiewicz, J., [1], Sur l'interpolation, *Studia Math.* 6 (1936).

[2], Quelques remarques sur l'interpolation, (to appear in *Acta Szeged*).

Riesz, M., [1], Sur les fonctions conjuguées, *Math. Zeitschr.* 27 (1927), 218—244.

[2], Sur les maxima des formes billinéaires et sur les fonctionnelles linéaires. *Acta Math.*, 49 (1926), 465—497.

de la Vallée Poussin [1], Leçons sur l'approximation, Paris 1919,

Zygmund, A., [1], A remark on conjugate series, *Proc. London Math. Soc.* 34 (1932), 392—400.

[2], Trigonometrical Series (*Monografje Matematyczne* V), Warszawa—Lwów, 1935.

[3], Sur les fonctions conjuguées, *Fund. Math.* 13 (1929), 284—303.

Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable[1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

D'après les théorèmes classiques de la Théorie des Ensembles, on peut faire correspondre d'une façon bien déterminée aux types d'ordre d'ensembles dénombrables ordonnés certains ensembles de nombres réels: c'est que chaque ensemble ordonné dénombrable est semblable à un sous-ensemble de l'ensemble des nombres rationnels rangés selon leur grandeur (et même, à une infinité de tels ensembles); et qu'en outre, chaque ensemble composé de nombres rationnels peut être remplacé par un nombre réel, notamment, par le nombre réel qui lui vient correspondre dans la correspondance biunivoque entre la famille de tous les ensembles composés de nombres rationnels et l'ensemble de tous les nombres réels.

Nous allons réaliser cette interprétation géométrique des types d'ordre dénombrable à l'aide de la méthode suivante, due à M. Lebesgue et qui paraît être la plus simple possible[2]).

Imaginons d'abord l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle 01 rangé en une suite infinie bien déterminée (composée d'éléments différents)

(1) $$r_1,\ r_2,\ \dots\ r_n,\ \dots$$

Soit t un élément de l'ensemble $\mathfrak{C}$ non-dense de Cantor:

$$t=\frac{t^1}{3}+\frac{t^2}{9}+\frac{t^3}{27}+\dots\qquad (t^n=0 \text{ ou } 2).$$

[1]) Présenté à la Soc. Pol. de Math., Section de Varsovie, le 9. X. 1936.

[2]) Journal de Math. 1905 (chap. VIII).

Désignons par M_t l'ensemble des nombres rationnels r_n tels que $t^n=2$. Evidemment, la fonction M_t établit une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble $\mathcal{C}$ et les sous-ensembles de la suite (1).

Soit $\bar{t}$ le type d'ordre de l'ensemble M_t (ordonné selon la grandeur croissante de ses éléments). L'interprétation géométrique des types ordinaux consiste à remplacer le type ordinal τ par l'ensemble des nombres t tels que $\bar{t}=\tau$; en symboles: par l'ensemble $\underset{t}{E}(\bar{t}=\tau)$.

Ainsi à un *ensemble* Φ de types ordinaux correspond l'ensemble de nombres réels $\underset{t}{E}(\bar{t}\in\Phi)$. Autrement dit, à une propriété des types ordinaux (ou encore: à une fonction propositionnelle $\varphi(\tau)$ de variable τ) correspond une propriété des nombres réels: à savoir, celle d'être un nombre t tel que $\bar{t}$ jouit de la propriété considérée (c. à d. à $\varphi(\tau)$ correspond la fonction propositionnelle $\varphi(\bar{t})$ de variable réelle). Si, par exemple, Φ est l'ensemble des nombres ordinaux (= types de bon ordre), l'ensemble des nombres réels qui lui vient correspondre est celui des t tels que $\bar{t}<\Omega$.

D'une façon analogue, à une *relation* entre les types ordinaux correspond une relation entre les éléments de l'ensemble de Cantor: à la relation $\varphi(\tau,\sigma)$ correspond la relation $\varphi(\bar{t},\bar{s})$. Autrement dit, si $\mathfrak{T}$ dénote l'ensemble de tous les types d'ordre dénombrable et $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$, ou $\mathfrak{T}^2$, l'ensemble de tous les couples des éléments de $\mathfrak{T}$ (types ordinaux „complexes"), — à chaque ensemble $\Phi\subset\mathfrak{T}^2$ correspond l'ensemble $\underset{ts}{E}[(\bar{t},\bar{s})\in\Phi]$, contenu dans $\mathcal{C}^2$. Ainsi, par exemple, à la relation $\tau=\sigma$ correspond la relation $\bar{t}=\bar{s}$; ce qui revient à dire qu'à l'ensemble $\Phi=\underset{\tau\sigma}{E}(\tau=\sigma)$ correspond l'ensemble „plan" $\underset{ts}{E}(\bar{t}=\bar{s})$.

D'une façon tout-à-fait générale, à chaque ensemble $\Phi\subset\mathfrak{T}^n$ correspond l'ensemble $\underset{t_1\ldots t_n}{E}[(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n)\in\Phi]$ contenu dans $\mathcal{C}^n$. En d'autres termes, à la fonction propositionnelle $\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ correspond $\varphi(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n)$.

La définition suivante s'impose:

Définition. *L'ensemble $\Phi\subset\mathfrak{T}^n$ est dit de classe projective P_n (ou C_n) [1]) lorsque l'ensemble $\underset{t_1\ldots t_n}{E}[(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n)\in\Phi]$ est de classe P_n (resp. C_n).*

En d'autres termes, la fonction propositionnelle $\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ de n types ordinaux est dite de classe P_n (ou C_n) lorsque la fonction propositionnelle $\varphi(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n)$ de n variables réelles est de cette classe.

Le but de cet ouvrage est l'étude des notions (des fonctions propositionnelles) de la théorie des types d'ordre dénombrable au point de vue de leur classe projective. Comme on verra, *toutes les notions habituellement considérées dans la théorie des types ordinaux sont projectives*; de plus, dans la théorie des nombres ordinaux, elles sont, en général, *de classe CA* [2]).

Plusieurs cas particuliers du problème ainsi posé ont été considérés dans des différentes recherches. Ainsi par exemple, le théorème important d'après lequel l'ensemble des t tels que $\bar{t}<\Omega$ est non borelien [3]) s'énonce en termes employés ici de cette façon: l'ensemble des nombres ordinaux n'est pas borelien. Un autre théorème qui se rattache au précédent est que, pour chaque $\alpha<\Omega$, l'ensemble $\underset{t}{E}(\bar{t}=\alpha)$ est borelien [4]); cela veut dire que chaque nombre ordinal individuel, considéré comme ensemble formé d'un seul élément, est borelien.

---

[1]) Les ensembles boreliens (= ensembles qui s'obtiennent des ensembles fermés à l'aide des opérations de l'addition et de la multiplication dénombrables indéfiniment répétées) constituent la classe P_0 ainsi que C_0. Les ensembles de classe P_n sont les images continues des ensembles de classe C_{n-1}. Ceux de classe C_n sont les complémentaires des ensembles de classe P_n. En particulier, les ensembles P_1 sont nommés ensembles analytiques (ou ensembles A), ceux de classe C_1 sont nommés ensembles CA.

Comme on sait, les ensembles boreliens se partagent en classes F_α et G_α; on pourrait nommer l'ensemble Φ ensemble de classe F_α (ou G_α) lorsque $\underset{t_1\ldots t_n}{E}[(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n)\in\Phi]$ est de telle classe.

[2]) L'existence des ensembles composés de nombres ordinaux qui ne sont pas des ensembles de classe CA, qui ne sont même pas projectifs, résulte (en admettant l'hypothèse du continu) du fait que la famille de tous les sous-ensembles de l'ensemble des nombres ordinaux est de puissance $2^{\aleph_1}$ tandis que celle des ensembles projectifs est de puissance du continu.

Le problème reste ouvert de *définir effectivement* un ensemble de nombres ordinaux qui ne soit pas de classe CA.

[3]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński, Journ. de Math. 1923, p. 53.

[4]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński, C. R. Paris t. 175 (1922), p. 357.

Le fait que l'inégalité $\tau \leqslant \sigma$ est analytique constitue, en réalité, la base de la démonstration du „deuxième principe" de M. Lusin [1]). Ajoutons enfin que la projectivité des ensembles des types pairs et limites intervient dans les recherches récentes sur la projectivité des ensembles définis à l'aide de l'induction transfinie [2]).

Dans une note qui va suivre, je vais appliquer la théorie développée ici aux suites transfinies projectives d'ensembles (dont j'ai signalé récemment la définition) [3]) ainsi qu'à la théorie des ensembles projectifs en général.

§ 1. Types d'ordre dénombrable.

1. *Définitions des notions fondamentales.* Dans ce qui va suivre M, N et P désignent des sous-ensembles variables de l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle 01. Le type d'ordre de M est désigné par $\overline{M}$. Les symboles $\mathfrak{z}=\{\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots\}$ et $\mathfrak{y}=\{\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \ldots\}$ dénotent des suites variables de nombres réels (c. à d. $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ sont des points de l'espace de Fréchet). Nous nous servirons en outre des notations logiques, habituellement employées [4]).

Définition 1. *Type d'ordre limite* (c. à d. type d'ordre sans dernier élément). L désignant l'ensemble des types limites, on a

$$\{\overline{M} \in L\} \equiv \prod_n \sum_k (r_n \in M) \rightarrow (r_n < r_k \in M).$$

Déf. 2. *Identité.* $\{\overline{M}=\overline{N}\} \equiv \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} \{\prod_n [(\mathfrak{z}^n \in M)(\mathfrak{y}^n \in N)] \cdot$

$$\cdot \prod_k [(r_k \in M) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{z}^n)]\, [(r_k \in N) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{y}^n)] \cdot \prod_{ij} [\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j) \equiv (\mathfrak{y}^i < \mathfrak{y}^j)]\}.$$

Cette définition signifie, en effet, que l'on peut ranger les éléments de M ainsi que ceux de N en deux suites $\mathfrak{z}=\{\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots\}$ et $\mathfrak{y}=\{\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \ldots\}$ de façon que l'inégalité $\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j$ équivale à $\mathfrak{y}^i < \mathfrak{y}^j$; cela veut dire que les ensembles M et N sont semblables.

---

[1]) Voir N. Lusin, *Ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 210 et ma *Topologie I*, Varsovie 1933, p. 258.

[2]) Cf. ma note dans Fund. Math. 27, p. 275 et la note de M. J. v. Neumann et moi dans Annals of Math. (à paraître).

[3]) dans ma conférence au Congrès topologique de Moscou (1935).

[4]) en particulier des opérateurs $\sum_x$, qui signifie „il existe un x tel que..." et $\prod_x$, qui signifie „quel que soit x, on a..." Voir *Topologie I*, § 1.

Déf. 3. *Addition.* $\{\overline{M}=\overline{N}+\overline{P}\} \equiv \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} \prod_n [(\mathfrak{z}^n \in M)((\mathfrak{y}^n \in N)+(\mathfrak{y}^n - 2 \in P))] \cdot$

$$\cdot \prod_k [(r_k \in M) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{z}^n)]\, [(r_k \in N) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{y}^n)]\, [(r_k \in P) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{y}^n - 2)] \cdot$$

$$\cdot \prod_{ij} [(\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j) \equiv (\mathfrak{y}^i < \mathfrak{y}^j)].$$

Déf. 4. *Multiplication.*

$$\{\overline{M}=\overline{N}\cdot\overline{P}\} \equiv \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{w}} \prod_n [(\mathfrak{z}^n \in M)(\mathfrak{y}^n \in N)(\mathfrak{w}^n \in P)] \cdot$$

$$\cdot \prod_k [(r_k \in M) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{z}^n)]\, [(r_k \in N) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{y}^n)]\, [(r_k \in P) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{w}^n)] \cdot$$

$$\cdot \prod_{ij} [(\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j) \equiv (\mathfrak{w}^i < \mathfrak{w}^j) + (\mathfrak{w}^i = \mathfrak{w}^j)(\mathfrak{y}^i < \mathfrak{y}^j)].$$

Déf. 5. *Inégalités.*

$\{\overline{N} \lesssim \overline{M}\} \equiv \{N$ est semblable à un sous-ensemble de $M\} \equiv$

$$\equiv \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} \prod_k [(r_k \in N) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{y}^n)]\, (\mathfrak{z}^k \in M) \prod_{ij} [(\mathfrak{y}^i < \mathfrak{y}^j) \rightarrow (\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j)] \text{ [1])}.$$

En outre

$$(\tau \leqslant \sigma) \equiv \sum_\varrho (\sigma = \tau + \varrho), \qquad (\tau < \sigma) \equiv (\tau + 1 \leqslant \sigma).$$

En vue des applications ajoutons les définitions suivantes:

$$(\overline{M} \text{ est dense}) \equiv \prod_{nm} \sum_k (r_n, r_m \in M)(r_n < r_m) \rightarrow (r_n < r_k < r_m)(r_k \in M)$$

$$(\overline{M} \text{ est somme d'un type limite et de } n) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k_1 \ldots k_n} \{(r_{k_1} \ldots r_{k_n} \in M)(r_{k_1} < \ldots < r_{k_n}) \cdot \prod_m [((r_m \in M) \prod_{i \leqslant n} (m \neq k_i)) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_j (r_m < r_j \in M)(r_j < r_{k_1})]\}.$$

$(\overline{M}$ est pair$) \equiv ($il existe un n tel que $\overline{M}$ = type limite $+ 2n)$ [2]).

Convenons aussi que

$$(\tau = \sigma - 1) \equiv [(\sigma \in L)(\tau = \sigma) + (\sigma = \tau + 1)].$$

2. *Evaluation de la classe borelienne ou projective dans la théorie des types d'ordre dénombrable.*

Théorème 1. *L'ensemble des types d'ordre limite (ainsi que celui des types denses et celui des types pairs) est borelien. Les relations $\tau = \sigma$, $\tau \leqslant \sigma$, $\tau < \sigma$, $\tau \lesssim \sigma$, $\tau = \sigma + \varrho$, $\tau = \sigma \cdot \varrho$ et $\tau = \sigma - 1$ sont analytiques.*

Démonstration. Remplaçons, dans la déf. 1, $r_n \in M$ par $t_n = 2$. Il vient:

$$\{\bar{t} \in L\} \equiv \{\overline{M}_t \in L\} \equiv \prod_n \sum_k (t^n = 2) \rightarrow (r_n < r_k)(t^k = 2).$$

---

[1]) Cf. le renvoi [1]) p. 170.

[2]) Cette dernière définition n'est considérée d'habitude que dans le cas où M est bien ordonné.

L'ensemble $\mathop{E}\limits_{t}(t^n=2)$ étant simultanément fermé et ouvert (dans l'ensemble de Cantor), l'ensemble L est borelien (de classe G_δ).

Un raisonnement analogue conduit à la conclusion que les types d'ordre dense et pair sont boreliens.

Pour démontrer que la relation $\tau=\sigma$ est analytique, ce qui veut dire que l'ensemble $\mathop{E}\limits_{ts}(\bar{t}=\bar{s})$ est analytique, on se sert de l'équivalence

$$(\mathfrak{z}^n \epsilon M_t) \equiv \sum_k (r_k=\mathfrak{z}^n)(r_k \epsilon M_t) \equiv \sum_k (r_k=\mathfrak{z}^n)(t^k=2).$$

Les ensembles $\mathop{E}\limits_{\mathfrak{z}}(r_k=\mathfrak{z}^n)$ et $\mathop{E}\limits_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}^k<\mathfrak{z}^n)$ étant fermés pour k et n fixes, on en conclut[1] que l'ensemble

$$Q=\mathop{E}_{ts\mathfrak{z}\mathfrak{y}}\{\prod_n\sum_{kl}(r_k=\mathfrak{z}^n)(r_l=\mathfrak{y}^n)(t^k=2=s^l)\cdot$$
$$\cdot\prod_k[(t^k=2)\rightarrow\sum_n(r_k=\mathfrak{z}^n)][(s^k=2)\rightarrow\sum_n(r_k=\mathfrak{y}^n)]\cdot\prod_{ij}[(\mathfrak{z}^i<\mathfrak{z}^j)\equiv(\mathfrak{y}^i<\mathfrak{y}^j)]\}$$

est borelien. L'ensemble $\mathop{E}\limits_{ts}(\bar{t}=\bar{s})=\mathop{E}\limits_{ts}(\bar{M}_t=\bar{M}_s)=\sum\limits_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}\mathop{E}\limits_{ts}[(ts\mathfrak{z}\mathfrak{y})\epsilon Q]$, comme projection de Q, est donc analytique.

D'une façon tout-à-fait analogue, on démontre que les relations $\tau\prec\sigma$, $\tau=\sigma+\varrho$ et $\tau=\sigma\cdot\varrho$ sont analytiques. De là on conclut en vertu des équivalences

$$(\bar{t}\leqslant\bar{s})\equiv\sum_v(\bar{s}=\bar{t}+\bar{v}) \qquad \text{et} \qquad (\bar{t}<\bar{s})\equiv\sum_v(\bar{v}=1)(\bar{t}+\bar{v}\leqslant\bar{s})$$

que les relations $\tau\leqslant\sigma$ et $\tau<\sigma$ sont analytiques (c'est d'ailleurs une conséquence de la règle 4) qui va suivre). Il en est de même de la relation $\tau=\sigma-1$.

L'analycité des relations fondamentales qui vient d'être établie implique *la projectivité des notions habituellement considérées dans la théorie des types d'ordre dénombrable.* Car chaque fonction propositionnelle $\varphi(\tau,\sigma,\ldots)$ qui s'obtient à partir des fonctions propositionnelles projectives en appliquant les opérations de l'algèbre de la logique: addition, multiplication, négation, opérateurs $\sum\limits_{\tau}$ et $\prod\limits_{\tau}$, —

[1]) Pour la méthode d'évaluation de la classe borelienne ou projective d'une fonction propositionnelle, voir *Topologie I*, pp. 168 et 243 ou deux notes de M. Tarski et moi dans Fund. Math. 17 (1931).

est projective. L'évaluation de sa classe projective s'effectue à l'aide de la même méthode que l'on emploie dans le cas où, au lieu des variables τ, σ, etc., on a à considérer des variables réelles (ou plus généralement des points d'un espace complet séparable).

On a, en particulier, les règles suivantes d'évaluation de la classe projective d'une fonction propositionnelle $\varphi(\tau)$:

1) *Si $\varphi(\tau)$ est de classe P_n, sa négation $\varphi'(\tau)$ est de classe C_n.*

Car $\mathop{E}\limits_{t}\varphi'(\bar{t})=\mathfrak{C}-\mathop{E}\limits_{t}\varphi(\bar{t})$.

2) *Si $\varphi(\tau)$ est de classe P_n (ou C_n) dans l'espace $\mathfrak{C}$, il en est de même dans l'espace $\mathfrak{C}\times\mathfrak{C}$.*

Car $\mathop{E}\limits_{ts}\varphi(\bar{t})=[\mathop{E}\limits_{t}\varphi(\bar{t})]\times\mathfrak{C}$.

3) *Si les fonctions $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, ... sont de classe P_n (ou C_n), il en est de même des fonctions $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\tau)$ et $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\tau)$.*

Car $\mathop{E}\limits_{t}\sum\limits_{k}\varphi_k(\bar{t})=\sum\limits_{k}\mathop{E}\limits_{t}\varphi_k(\bar{t})$.

4) *$\varphi(\tau,\sigma)$ étant de classe P_n, la fonction $\psi(\tau)=\sum\limits_{\sigma}\varphi(\tau,\sigma)$ l'est également; la fonction $\chi(\tau)=\prod\limits_{\sigma}\varphi(\tau,\sigma)$ est de classe C_{n+1}.*

En effet, à chaque σ correspond un s tel que $\bar{s}=\sigma$. Donc, $\sum\limits_{\sigma}\varphi(\tau,\sigma)\equiv\sum\limits_{s}\varphi(\tau,\bar{s})$, d'où, $\psi(\bar{t})\equiv\sum\limits_{s}\varphi(\bar{t},\bar{s})$, ce qui implique que l'ensemble $\mathop{E}\limits_{t}\psi(\bar{t})$ est de classe P_n, comme projection de l'ensemble $\mathop{E}\limits_{ts}\varphi(\bar{t},\bar{s})$.

5) *$\varphi(\tau,\sigma)$ étant de classe P_n (ou C_n), il en est de même de la fonction $\psi(\tau)=\varphi(\tau,\sigma_0)$, pour σ_0 fixe*[1]).

[1]) On en conclut en vertu du théor. 1 que l'ensemble $\mathop{E}\limits_{t}(\bar{t}=\sigma)$ *est analytique quel que soit σ.* Le problème s'impose de reconnaître si cet ensemble n'est pas nécessairement borelien? Il en est ainsi, si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que σ est un nombre ordinal. De plus, on peut démontrer que la classe borelienne de l'ensemble $\mathop{E}\limits_{t}(\bar{t}=\alpha)$ est illimitée lorsque α parcourt l'ensemble des nombres ordinaux. Il en résulte aussitôt que l'ensemble $\mathop{E}\limits_{ts}(\bar{t}=\bar{s})$ n'est pas borelien. Autrement dit, *l'égalité $\tau=\sigma$ est une relation analytique non borelienne.*

Soit, en effet, s_0 un nombre tel que $\bar{s}_0=\sigma_0$. L'ensemble $\underset{t}{E}\,\psi(\bar{t})$ coïncide avec l'intersection de l'ensemble $\underset{ts}{E}\,\varphi(\bar{t},\bar{s})$ par la droite $s=s_0$. Car on a

$$\psi(\bar{t})\cdot(s=s_0)\equiv\varphi(\bar{t},\sigma_0)\cdot(s=s_0)\equiv\varphi(\bar{t},\bar{s})\cdot(s=s_0).$$

6) $\varphi(\tau,\sigma)$ *étant de classe* P_n (*ou* C_n), *il en est de même de la fonction* $\varphi(\tau,\tau)$.

En effet, en projetant la diagonale $\underset{ts}{E}(t=s)$ sur l'axe des abscisses, l'ensemble $\underset{t}{E}\,\varphi(\bar{t},\bar{t})$ vient correspondre à l'ensemble $\underset{ts}{E}[\varphi(\bar{t},\bar{s})\cdot(t=s)]$, qui est évidemment de la même classe que l'ensemble $\underset{ts}{E}\,\varphi(\bar{t},\bar{s})$.

Outre les règles précédentes, qui correspondent aux règles générales de l'évaluation de la classe projective, on a le théorème suivant.

Théorème 2. *Les opérations* $\prod\limits_{\sigma<\tau}$ *et* $\sum\limits_{\sigma<\tau}$ *n'altèrent pas la classe projective de la fonction propositionnelle à laquelle elles sont appliquées.*

Autrement dit, si la fonction $\varphi(\sigma)$ est de classe P_n (ou C_n), il en est de même des fonctions

$$\psi(\tau)\equiv\sum_{\sigma<\tau}\varphi(\sigma)\qquad\text{et}\qquad\chi(\tau)\equiv\prod_{\sigma<\tau}\varphi(\sigma).$$

Démonstration. Définissons d'abord une fonction auxiliaire $t^{(n)}$ (pour $t\in C$), comme suit: si $t^n=0$, $t^{(n)}=0$; si $t^n=2$, $M_{t^{(n)}}=M_t\cdot\underset{s}{E}(s<r_n)$. En symboles:

$$\{u=t^{(n)}\}\equiv\prod_k\{(u^k=2)\equiv(t^k=2=t^n)\,(r_k<r_n)\}.$$

Evidemment la fonction $t^{(n)}$, pour n fixe, est continue. En outre, pour t fixe $\neq 0$, la suite $\overline{t^{(1)}}$, $\overline{t^{(2)}}$, ... parcourt tous les types ordinaux $<\bar{t}$. On a en effet

$$M_t=M_t\cdot\underset{s}{E}(s\leqslant r_n)+M_t\cdot\underset{s}{E}(s>r_n)$$

et pour $r_n\in M_t$, l'ensemble $M_t\cdot\underset{s}{E}(s\leqslant r_n)$ a le type $\overline{t^{(n)}}+1$.

De là on conclut, d'une part, que $\overline{t^{(n)}}<\bar{t}$, quel que soit n, et d'autre part, qu'à chaque $\sigma<\tau$ correspond un n tel que $\overline{t^{(n)}}=\sigma$; à savoir, l'indice n tel que $r_n\in M_t$ et que $\overline{M_t\cdot\underset{s}{E}(s\leqslant r_n)}=\sigma+1$.

Cela étant, il vient $\psi(\bar{t})\equiv(\bar{t}\neq 0)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(\overline{t^{(n)}})$.

La fonction $t^{(n)}$ étant continue, l'ensemble $\underset{t}{E}\,\varphi(\overline{t^{(n)}})$ est de la même classe que $\underset{t}{E}\,\varphi(\bar{t})$. L'addition $\sum\limits_n$ étant dénombrable, il en est encore de même de l'ensemble $\underset{t}{E}\,\psi(\bar{t})$.

La fonction ψ est donc de la même classe que φ. Il en résulte aussitôt que cette classe contient aussi la fonction χ.

3. *Types ordinaux „complexes“.* Un couple (τ,σ) de types ordinaux, c. à d. un élément de $\mathfrak{T}^2$, peut être nommé type ordinal complexe. D'une façon plus générale, nous appellerons type ordinal complexe toute suite finie ou infinie (simple) $\Delta=[\Delta^1,\Delta^2,...]$ de types ordinaux, c. à d. tout élément de $\mathfrak{T}^{\aleph_0}$.

Evidemment chaque fonction propositionnelle de plusieurs variables $\varphi(\tau_1,...,\tau_n)$ peut être considérée comme fonction propositionnelle d'une seule variable complexe $\Delta=[\Delta^1,...,\Delta^n]$. Etant donnée une suite finie ou infinie de points de l'ensemble de Cantor $\mathfrak{d}=[\mathfrak{d}^1,\mathfrak{d}^2,...]$, autrement dit, étant donné un point $\mathfrak{d}$ de l'ensemble $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times...\times\mathcal{C}$ (répété n fois) ou bien de l'ensemble $\mathcal{C}^{\aleph_0}$, convenons de désigner par $\bar{\mathfrak{d}}$ la suite $\bar{\mathfrak{d}}^1$, $\bar{\mathfrak{d}}^2$, ... (ainsi, par exemple, au nombre complexe $z=x+iy$ correspond le type ordinal complexe $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})$). Conformément à la définition proposée dans l'Introduction, un ensemble Φ de types ordinaux *complexes* sera dit de classe P_n (ou C_n) lorsque l'ensemble $\underset{\mathfrak{d}}{E}(\bar{\mathfrak{d}}\in\Phi)$ est de telle classe.

Appelons Δ^n „*n-ème coordonnée de* Δ“. *La relation* $\tau=\Delta^n$ *est analytique*. En d'autres termes, l'ensemble $\underset{t\mathfrak{d}}{E}(\bar{t}=\bar{\mathfrak{d}}^n)$ est analytique. Or, ceci est une simple conséquence de l'analycité de l'ensemble $\underset{ts}{E}(\bar{t}=\bar{s})$ et de la continuité de la fonction $s=\mathfrak{d}^n$ (la n-ième coordonnée d'un point de l'espace à un nombre fini ou infini de dimensions est une fonction continue de ce point)[1]).

[1]) Car l'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ étant analytique et la fonction $x=f(t)$ continue, l'ensemble $\underset{t}{E}\,\varphi(f(t))$ est analytique.

Pour les mêmes raisons *l'égalité* $\Delta=\Gamma$ *est analytique*. Car

$$\underset{\mathfrak{d}\mathfrak{g}}{E}(\bar{\mathfrak{d}}=\bar{\mathfrak{g}})=\prod_{n=1}^{\infty}\underset{\mathfrak{d}\mathfrak{g}}{E}(\bar{\mathfrak{d}}^{n}=\bar{\mathfrak{g}}^{n}).$$

Remarquons, en outre, que l'évaluation de la classe projective dans l'espace $\mathfrak{T}^{\aleph_0}$ s'effectue comme dans le cas considéré auparavant; en particulier, les énoncés 1)—6) du N⁰ précédent restent valables pour les variables complexes.

4. *Fonctions.* $\mu(\tau)$ étant une fonction qui fait correspondre à chaque type ordinal τ (complexe ou non) un type ordinal $\mu(\tau)$ (complexe ou non), nous dirons que *cette fonction est de classe P_n (ou C_n)* lorsqu'à cette classe appartient la relation $\sigma=\mu(\tau)$.

Pour que la fonction $\mu(\tau)$ à valeurs complexes soit de classe P_n $(n>0)$, il faut et il suffit que chacune des fonctions $\mu^1(\tau)$, $\mu^2(\tau)$, ... le soit.

Car, on a

$$[\sigma=\mu^k(\tau)]\equiv\sum_{\Delta}(\Delta^k=\sigma)\,(\Delta=\mu(\tau))$$

$$[\Delta=\mu(\tau)]\equiv\prod_{k}\sum_{\sigma}(\Delta^k=\sigma)\,(\sigma=\mu^k(\tau))$$

et la fonction Δ^k est analytique selon N⁰ 3.

Théorème. *$\mu(\tau)$ étant une fonction de classe P_n $(n>0)$ et Φ un ensemble de classe P_n (ou C_n) de types ordinaux (complexes ou non), l'ensemble $\mu^{-1}(\Phi)=\underset{\tau}{E}[\mu(\tau)\in\Phi]$ est de classe P_n (resp. C_n).*

En particulier, *étant données une fonction propositionnelle de plusieurs variables $\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ de classe P_n (ou C_n), $n>0$, et m fonctions $\mu_1(\tau),\ldots,\mu_m(\tau)$ de classe P_n, la fonction propositionnelle $\varphi[\mu_1(\tau_1),\ldots,\mu_m(\tau_m)]$ est de classe P_n (resp. C_n).*

Démonstration. On a, en effet

$$[\mu(\tau)\in\Phi]\equiv\sum_{\sigma}[\sigma=\mu(\tau)]\,(\sigma\in\Phi).$$

En supposant Φ de classe P_n, on conclut de 4) (p. 173) que l'ensemble $\underset{\tau}{E}[\mu(\tau)\in\Phi]$ est aussi de classe P_n. Si Φ est de classe C_n, le complémentaire Φ' de Φ est de classe P_n, donc $\underset{\tau}{E}[\mu(\tau)\in\Phi']$ est de classe P_n et par conséquent son complémentaire, c. à d. l'ensemble $\underset{\tau}{E}[\mu(\tau)\in\Phi]$, est de classe C_n.

En outre, en considérant la suite $[\mu_1(\tau_1),\ldots,\mu_m(\tau_m)]$ comme une fonction complexe de variable complexe: $\Gamma=\nu(\Delta)$ où $\nu^i(\Delta)=\mu_i(\Delta^i)$, $1\leqslant i\leqslant m$, la fonction $\nu(\Delta)$ est de classe P_n. En effet, $\nu^i(\Delta)$ est de classe P_n, car

$$[\sigma=\nu^i(\Delta)]\equiv\sum_{\tau}(\tau=\Delta^i)\,(\sigma=\mu_i(\tau)).$$

Il vient

$$\underset{\tau_1\ldots\tau_m}{E}\varphi[\mu_1(\tau_1),\ldots,\mu_m(\tau_m)]=\underset{\Delta}{E}\varphi[\nu(\Delta)]=\underset{\Delta}{E}\{\nu(\Delta)\in\underset{\Gamma}{E}\varphi(\Gamma)\},$$

d'où la conclusion demandée, l'ensemble $\underset{\Gamma}{E}\varphi(\Gamma)=\underset{\sigma_1\ldots\sigma_m}{E}\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ étant de classe P_n (ou C_n) par hypothèse.

Corollaires. *Si la fonction $\mu(\tau)$ est de classe P_n $(n>0)$, il en est de même des inégalités $\sigma\leqslant\mu(\tau)$ et $\sigma<\mu(\tau)$.*

La superposition de deux fonctions de classe P_n est une fonction de classe P_n.

5. *Relativisation.* Soit Ψ un ensemble de types d'ordre donné (ou, plus généralement, $\Psi\subset T^n$ ou $\Psi\subset T^{\aleph_0}$). Nous dirons qu'un sous-ensemble Φ de Ψ est *relativement* (par rapport à Ψ) de classe P_n (ou C_n) lorsque Φ est la partie commune de Ψ et d'un ensemble de classe P_n (resp. C_n).

Ainsi une fonction propositionnelle $\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_m)$ dont les variables parcourent Ψ est relativement de classe P_n (ou C_n) lorsqu'elle se laisse „prolonger" en une fonction propositionnelle $\varphi^*(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ de telle classe; plus précisément, lorsqu'on a l'équivalence

$$(1)\qquad \varphi^*(\tau_1,\ldots,\tau_m)\,(\tau_1,\ldots,\tau_m\in\Psi)\equiv\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_m).$$

Une fonction $\mu(\tau)$ (ou plus généralement $\mu(\Delta)$), sera dite relativement de classe P_n (ou C_n), lorsqu'il existe une relation $\varphi(\tau,\sigma)$ de classe P_n (resp. C_n) telle que

$$(2)\qquad \varphi(\tau,\sigma)\,(\tau\in\Psi)\equiv[\sigma=\mu(\tau)].$$

Les théorèmes du N⁰ précédent se laissent relativiser comme suit:

Pour que la fonction $\mu(\tau)$, $\tau\in\Psi$, à valeurs complexes soit de classe P_n $(n>0)$ relativement à Ψ, il faut et il suffit que chacune des fonctions $\mu^1(\tau)$, $\mu^2(\tau)$, ... le soit.

Car, on a

$$[\sigma=\mu^k(\tau)]\equiv\sum_{\Delta}(\Delta^k=\sigma)\,(\Delta=\mu(\tau))\equiv\sum_{\Delta}(\Delta^k=\sigma)\,\varphi(\tau,\Delta)\,(\tau\,\epsilon\,\Psi),$$

$$[\Delta=\mu(\tau)]\equiv\prod_k\sum_\sigma(\Delta^k=\sigma)\,(\sigma=\mu^k(\tau))\equiv\prod_k\sum_\sigma(\Delta^k=\sigma)\,\varphi_k(\tau,\sigma)\,(\tau\,\epsilon\,\Psi),$$

où $\varphi(\tau,\Delta)$ et $\varphi_k(\tau,\sigma)$ sont des fonctions propositionnelles de classe P_n telles que

$$\varphi(\tau,\Delta)\,(\tau\,\epsilon\,\Psi)\equiv[\Delta=\mu(\tau)]\quad\text{et}\quad\varphi_k(\tau,\sigma)\,(\tau\,\epsilon\,\Psi)\equiv[\sigma=\mu^k(\tau)].$$

Les fonctions propositionnelles

$$\sum_\Delta(\Delta^k=\sigma)\,\varphi(\tau,\Delta)\quad\text{et}\quad\prod_k\sum_\sigma(\Delta^k=\sigma)\,\varphi_k(\tau,\Delta)$$

étant de classe P_n, on parvient aux conclusions demandées.

Théorème. *$\mu(\tau)$ étant une fonction de classe P_n $(n>0)$ relativement à Ψ et Φ un ensemble de classe P_n (ou C_n), l'ensemble $\mu^{-1}(\Phi)$ est de classe P_n (resp. C_n) relativement à Ψ.*

La deuxième partie du th. du N⁰ 4 se relativise d'une façon analogue.

En effet, φ satisfaisant à (2), il vient

$$[\mu(\tau)\,\epsilon\,\Phi]\equiv\sum_\sigma[\sigma=\mu(\tau)]\,(\sigma\,\epsilon\,\Phi)\equiv\sum_\sigma\varphi(\tau,\sigma)\,(\tau\,\epsilon\,\Psi)\,(\sigma\,\epsilon\,\Phi),$$

d'où $\mu^{-1}(\Phi)=\Psi\cdot\underset{\tau}{E}\sum_\sigma\varphi(\tau,\sigma)\,(\sigma\,\epsilon\,\Phi)$, ce qui prouve que, lorsque la fonction μ est de classe P_n relativement à Ψ, il en est de même de l'ensemble $\mu^{-1}(\Phi)$.

Si Φ est de classe C_n, on a, en désignant par Φ' le complémentaire de Φ, $\mu^{-1}(\Phi)=\Psi-\mu^{-1}(\Phi')$, d'où la conclusion demandée.

Pour prouver la deuxième partie du théorème, il suffit de démontrer qu'en posant $\nu^i(\Delta)=\mu_i(\Delta^i)$, la fonction ν^i est de classe P_n relativement à Ψ^m. Or, on a

$$[\sigma=\nu^i(\Delta)]\equiv[\sigma=\mu_i(\Delta^i)]\,(\Delta\,\epsilon\,\Psi^m)\equiv\varphi_i(\Delta^i,\sigma)\,(\Delta\,\epsilon\,\Psi^m),$$

où $\varphi_i(\tau,\sigma)$ est de classe P_n et $\varphi_i(\tau,\sigma)\,(\tau\,\epsilon\,\Psi)\equiv[\sigma=\mu_i(\tau)]$. Selon le théor. du N⁰ 4, $\varphi_i(\Delta^i,\sigma)$ est encore de classe P_n (puisque la fonction Δ^i est analytique), d'où la conclusion demandée.

Corollaire. *La superposition de deux fonctions relativement de classe P_n est une fonction relativement de classe P_n.*

Plus précisément: nous supposons que $\nu(\sigma)$ et $\mu(\tau)$ sont définies sur l'ensemble Ψ et que $\mu(\tau)\,\epsilon\,\Psi$.

Soient φ et ψ les prolongements de μ et ν de classe P_n:

$$\varphi(\tau,\sigma)\,(\tau\,\epsilon\,\Psi)\equiv[\sigma=\mu(\tau)]$$
$$\psi(\sigma,\varrho)\,(\sigma\,\epsilon\,\Psi)\equiv[\varrho=\nu(\sigma)].$$

Il vient

$$[\varrho=\nu\mu(\tau)]\equiv\sum_\sigma[\varrho=\nu(\sigma)]\,[\sigma=\mu(\tau)]\equiv\sum_\sigma\varphi(\tau,\sigma)\,(\tau\,\epsilon\,\Psi)\,\psi(\sigma,\varrho)\,(\sigma\,\epsilon\,\Psi)\equiv$$
$$\equiv\{\sum_\sigma\varphi(\tau,\sigma)\,\psi(\sigma,\varrho)\}\,(\tau\,\epsilon\,\Psi),$$

le terme $(\sigma\,\epsilon\,\Psi)$ pouvant être omis, puisque les conditions $\varphi(\tau,\sigma)$ et $(\tau\,\epsilon\,\Psi)$ impliquent que $\sigma=\mu(\tau)\,\epsilon\,\Psi$.

6. *Notion de limite.* Appelons le type ordinal τ limite d'une suite Δ de types ordinaux $\Delta^1,\Delta^2,\ldots$ lorsqu'on a $\Delta^n\leqslant\tau$, quel que soit n, tandis qu'à chaque $\sigma<\tau$ correspond un n tel que $\sigma<\Delta^n$. En symboles: lorsque

$$\prod_n(\Delta^n\leqslant\tau)\cdot\prod_{\sigma<\tau}\sum_n(\sigma<\Delta^n),\tag{1}$$

le symbole $\lim\limits_{n=\infty}\Delta^n$ n'étant défini d'ailleurs que pour certaines suites (nommées convergentes).

Si, en particulier, la suite Δ se compose de nombres ordinaux, elle est convergente et elle converge vers un nombre ordinal; la définition de limite que nous venons de donner est alors conforme à la définition habituelle. La relation entre τ et Δ définie par (1) dans le domaine des types ordinaux arbitraires étant analytique, on en conclut que la fonction $\mu(\Delta)=\lim\limits_{n=\infty}\Delta^n$ est relativement analytique par rapport à l'ensemble des suites de nombres ordinaux.

§ 2. Nombres ordinaux.

7. *Notions „élémentaires“.* Passons, à présent, au cas le plus important où les variables τ, σ etc. parcourent l'ensemble des nombres ordinaux $<\Omega$. Nous les désignerons d'habitude par $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ et leur ensemble par Θ. Nous dirons, pour abréger, qu'une notion (ensemble, fonction, fonction propositionnelle) est *relativement de classe P_n (ou C_n)* lorsqu'elle l'est par rapport à l'ensemble des nombres ordinaux; autrement dit, l'ensemble Ψ du N⁰ 4 sera supposé identique à Θ (respectivement à Θ^n ou à $\Theta^{\aleph_0}$).

Définition. *Toute notion (ensemble, fonction, fonction propositionnelle) qui est simultanément de classe CA et relativement analytique sera dite élémentaire.*

Ainsi, par exemple, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$ est élémentaire, puisqu'il est de classe CA (ajoutons qu'il n'est pas borelien!)[1]. Comme on verra, les notions de la théorie des nombres ordinaux, habituellement considérées, sont élémentaires.

Théorème 1. *Les ensembles élémentaires (plus généralement, les fonctions propositionnelles élémentaires) constituent un corps borelien; cela veut dire que la différence, ainsi que la somme et le produit dénombrables d'ensembles élémentaires, sont des ensembles élémentaires.*

En effet, Φ étant relativement analytique par rapport à Ψ, $(=\Theta$ ou Θ^n ou $\Theta^{\aleph_0})$ il existe un ensemble analytique Ξ tel que $\Phi=\Xi\Psi$. Donc $\Psi-\Phi=\Psi-\Xi$, ce qui prouve que $\Psi-\Phi$ est de classe CA, puisque Ψ est de classe CA. En même temps, $\Psi-\Phi$ est relativement analytique, puisque le complémentaire de Φ est analytique (l'ensemble Φ étant supposé de classe CA).

La deuxième partie du théorème résulte directement de l'additivité et de la multiplicativité des classes A et CA.

On voit ainsi que *les ensembles élémentaires peuvent être définis comme sous-ensembles Φ de Ψ qui, de même que $\Psi-\Phi$, sont de classe CA.*

Le théorème du N° 5 implique directement le théorème suivant.

Théorème 2. *$\mu(\beta)$ étant une fonction relativement analytique dont les arguments et les valeurs appartiennent à Θ (ou Θ^n ou $\Theta^{\aleph_0}$) et Φ étant un ensemble élémentaire, l'ensemble $\mu^{-1}(\Phi)$ est élémentaire. En particulier, si les fonctions $\mu_1(\beta), \ldots, \mu_m(\beta)$ sont relativement analytiques et si $\varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ est une fonction propositionnelle élémentaire, il en est de même de la fonction propositionnelle $\varphi[\mu_1(\beta_1), \ldots, \mu_m(\beta_m)]$.*

On n'a qu'à tenir compte du fait que, Φ étant un ensemble relativement analytique, donc un ensemble de la forme $\Phi=\Xi\cdot\Psi$ où Ξ est analytique, il vient $\mu^{-1}(\Phi)=\mu^{-1}(\Xi)$, puisque les valeurs de la fonction μ appartiennent à Ψ par hypothèse.

Nous en déduirons plusieurs conséquences importantes en nous appuyant sur un des théorèmes fondamentaux de la théorie des nombres ordinaux, à savoir, sur la trichotomie:

$$\text{pour} \quad \alpha, \beta < \Omega \quad \text{on a} \quad \{\alpha=\beta\} \equiv \{\alpha \not< \beta \not< \alpha\}.$$

[1]) Cf. le renvoi 3, p. 169.

On a d'abord le

Corollaire 1. *L'égalité $\alpha=\beta$ est une relation élémentaire.*

Car la relation $\tau<\sigma$ étant analytique et la relation $\tau, \sigma<\Omega$ étant de classe CA, la fonction propositionnelle $(\tau \not< \sigma \not< \tau)$ $(\tau, \sigma < \Omega)$ est de classe CA. Mais celle-ci équivaut, comme nous venons de dire, à $(\tau=\sigma)(\tau, \sigma<\Omega)$. En d'autres termes, la relation $\alpha=\beta$ est de classe CA. Elle est, en outre, relativement analytique, puisque l'égalité $\tau=\sigma$ (dans le domaine des types ordinaux tout entier) est analytique (voir N° 2).

D'une façon plus générale, on a le

Corollaire 2. *Toute fonction $\mu(\beta)$ relativement analytique est élémentaire.*

En effet, substituons dans le théorème: à $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$ la relation $\gamma_1=\gamma_2$ et posons $\mu_1(\beta)=\beta$ et $\mu_2(\beta)=\mu(\beta)$. La relation $\gamma_1=\gamma_2$ étant élémentaire, la fonction propositionnelle $\varphi(\gamma_1, \mu(\gamma_2))$, qui équivaut à $[\gamma_1=\mu(\gamma_2)]$ l'est également.

Corollaires 3. *Les inégalités $\alpha \leqslant \beta$ et $\alpha<\beta$ sont des relations élémentaires.*

4. La superposition de deux fonctions élémentaires est une fonction élémentaire.

5. Les fonctions $\beta+\gamma$, $\beta\cdot\gamma$, $\beta-1$, $\lim\limits_{n=\infty} \Delta^n$ sont élémentaires.

Le corollaire 3 se déduit de l'équivalence

$$(\alpha \leqslant \beta) \equiv (\beta \not< \alpha).$$

Les corollaires 4 et 5 résultent directement du corollaire du N° 5, du cor. 2 et des théorèmes du N° 2 et 6.

8. *Définitions par induction transfinie.* La forme habituelle des définitions par induction transfinie est la suivante. Etant donnés un nombre transfinie α et une fonction $\varkappa(\xi)$ on définit une nouvelle fonction $\mu(\xi)$, $\xi<\Omega$, par les conditions:

$$1) \quad \mu(0)=\alpha \qquad 2) \quad \mu(\xi+1)=\varkappa\,\mu(\xi) \qquad 3) \quad \mu(\xi)=\lim_{\eta<\xi} \mu(\eta)$$

si ξ est un nombre limite $\neq 0$.

Cette définition i m p l i c i t e détermine en effet la fonction μ, car on démontre sans difficulté qu'il existe une et une seule fonction μ qui satisfait aux conditions 1)—3).

Pour pouvoir appliquer la méthode d'évaluation de la classe projective de la fonction μ, il faut tout d'abord transformer cette définition implicite en une définition explicite. Nous allons démontrer en effet que, pour qu'on ait $\gamma=\mu(\delta)$, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\Gamma=[\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots]$ telle qu'en désignant par $\Delta=[\Delta^1, \Delta^2, \ldots]$ une suite composée de tous les nombres $\leqslant\delta$, on ait

1⁰ $\Gamma^n=\alpha$ si $\Delta^n=0$, $\Gamma^n=\gamma$ si $\Delta^n=\delta$,

2⁰ $\Gamma^n=\varkappa(\Gamma^m)$ si $\Delta^n=\Delta^m+1$,

3⁰ si Δ^n est un nombre limite $\neq 0$, Γ^n est la limite de tous les Γ^{k_i} tels que $\Delta^{k_i}<\Delta^n$.

En symboles logiques

$$\begin{aligned}[\gamma=\mu(\delta)] \equiv \sum_{\Delta\Gamma}\{\prod_n(\Delta^n\leqslant\delta)\cdot\prod_{\beta<\delta+1}\sum_n(\beta=\Delta^n)\cdot \\ \prod_n[(\Delta^n=0)\rightarrow(\Gamma^n=\alpha)]\,[(\Delta^n=\delta)\rightarrow(\Gamma^n=\gamma)]\cdot \\ \prod_{mn}[(\Delta^n=\Delta^m+1)\rightarrow(\Gamma^n=\varkappa(\Gamma^m))] \\ \prod_n[(0\neq\Delta^n\,\epsilon\,L)\rightarrow\prod_k((\Delta^k<\Delta^n)\rightarrow(\Gamma^k\leqslant\Gamma^n))\cdot \\ \cdot\prod_{\xi<\Gamma^n}\sum_l(\xi<\Gamma^l)\,(\Delta^l<\Delta^n)]\}.\end{aligned}$$

Démonstration. Admettons que $\gamma=\mu(\delta)$. Il s'agit de définir les suites Δ et Γ de façon à satisfaire aux conditions 1⁰—3⁰. Or, soit Δ une suite arbitraire composée de tous les nombres $\leqslant\delta$. Posons $\Gamma^n=\mu(\Delta^n)$. Il résulte aussitôt des formules 1)—3) que les conditions 1⁰—3⁰ sont réalisées.

2. Admettons à présent l'existence des suites Δ et Γ assujetties aux conditions 1⁰—3⁰. Il s'agit de démontrer que $\gamma=\mu(\delta)$. Nous allons démontrer que, d'une façon plus générale, $\Gamma^n=\mu(\Delta^n)$ quel que soit n. Procédons par induction transfinie par rapport aux nombres Δ^n rangés selon leur grandeur croissante.

Si $\Delta^n=0$, les cond. 1⁰ et 1) entraînent aussitôt

$$\Gamma^n=\alpha=\mu(0)=\mu(\Delta^n).$$

Admettons que $\mu(\Delta^m)=\Gamma^m$ et que $\Delta^n=\Delta^m+1$. Il vient selon 2⁰ et 2) $\Gamma^n=\varkappa(\Gamma^m)=\varkappa\mu(\Delta^m)=\mu(\Delta^m+1)=\mu(\Delta^n)$.

Admettons enfin que Δ^n est un nombre limite $\neq 0$, que $\Delta^{k_1}, \Delta^{k_2}, \ldots$ est la suite de tous les $\Delta^{k_i}<\Delta^n$ et que $\Gamma^{k_i}=\mu(\Delta^{k_i})$. Par hypothèse (cond. 3⁰): $\Gamma^n=\lim\limits_{i=\infty}\Gamma^{k_i}$. Il vient $\Gamma^n=\lim\limits_{i=\infty}\mu(\Delta^{k_i})=\lim\limits_{\eta<\Delta^n}\mu(\eta)=\mu(\Delta^n)$ selon 3).

Ceci établi, nous en déduirons le théorème suivant

Théorème. *Etant donnée une fonction élémentaire $\varkappa(\xi)$, la fonction $\mu(\xi)$ définie par les conditions 1)—3) est aussi élémentaire.*

Soit, en effet, $\psi(\tau,\sigma)$ une fonction propositionnelle analytique telle que $\psi(\tau,\sigma)\,(\tau<\Omega)\equiv[\sigma=\varkappa(\tau)]$ et remplaçons $\gamma=\mu(\delta)$ par $\varphi(\delta,\gamma)$, $(\Delta^n=\delta)$ par $(\Delta^n\not<\delta\not<\Delta^n)$, $(\Delta^n=\Delta^m+1)$ par $(\Delta^n\not<\Delta^m+1\not<\Delta^n)$, $(\Delta^k<\Delta^n)$ par $(\Delta^n\not\leqslant\Delta^k)$ et $(\Gamma^n=\varkappa(\Gamma^m))$ par $\psi(\Gamma^m,\Gamma^n)$.

Les variables β, γ, δ etc. parcourant à présent les types ordinaux (et non les nombres ordinaux), la fonction propositionnelle $\varphi(\delta,\gamma)$ se trouve définie dans le domaine des types ordinaux et on constate facilement qu'elle est analytique.

On a, en outre, $\varphi(\delta,\gamma)\,(\delta<\Omega)\equiv[\gamma=\mu(\delta)]$. Car si l'on suppose que $\delta<\Omega$ et que Δ et Γ satisfont à la condition qui leur est imposée dans la définition de $\varphi(\delta,\gamma)$, Δ est une suite de nombres ordinaux et en reprenant la partie 2 de la démonstration précédente, on parvient à l'égalité $\gamma=\mu(\delta)$.

Le théorème précédent se généralise comme suit.

Etant données deux fonctions élémentaires $\varkappa(\xi,\eta)$ et $\lambda(\eta)$, la fonction $\mu(\xi,\eta)$ définie par les conditions suivantes est élémentaire:

$$1')\quad \mu(0,\eta)=\lambda(\eta) \qquad 2')\quad \mu(\xi+1,\eta)=\varkappa[\mu(\xi,\eta),\eta]$$

$$3')\quad \mu(\xi,\eta)=\lim_{\zeta<\xi}\mu(\zeta,\eta) \quad \textit{pour } \xi \textit{ limite } \neq 0.$$

Pour avoir une définition explicite de la relation $\gamma=\mu(\delta,\eta)$, on n'aura qu'à remplacer dans la définition explicite de la relation $\gamma=\mu(\delta)$, donnée tout-à-l'heure: α par $\lambda(\eta)$ et $\varkappa(\Gamma^m)$ par $\varkappa(\Gamma^m,\eta)$. On en conclut, comme auparavant, que la fonction $\mu(\delta,\eta)$ est élémentaire.

Voici quelques applications de l'induction transfinie:

1. $\varkappa(\xi,\eta)=\varkappa(\xi)=\xi+1$ et $\lambda(\eta)=\eta$. On voit aussitôt que, dans ce cas, $\mu(\xi,\eta)=\eta+\xi$.

2. $\varkappa(\xi,\eta)=\xi+\eta$ et $\lambda(\eta)=0$. Ici $\mu(\xi,\eta)=\eta\cdot\xi$.

3. $\varkappa(\xi,\eta)=\xi\cdot\eta$ et $\lambda(\eta)=1$. Ici $\mu(\xi,\eta)=\eta^{\xi}$.

D'après le théorème précédent, *la puissance* $\alpha=\beta^{\gamma}$ *est une opération élémentaire* (quant à l'addition et la multiplication cela a été démontrée d'une autre façon).

Le théorème implique directement (cf. N⁰ 2, 6)) le

Corollaire. *Si* $\varkappa(\xi)$ *est une fonction élémentaire, l'ensemble des points critiques de la fonction* $\mu(\xi)$, *c. à d. des* ξ *tels que* $\mu(\xi)=\xi$, *est élémentaire.*

Ainsi, par exemple, si l'on pose dans 2 et 3: $\eta=\omega$, on en conclut que les nombres critiques de la fonction $\omega\cdot\xi$ (dont le premier est ω^{ω}) ainsi que de la fonction ω^{ξ} (c. à d. les nombres „ε-iens") constituent des ensembles élémentaires.

9. *Fonctions caractéristiques.* *La fonction caractéristique d'un ensemble élémentaire est élémentaire.*

Soit, en effet, Φ un ensemble élémentaire de nombres ordinaux (complexes ou non) et $\mu(\alpha)$ sa fonction caractéristique, c. à d. que $\mu(\alpha)=1$ lorsque $\alpha\in\Phi$ et $\mu(\alpha)=0$ lorsque $\alpha\in\Theta-\Phi$.

En symboles

$$[\beta=\mu(\alpha)]\equiv[(\beta=1)\,(\alpha\in\Phi)+(\beta=0)\,(\alpha\in\Theta-\Phi)].$$

La relation $\beta=\mu(\alpha)$ étant évidemment élémentaire, il s'agit de définir une fonction propositionnelle analytique $\varphi(\tau,\sigma)$ telle que $\varphi(\tau,\sigma)\,(\tau<\Omega)\equiv[\sigma=\mu(\tau)]$. Or, soit Φ^* un ensemble analytique de types ordinaux tel que $\Phi=\Phi^*\Theta$. On vérifie facilement que la fonction propositionnelle

$$\varphi(\tau,\sigma)\equiv[(\sigma=1)\,(\tau\in\Phi^*)+(\sigma=0)\,(\tau\in\Phi)']$$

satisfait à la condition imposée.

10. *Fonction „péanienne".* Comme on sait, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les couples $\alpha,\beta<\Omega$ et l'ensemble de tous les nombres $\gamma<\Omega$. *Cette correspondance peut être réalisée à l'aide d'une fonction élémentaire.* Posons, en effet[1]),

$$\begin{cases}\mu(\alpha,\beta)=2^{\alpha}\cdot(2\beta+1) & \text{si } \alpha\geqslant\omega \text{ ou } \beta\geqslant\omega,\\ =2^{\alpha}\cdot(2\beta+1)-1 & \text{si } \alpha,\beta<\omega.\end{cases}$$

[1]) Voir W. Sierpiński, *Teorja Mnogości*, Warszawa 1928, t. I, p. 215.

En désignant par $\chi(\alpha,\beta)$ la fonction caractéristique de l'ensemble de tous les couples d'entiers positifs $(\alpha,\beta<\omega)$, il vient

$$\mu(\alpha,\beta)=\chi'(\alpha,\beta)\cdot2^{\alpha}(2\beta+1)+\chi(\alpha,\beta)\cdot[2^{\alpha}(2\beta+1)-1].$$

La puissance étant une fonction élémentaire, on conclut aussitôt des théorèmes des N⁰ 7 et 9 que *la fonction* $\mu(\alpha,\beta)$ *est élémentaire.*

La relation $\gamma=\mu(\alpha,\beta)$ définit deux fonctions élémentaires $\nu(\gamma)$ et $\varrho(\gamma)$ telles que $\gamma=\mu[\nu(\gamma),\varrho(\gamma)]$, c. à d. que la fonction complexe $[\nu(\gamma),\varrho(\gamma)]$ est inverse à la fonction $\mu(\alpha,\beta)$.

On a, en effet,

$$[\alpha=\nu(\gamma)]\equiv\sum_{\beta\leqslant\gamma}[2^{\alpha}\cdot(2\beta+1)=\gamma\geqslant\omega]+[2^{\alpha}\cdot(2\beta+1)-1=\gamma<\omega]$$

et la définition de $\beta=\varrho(\gamma)$ s'obtient de celle-ci en remplaçant $\beta\leqslant\gamma$ par $\alpha\leqslant\gamma$.

Pour démontrer que la fonction ν (ainsi que ϱ) est élémentaire, il s'agit de définir une fonction propositionnelle analytique $\psi(\gamma,\alpha)$ telle que $\psi(\gamma,\alpha)\,(\gamma<\Omega)\equiv[\alpha=\nu(\gamma)]$, les variables γ et α parcourant tous les types ordinaux).

Or, soit $\varphi(\tau,\sigma)$ une fonction propositionnelle analytique telle que $\varphi(\tau,\sigma)\,(\tau<\Omega)\equiv(\sigma=2^{\tau})$ et posons (toutes les variables étant des types ordinaux):

$$\psi(\gamma,\alpha)\equiv\sum_{\sigma,\beta\leqslant\gamma+1}\{(\alpha\leqslant\gamma)\cdot\varphi(\alpha,\sigma)\cdot[(\sigma\cdot(2\beta+1)=\gamma\geqslant\omega)+(\sigma\cdot(2\beta+1)-1=\gamma<\omega)]\}.$$

La fonction propositionnelle $\psi(\gamma,\alpha)$ est analytique.

D'autre part, elle est satisfaite en posant $\alpha=\nu(\gamma)$ pour $\gamma<\Omega$. Car $2^{\alpha}\leqslant\mu(\alpha,\beta)+1$, $\beta\leqslant\mu(\alpha,\beta)+1$ et $\alpha\leqslant\mu(\alpha,\beta)$.

Enfin, il n'existe, outre α, aucun autre α_1 qui satisfasse à la condition $\psi(\gamma,\alpha)$ pour γ fixe $<\Omega$. Car, en supposant que les variables α_1, β_1 et σ_1 satisfont aussi aux conditions qui leur sont imposées dans la définition de ψ, on conclut de l'inégalité $\alpha_1\leqslant\gamma$ que $\alpha_1<\Omega$, donc que $\varphi(\alpha_1,\sigma_1)\equiv(\sigma_1=2^{\alpha_1})$, d'où $2^{\alpha_1}\cdot(2\beta_1+1)=2^{\alpha}\cdot(2\beta+1)$, donc $\alpha=\alpha_1$ (la fonction μ étant biunivoque).

Ceci établi, on en conclut que *les fonctions* $\nu(\gamma)$ *et* $\varrho(\gamma)$ *sont élémentaires.*