Les fonctions continues et la propriété de Baire.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le théorème suivant, que je démontre à l'aide de l'hypothèse du continu, donne la solution d'un problème posé par M. Kuratowski.

Théorème. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe une fonction continue* $\psi(t)$ *d'une variable réelle et un ensemble linéaire* K *toujours de I-ère catégorie, tels que l'ensemble*

$$(1) \qquad H=\underset{t}{\mathrm{E}}[\psi(t)\,\epsilon\,K]$$

ne jouit pas de la propriété de Baire.

Démonstration. On peut, comme on sait, définir une „courbe" continue de Peano

$$(2) \qquad x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t) \qquad \text{où} \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

remplissant le carré $\mathcal{J}^2=[0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1]$ d'une manière que les nombres $\psi(0)$ et $\psi(1)$ soient rationnels et que les points (x, y) du carré $\mathcal{J}^2$ aux deux coordonnées irrationnelles soient des points *simples* (et non pas multiples) de la courbe (2), c. à d. qu'il existe un nombre réel *unique* t pour lequel $x=\varphi(t)$ et $y=\psi(t)$. Telles sont p. ex. les „courbes remplissant le carré" définies en effet par G. Peano et par M. D. Hilbert.

Posons encore $\psi(t)=\psi(0)$ pour $t<0$ et $\psi(t)=\psi(1)$ pour $t>1$. La fonction $\psi(t)$ ainsi prolongée est continue pour tout t réel.

Soient: N l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$ et Q l'ensemble plan composé de tous les points (x,y) où $x\,\epsilon\,N$ et $y\,\epsilon\,N$. La courbe (2) étant continue et bornée, on voit sans peine, que les formules (2) établissent une homéomorphie entre l'ensemble (linéaire) $\underset{t}{\mathrm{E}}[(\varphi(t),\ \psi(t))\,\epsilon\,Q]$ et l'ensemble (plan) Q.

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Comme j'ai démontré en utilisant un résultat de M. N. Lusin [1]), il existe alors un ensemble linéaire K situé sur l'axe d'ordonnées, toujours de I-ère catégorie et tel que l'ensemble plan $\underset{x,y}{\mathrm{E}}[y\,\epsilon\,K]$, donc aussi l'ensemble plan

$$(3) \qquad \underset{x,y}{\mathrm{E}}[0\leqslant x\leqslant 1,\ y\,\epsilon\,K],$$

ne jouit pas de la propriété de Baire. Nous pouvons évidemment supposer que les points de l'ensemble K ont des coordonnées qui appartiennent à N.

Ceci dit, supposons, contrairement à la thèse du théorème, que l'ensemble (1) jouisse de la propriété de Baire.

a étant un nombre réel donné, l'ensemble $F_a=\underset{t}{\mathrm{E}}[\varphi(t)=a]$ est fermé (puisque la fonction $\varphi(t)$ est continue). L'ensemble

$$\underset{t}{\mathrm{E}}[\varphi(t)=a,\ \psi(t)\,\epsilon\,K]=F_aH,$$

en tant qu'un produit de deux ensembles jouissant de la propriété de Baire, jouit également de cette propriété. Il en est encore de même de l'ensemble

$$(4) \qquad \sum_r F_r H,$$

où la sommation s'étend à tous les r rationnels, puisque la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété de Baire jouit encore de cette propriété.

Les ensembles (1) et (4) jouissant de la propriété de Baire, il en est donc de même de leur différence

$$(5) \qquad D=H-\sum_r F_rH=\underset{t}{\mathrm{E}}[\psi(t)\,\epsilon\,K]-\sum_r\underset{t}{\mathrm{E}}[\varphi(t)=r,\ \psi(t)\,\epsilon\,K]= \\ =\underset{t}{\mathrm{E}}[\varphi(t)\,\epsilon\,N,\ \psi(t)\,\epsilon\,K].$$

D'autre part, les ensembles plans

$$\underset{x,y}{\mathrm{E}}[x=a,\ y\,\epsilon\,K]$$

étant pour tout a réel toujours de I-ère catégorie (en tant que superposables avec K), il en est de même de l'ensemble (plan)

$$\sum_r \underset{x,y}{\mathrm{E}}[x=r,\ y\,\epsilon\,K],$$

[1]) *Fund. Math.* **22**, p. 54; cf. aussi mon livre *Hypothèse du continu*, Monografje Matematyczne, Warszawa-Lwów 1934, p. 71 (proposition C_{20}).

où la sommation s'étend à tous les r rationnels. Or, l'ensemble (3) ne jouissant pas de la propriété de Baire, l'ensemble plan

$$M = \underset{x,y}{\mathrm{E}}[0 \leqslant x \leqslant 1,\, y \,\epsilon\, K] - \sum_r \underset{x,y}{\mathrm{E}}[x=r,\, y \,\epsilon\, K] = \underset{x,y}{\mathrm{E}}[x \,\epsilon\, N,\, y \,\epsilon\, K] \tag{6}$$

n'en jouit non plus.

Cependant $M \subset Q$ et, comme composé uniquement de points *simples* de la courbe (2), l'ensemble plan M est homéomorphe à l'ensemble linéaire

$$\underset{t}{\mathrm{E}}[(\varphi(t), \psi(t)) \,\epsilon\, M],$$

qui, d'après (5) et (6), coïncide avec l'ensemble D. Mais D jouissant de la propriété de Baire et M n'en jouissant pas, cette homéomorphie est impossible, la propriété de Baire étant un invariant des transformations homéomorphes [1]).

Le théorème est ainsi démontré.

Soit maintenant $\theta(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble K:

$$\theta(x)=1 \quad \text{pour } x \,\epsilon\, K \qquad \text{et} \qquad \theta(x)=0 \quad \text{pour } x \text{ non } \epsilon\, K.$$

Comme K est un ensemble toujours de I-ère catégorie, la fonction $\theta(x)$ jouit évidemment de la propriété de Baire. Posons (pour x réels)

$$f(x) = \theta(\psi(x)).$$

On a évidemment, en tenant compte de (1):

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=1] = \underset{x}{\mathrm{E}}[\theta(\psi(x))=1] = \underset{x}{\mathrm{E}}[\psi(x) \,\epsilon\, K] = H. \tag{7}$$

L'ensemble H ne jouissant pas de la propriété de Baire, on conclut de (7) que la fonction $f(x)$ ne satisfait pas à la condition de Baire. Nous obtenons ainsi ce

Corollaire. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction de variable réelle qui ne satisfait pas à la condition de Baire et qui est une fonction satisfaisant à la condition de Baire d'une fonction continue* [2]).

---

[1]) voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* **4**, p. 319.

[2]) Cf. W. Sierpiński, *Annals of Mathematics* **35**, p. 278, et mon livre cité, p. 75 (proposition C_{24}).

Quant à notre théorème, il est à remarquer qu'on peut le déduire aussi de la proposition C_{23} de mon livre cité (p. 74), d'après laquelle, si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction continue $\psi(x)$ de variable réelle (d'ailleurs la même que dans notre démonstration) transformant d'une façon biunivoque un certain ensemble E dépourvu de la propriété de Baire en un ensemble K_0 qui est toujours de I-ère catégorie.

En effet, l'ensemble E, en tant que dépourvu de la propriété de Baire, est, sur un certain ensemble parfait P, partout de II-ième catégorie et l'hypothèse $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ implique l'existence d'une décomposition de E en deux ensembles disjoints, $E=E_1+E_2$, dont chacun est partout de II-ième catégorie sur P [1]). Posons

$$\psi(E_1) = K_1 \qquad \text{et} \qquad \psi(E_2) = K_2. \tag{8}$$

La fonction ψ transformant E en K_0 d'une façon biunivoque, on a (d'après $E=E_1+E_2$):

$$K_0 = K_1 + K_2 \qquad \text{et} \qquad K_1 K_2 = 0. \tag{9}$$

Selon (8) et (9) on a évidemment

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\psi(x) \,\epsilon\, K_1] \supset E_1 \qquad \text{et} \qquad \underset{x}{\mathrm{E}}[\psi(x) \text{ non } \epsilon\, K_1] \supset E_2. \tag{10}$$

Les ensembles E_1 et E_2 étant partout de II-ième catégorie sur P, les formules (10) prouvent que l'ensemble

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\psi(x) \,\epsilon\, K_1]$$

ne jouit pas de la propriété de Baire. Or, l'ensemble K_0 étant toujours de I-ère catégorie, l'ensemble K_1 l'est également.

La fonction $\psi(x)$ et l'ensemble $K=K_1$ satisfont donc aux conditions de notre théorème.

Il est enfin à remarquer qu'un théorème que j'ai démontré dans *Mathematica*, Vol. VIII, p. 191, entraîne aussitôt la conséquence suivante:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction continue $f(x)$ d'une variable réelle et un ensemble linéaire K toujours de I-ère catégorie, tels que l'ensemble $f(K)$ ne jouit pas de la propriété de Baire.

---

[1]) Cf. mon livre cité, p. 115 (proposition C_{60}).