Supposons maintenant que $m_e(E)<1$. Puisque $E\subset J$, il existerait alors, comme on sait, un G_δ, soit Q, tel que $E\subset Q\subset J$ et $m(Q)<1$. On aurait donc $Q\,\epsilon\,\Gamma$ et il existerait par conséquent un nombre ordinal $\lambda<\varphi$ tel que $Q=Q_{2\lambda}$. Or, d'après (3) on a $p_{2\lambda}\,\text{non}\,\epsilon\,Q_{2\lambda}$, ce qui est incompatible avec $E\subset Q=Q_{2\lambda}$. On a donc $m_e(E)=1$ et, comme $m_i(E)=0$ (puisque $E\,\epsilon\,\Phi_0$), l'ensemble E est non mesurable L.

Supposons enfin que l'ensemble E ne soit pas partout de II-ième catégorie dans J. Il existerait alors un F_σ, soit Q, où $E\subset Q\subset J$ et qui ne serait pas partout de II-ième catégorie dans J. En effet, E n'étant pas partout de II-ième catégorie dans J, il existe un intervalle $\delta\subset J$ tel que E est de I-e catégorie dans δ, c. à d. que $E\delta=M_1+M_2+M_3+\dots$ où $M_1, M_2, M_3, \dots$ sont des ensembles non-denses dans J; on aurait donc $E\subset(J-\delta)+\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3+\dots$ où $J-\delta$ est évidemment un F_σ et les autres sommandes sont fermés comme des fermetures des ensembles $M_1, M_2, M_3, \dots$.

En posant donc $(J-\delta)+\overline{M}_1+\overline{M}_2+\dots=Q$, on aurait $Q\,\epsilon\,\Theta$ et $E\subset Q$.

Or, $Q\,\epsilon\,\Theta$ implique l'existence d'un nombre ordinal λ, $0\leqslant\lambda<\varphi$, tel que $Q=Q_{2\lambda+1}$. D'après (3), on trouve donc $p_{2\lambda+1}\,\text{non}\,\epsilon\,Q_{2\lambda+1}$, ce qui est incompatible avec la formule $E\subset Q=Q_{2\lambda+1}$.

L'ensemble E est donc partout de II-ième catégorie dans J.

Le lemme étant ainsi établi, soit $2^{\aleph_0}=\aleph_\gamma$. Nous définirons par l'induction transfinie une suite du type $\omega_{\gamma+1}$, $\{N_\xi\}_{\xi<\omega_{\gamma+1}}$, d'ensembles de la famille Φ_0 comme il suit.

Soit N_0 un ensemble quelconque de la famille Φ_0 et $0<\alpha<\omega_{\gamma+1}$ Supposons définis tous les ensembles N_ξ (de la famille Φ_0) pour $\xi<\alpha$. Leur famille $\Phi=\{N_\xi\}_{\xi<\alpha}$ est de puissance, $\leqslant\aleph_\gamma=2^{\aleph_0}$, puisque $\alpha<\omega_{\gamma+1}$. L'application du lemme à la famille Φ donne un ensemble E que nous désignerons par N_α.

Or, on voit sans peine que les ensembles N_α, où $1<\alpha<\omega_{\gamma+1}$, forment une famille (de puissance $\aleph_{\gamma+1}>\aleph_\gamma=2^{\aleph_0}$) qui satisfait aux conditions du théorème.

Sur les suites transfinies finalement disjointes.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Etant données deux suites transfinies (aux termes quelconques) du type ordinal φ de seconde espèce, $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$, nous dirons qu'elles sont *finalement disjointes*, s'il existe un nombre ordinal $\mu<\varphi$ tel qu'on ait

$$a_\xi \neq b_\eta \qquad \text{pour} \quad \mu<\xi<\varphi \quad \text{et} \quad \mu<\eta<\varphi.$$

Théorème. $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha\geqslant\aleph_0$ *étant un nombre cardinal quelconque, il existe une famille Φ de puissance $\aleph_{\alpha+1}$ formée de suites transfinies du type ω_α de nombres ordinaux croissants $<\omega_\alpha$, finalement disjointes deux à deux.*

Démonstration. 1) $\alpha=0$. Soit

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

une suite infinie contenant chaque nombre rationnel une infinité de fois. Pour tout nombre réel x, il existe — comme on voit sans peine — une suite infinie croissante de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \dots$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} r_{n_k}=x.$$

Choissons une telle suite $S(x)$ pour tout x réel. On montre aisément que si $x\neq y$, les suites $S(x)$ et $S(y)$ n'ont qu'un nombre fini (ou nul) de termes communs; elles sont donc finalement disjointes. La famille de toutes les suites $S(x)$, pour x réels, en tant que de puissance $2^{\aleph_0}$, contient une sous-famille Φ de puissance $\aleph_1$ qui répond à la thèse du théorème.

2) $\alpha > 0$. L'ensemble de tous les systèmes (ξ, η) de deux nombres ordinaux $\xi < \omega_\alpha$ et $\eta < \omega_\alpha$ peut être, comme on sait, bien ordonné en type ω_α (c. à d. rangé en une suite transfinie du type ω_α) par la convention suivante: $(\xi_1, \eta_1) \prec (\xi_2, \eta_2)$, si $\xi_1 + \eta_1 < \xi_2 + \eta_2$ ou bien si $\xi_1 + \eta_1 = \xi_2 + \eta_2$ et $\xi_1 < \xi_2$ [1]).

Soit $g(\xi, \eta)$ le rang occupé dans cette suite par le système (ξ, η).

Désignons par F_0 la famille de toutes les suites transfinies $\{g(\xi, \alpha_\xi)\}_{\xi < \omega_\alpha}$, où $\{\alpha_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$ est une suite croissante de nombres ordinaux $< \omega_\alpha$ tels que

$$\overline{\overline{\alpha}}_\xi \leqslant \overline{\overline{\xi}} \qquad \text{pour} \quad \xi < \omega_\alpha.$$

Les suites de la famille F_0 sont croissantes, puisqu'on a d'après la définition de la fonction g

$$g(\xi, \alpha) < g(\eta, \beta) \qquad \text{pour} \quad \xi < \eta \quad \text{et} \quad \alpha < \beta.$$

Ceci dit, nous allons établir le suivant

Lemme. *F étant une sous-famille de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ de la famille F_0, il existe dans la famille F_0 une suite transfinie $\{g(\xi, \alpha_\xi)\}_{\xi < \omega_\alpha}$ qui est finalement disjointe de chacune des suites de F.*

Démonstration. Rangeons toutes les suites de la famille F en une suite transfinie (de suites) du type ω_α, en répétant une même suite plusieurs fois, si $\overline{\overline{F}} < \aleph_\alpha$. Soit

$$\{\{g(\xi, \alpha_\xi^{(\eta)})\}_{\xi < \omega_\alpha}\}_{\eta < \omega_\alpha}$$

cette suite de suites.

Nous allons définir par l'induction transfinie une suite du type ω_α, $\{\alpha_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$, de nombres ordinaux croissants $< \omega_\alpha$.

Posons $\alpha_n = n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et considérons un nombre ordinal quelconque λ tel que $\omega \leqslant \lambda < \omega_\alpha$. Supposons tous les nombres ordinaux α_ξ où $\xi < \lambda$ définis de façon qu'ils constituent une suite transfinie croissante et que l'on ait

(1) $$\overline{\overline{\alpha}}_\xi \leqslant \overline{\overline{\xi}} \qquad \text{pour} \quad \xi < \lambda$$

(ce qui est vrai pour $\lambda = \omega$, puisque $\alpha_n = n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

[1]) Voir p. ex. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 223—224.

Soit μ_λ le plus petit nombre ordinal $> \alpha_\xi$ où $\xi < \lambda$. On a évidemment $\mu_\lambda \leqslant \sum_{\xi < \lambda} \alpha_\xi + 1$, d'où, selon $\lambda \geqslant \omega$ et (1),

$$\overline{\overline{\mu}}_\lambda \leqslant \sum_{\xi < \lambda} \overline{\overline{\alpha}}_\xi \leqslant \sum_{\xi < \lambda} \overline{\overline{\xi}} \leqslant \overline{\overline{\lambda}}^2 = \overline{\overline{\lambda}},$$

donc

(2) $$\overline{\overline{\mu}}_\lambda \leqslant \overline{\overline{\lambda}}.$$

Les suites $\{g(\xi, \alpha_\xi^{(\eta)})\}_{\xi < \omega_\alpha}$ appartenant (pour $\eta < \omega_\alpha$) à la famille $F \subset F_0$, on a

$$\overline{\overline{\alpha_\xi^{(\eta)}}} \leqslant \overline{\overline{\xi}} \qquad \text{pour} \quad \xi < \omega_\alpha \quad \text{et} \quad \eta < \omega_\alpha,$$

d'où

(3) $$\overline{\overline{\alpha_\xi^{(\eta)}}} \leqslant \overline{\overline{\lambda}} \qquad \text{pour} \quad \eta < \lambda.$$

Soit E_λ l'ensemble formé de tous les nombres ordinaux $\xi < \mu_\lambda$ et de tous les nombres $\alpha_\lambda^{(\eta)}$ où $\eta < \lambda$. D'après (2), l'ensemble E_λ est évidemment de puissance $\leqslant \overline{\overline{\lambda}} + \overline{\overline{\lambda}} = \overline{\overline{\lambda}}$. Or, d'après (2) et (3), chacun des nombres de l'ensemble E_λ est de puissance $\leqslant \overline{\overline{\lambda}}$. D'autre part, l'ensemble de tous les nombres ordinaux dont la puissance est $\leqslant \overline{\overline{\lambda}}$ est comme on sait, de puissance $> \overline{\overline{\lambda}}$ (pour $\lambda \geqslant \omega$). Il en résulte qu'il existe un nombre ordinal α_λ (p. ex. le plus petit) tel que

(4) $$\overline{\overline{\alpha}}_\lambda \leqslant \overline{\overline{\lambda}}$$

et que $\alpha_\lambda \operatorname{non} \epsilon E_\lambda$. On a donc, d'après la définition de l'ensemble E_λ, $\alpha_\lambda \geqslant \mu_\lambda$, d'où

(5) $$\alpha_\lambda > \alpha_\xi \qquad \text{pour} \quad \xi < \lambda$$

et

(6) $$\alpha_\lambda \neq \alpha_\lambda^{(\eta)} \qquad \text{pour} \quad \eta < \lambda.$$

La suite transfinie des nombres ordinaux $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda < \omega_\alpha}$ est ainsi définie par l'induction et on a les formules (4), (5) et (6).

Je dis que la suite transfinie $\{g(\xi, \alpha_\xi)\}_{\xi < \omega_\alpha}$ répond aux conditions du lemme.

En effet, d'après (4) et (5), c'est une suite de la famille F_0. Or, soit $\{g(\xi, \alpha_\xi^{(\nu)})\}_{\xi < \omega_\alpha}$ une suite quelconque de la famille F (donc $\nu < \omega_\alpha$).

Soient ξ et η deux nombres ordinaux tels que

$$\nu < \xi < \omega_\alpha \quad \text{et} \quad \nu < \eta < \omega_\alpha. \tag{7}$$

Si $\xi \neq \eta$, on a évidemment, d'après la définition de la fonction g,

$$g(\xi, \alpha_\xi) \neq g(\eta, \alpha_\eta^{(\nu)}). \tag{8}$$

Si $\xi = \eta$, on a, d'après (6) (vu que $\xi > \nu$):

$$\alpha_\xi \neq \alpha_\xi^{(\nu)},$$

d'où, selon la définition de la fonction g,

$$g(\xi, \alpha_\xi) \neq g(\xi, \alpha_\xi^{(\nu)}),$$

et on obtient encore la formule (8) par substitution de η à ξ.

Les inégalités (7) entraînent donc toujours la formule (8), ce qui prouve que les suites transfinies $\{g(\xi, \alpha_\xi)\}_{\xi < \omega_\alpha}$ et $\{g(\xi, \alpha_\xi^{(\nu)})\}_{\xi < \omega_\alpha}$ sont finalement disjointes.

Le lemme étant ainsi démontré, nous allons définir par l'induction transfinie une suite du type $\omega_{\alpha+1}$, $\{S_\eta\}_{\eta < \omega_{\alpha+1}}$, de suites de la famille F_0. Posons $S_1 = \{g(\xi, \xi)\}_{\xi < \omega_\alpha}$. Soit $1 < \lambda < \omega_{\alpha+1}$, et supposons définies toutes les suites $S_\eta \in F_0$, où $\eta < \lambda$. Leur ensemble F_λ est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$, puisque $\lambda < \omega_{\alpha+1}$. L'application du lemme à la famille $F = F_\lambda$ donne une suite S_λ de la famille F_0 qui est finalement disjointe de chacune des suites de la famille F_λ, donc de chacune des suites S_η où $\eta < \lambda$.

Or, on voit sans peine que la famille Φ de toutes les suites transfinies S_λ où $\lambda < \omega_{\alpha+1}$ répond aux conditions du théorème, qui se trouve ainsi démontré.

Deux ensembles infinis sont dits *presque disjoints*, si l'ensemble de leurs éléments communs a une puissance inférieure à celle de chacun de ces ensembles. Le théorème qui vient d'être établi entraîne donc ce

Corollaire. *Tout ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ contient une famille de puissance $> \mathfrak{m}$ d'ensembles presque disjoints de puissance $\mathfrak{m}$.*

J'ai démontré ailleurs [1]) la proposition suivante:

P. *Tout ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ peut être décomposé en une classe de puissance $2^{\mathfrak{n}}$ d'ensembles presque disjoints de puissance $\mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n}$ est le plus petit nombre cardinal tel que $2^{\mathfrak{n}} > \mathfrak{m}$.*

Il est à remarquer que, même pour $\mathfrak{m} = \aleph_1$, nous ne savons pas déduire notre corollaire de la proposition ***P*** [2]). En effet, si l'hypothèse du continu n'est pas vraie, c. à d. si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, la proposition ***P*** n'exprime, pour $\mathfrak{m} = \aleph_1$, que la décomposabilité de tout ensemble de puissance $\aleph_1$ en une classe de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles presque disjoints dénombrables, tandis que, d'après le corollaire, tout ensemble de puissance $\aleph_1$ contient une famille de puissance $> \aleph_1$ d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_1$.

D'autre part, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, notre corollaire n'exprime (pour $\mathfrak{m} = \aleph_1$) que l'existence, dans tout ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, d'une famille de puissance $> 2^{\aleph_0}$ formée d'ensembles presque disjoints de puissance $2^{\aleph_0}$, tandis que, d'après la proposition ***P***, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, tout ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ peut être décomposé en une classe de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles presque disjoints de puissance $2^{\aleph_0}$ (puisque, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, le nombre $\mathfrak{n} = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ est le plus petit nombre cardinal tel que $2^{\mathfrak{n}} > \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$) [3]). Nous ne savons donc déduire la proposition ***P*** de notre colloraire.

Pour $\mathfrak{m} = \aleph_\omega$, notre corollaire exprime l'existence, dans tout ensemble de puissance $\aleph_\omega$, d'une famille de puissance $> \aleph_\omega$ formée d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_\omega$ et, d'après un théorème de M. Tarski [4]), tout ensemble de puissance $\aleph_\omega$ peut être décomposé en une classe de puissance $\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ d'ensembles presque disjoints dénombrables. Or, d'après un autre théorème de M. Tarski [5]), il résulte de l'hypothèse de Cantor sur les alephs qu'il n'existe aucune décomposition d'un ensemble de puissance $\aleph_\omega$ en sous-ensembles presque disjoints de puissance autre que $\aleph_0$ et $\aleph_\omega$.

---

1) *Monatshefte f. Math. u. Phys.* **35** (1928), p. 239—241; cf. A. Tarski, *Fund. Math.* **12**, p. 191 (Théorème 7).

2) Cette remarque est due à M. Tarski.

3) Deux ensembles bien ordonnés du type Ω et presque disjoints étant finalement disjoints, *l'hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ entraîne l'existence d'une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ formée de suites transfinies du type Ω de nombres ordinaux croissants $< \Omega$, deux à deux finalement disjointes.*

4) *Fund. Math.* **12**, p. 191, Th. 7 (pour $\mathfrak{m} = \mathfrak{q} = \aleph_\omega$, $\mathfrak{p} = \aleph_0$).

5) *Fund. Math.* **14**, p. 211, Th. 5 (pour $\alpha = \omega$, $\beta = 1, 2, 3, \ldots$).