12. ***Théorème 8.*** *Si une fonction continue φ_0 transforme un sous-ensemble fermé A d'un espace compact M tel que* $\dim(M - A) \leqslant n$ *en sous-ensemble d'un espace N séparable et localement connexe en dimensions $\leqslant 2n$, alors l'ensemble $N^M(A, \varphi_0)$ est localement connexe en dimensions $\leqslant n$.*

Démonstration. Soit f une fonction continue transformant S_k (où $k \leqslant n$) en un sous-ensemble de $N^M(A, \varphi_0)$. A chaque $y \in S_k$ correspond alors, comme valeur de $f(y)$, un prolongement $\varphi_y \in N^M$ de la fonction φ_0. En tenant compte de la continuité de f, on obtiendra donc une fonction continue transformant le sous-ensemble fermé $E = M \times S_k + A \times H_{k+1}$ de l'espace $M \times H_{k+1}$ en un sous-ensemble de N, si l'on pose:

$$\psi(x, y) = \varphi_y(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in M \quad \text{et} \quad y \in S_k,$$
$$\psi(x, y) = \varphi_0(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in A \quad \text{et} \quad y = H_{k+1}.$$

Soit maintenant φ_0^* une fonction appartenant à $N^M(A, \varphi_0)$. En posant

$$\psi_0(x, y) = \varphi_0^*(x) \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in E,$$

on obtient une fonction $\psi_0 \in N^E$. La fonction

$$\psi_0^*(x, y) = \varphi_0^*(x) \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in M \times H_{k+1}$$

constitue un prolongement de ψ_0 sur l'espace $M \times H_{k+1}$ tout entier. Or, dans le cas où les valeurs de la fonction f sont situées dans un entourage suffisamment petit de φ_0^*, la fonction ψ diffère de ψ_0 aussi peu que l'on veut. Il en résulte, d'après le lemme du Nr. **11**, l'existence d'un prolongement $\psi^* \in N^{M \times H_{k+1}}$ de ψ dont la distance de ψ_0 est plus petite qu'un nombre positif donné d'avance, c. q. f. d.

Sur une décomposition du segment en plus que $2^{\aleph_0}$ ensembles non mesurables et presque disjoints.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer à l'aide du théorème de M. Zermelo ce

Théorème. *Il existe une famille de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles non mesurables situés dans l'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$, deux à deux presque disjoints* [1]*), de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J.*

La démonstration que j'en vais donner ici ne fait pas l'usage de l'hypothèse du continu. Or, si l'on admet cette hypothèse, le théorème devient une conséquence immédiate d'une proposition que j'ai démontrée antérieurement [2]).

Démonstration. Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$. Il résulte du théorème de M. Zermelo l'existence d'une suite transfinie du type φ

$$(1) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

formée de tous les nombres de l'intervalle J.

---

[1]) Deux ensembles A et B sont dits *presque disjoints*, si l'ensemble $A \cdot B$ de leurs éléments communs est de puissance inférieure à celle de A et de B.

[2]) Fund. Math. t. XIII (1929), p. 195—200. C'est la proposition suivante: *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition de l'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles qui sont de mesure extérieure* 1*, de II-ième catégorie dans tout sous-intervalle de J et qui n'ont deux à deux qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs* (cf. aussi mon livre „*Hypothèse du continu*", Monografje Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934, p. 127).

La famille Γ de tous les G_δ de mesure <1 situés dans J étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie du type φ, $\{Q_{2\xi}\}_{\xi<\varphi}$, formée de tous les ensembles de la famille Γ. Pareillement, la famille Θ de tous les F_σ situés dans J et qui ne sont pas partout de II-ième catégorie dans J étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie du type φ, $\{Q_{2\xi+1}\}_{0\leqslant\xi<\varphi}$, formée de tous les ensembles de la famille Θ.

Comme on sait[1]), le théorème de M. Zermelo implique aussi l'existence d'une famille F de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles disjoints situés dans l'intervalle J et dont chacun admet au moins un point commun (donc $2^{\aleph_0}$ points communs) avec tout ensemble parfait (non vide) situé dans J (et par conséquent est lui-même de puissance $2^{\aleph_0}$). Il existe donc une suite transfinie du type φ, $\{E_\xi\}_{\xi<\varphi}$, formée de tous les ensembles de la famille F.

Je dis que l'on a

$$\overline{\overline{E_\alpha - Q_\alpha}} = 2^{\aleph_0} \qquad \text{pour} \quad \alpha<\varphi. \tag{2}$$

En effet, si $\alpha=2\xi$, on a $m(Q_\alpha)<1$ et il existe un ensemble parfait P tel que $P\subset J-Q_\alpha$. Or, comme $E_\alpha \in F$, on a $\overline{\overline{E_\alpha P}}=2^{\aleph_0}$. D'autre part, comme $P\subset J-Q_\alpha$ et $E_\alpha\subset J$, on trouve $E_\alpha P\subset E_\alpha(J-Q_\alpha)=E_\alpha-Q_\alpha$. L'ensemble $E_\alpha-Q_\alpha$ contient donc un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, d'où la formule (2).

De même si $\alpha=2\xi+1$, l'ensemble Q_α n'est pas partout de II-ième catégorie dans J; il existe donc dans J un intervalle δ dans lequel Q_α est de I-e catégorie. Par conséquent, $\delta-Q_\alpha$ contient un sous-ensemble parfait P. On a donc $P\subset J-Q_\alpha$, d'où l'on déduit, comme plus haut, la formule (2).

Désignons maintenant par Φ_0 la famille de tous les ensembles $E\subset J$ tels que

$$\overline{\overline{EE_\alpha}}=1 \qquad \text{pour} \quad \alpha<\varphi.$$

Chaque ensemble de la famille Φ_0 est évidemment de puissance $2^{\aleph_0}$ (puisque les ensembles E_α où $\alpha<\varphi$ sont disjoints) et ne contient aucun sous-ensemble parfait (puisque $\overline{\overline{EE_1}}=1$ et E_1 admet $2^{\aleph_0}$ points communs avec tout sous-ensemble parfait de J); il est par conséquent de mesure intérieure nulle.

[1]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur une décomposition du continu en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables*, C. R. Paris t. 165; cf. aussi W. Sierpiński, Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 150—151.

Ceci établi, nous allons démontrer le suivant

Lemme. *Si $\Phi\subset\Phi_0$ et $\overline{\overline{\Phi}}\leqslant 2^{\aleph_0}$, il existe dans la famille Φ_0 un ensemble E presque disjoint avec tout ensemble de Φ, de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J.*

Démonstration. Comme $\overline{\overline{\Phi}}\leqslant 2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie du type φ, $\{H_\xi\}_{\xi<\varphi}$, formée de tous les ensembles de la famille Φ (répétés au besoin $2^{\aleph_0}$ fois, si $\overline{\overline{\Phi}}<2^{\aleph_0}$).

Nous définirons l'ensemble $E=\{p_\xi\}_{\xi<\varphi}$ par l'induction transfinie comme il suit.

Soit p_1 le premier terme de la suite (1) qui appartient à l'ensemble E_1. Etant donné un nombre ordinal α, où $1<\alpha<\varphi$, supposons définis tous les points p_ξ, où $\xi<\alpha$. Les ensembles H_ξ ($\xi<\varphi$) appartenant à la famille Φ_0, on a

$$\overline{\overline{H_\xi E_\alpha}}=1 \qquad \text{pour} \quad \xi<\varphi,$$

donc (d'après $\alpha<\varphi$)

$$\overline{\overline{\sum_{\xi<\alpha} H_\xi\cdot E_\alpha}}<2^{\aleph_0},$$

ce qui donne d'après (2)

$$E_\alpha-(Q_\alpha+\sum_{\xi<\alpha}H_\xi)\neq 0.$$

Soit donc p_α le premier terme de la suite (1) tel que

$$p_\alpha \in E_\alpha-(Q_\alpha+\sum_{\xi<\alpha}H_\xi). \tag{3}$$

Je dis que l'ensemble $E=\{p_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ satisfait à la thèse du lemme.

En effet, comme $p_1\in E_1$, on a d'après (3) $p_\alpha\in E_\alpha\subset J$ pour $\alpha<\varphi$, d'où, les ensembles E_α ($\alpha<\varphi$) étant disjoints, $E\subset J$ et $\overline{\overline{EE_\alpha}}=1$ pour $\alpha<\varphi$, ce qui prouve que l'ensemble E appartient à la famille Φ_0.

Soit H un ensemble de la famille Φ: il existe donc un nombre ordinal $\mu<\varphi$, tel que $H=H_\mu$. D'après (3), on a $p_\alpha \operatorname{non}\in H_\mu$ pour $\alpha>\mu$, de sorte que la formule $p_\alpha\in H_\mu$ ne peut se présenter que, peut être, pour les nombres ordinaux $\alpha<\mu$ dont l'ensemble est de puissance $\leqslant\overline{\overline{\mu}}<2^{\aleph_0}$ (puisque $\mu<\varphi$). On a donc $\overline{\overline{EH_\mu}}<2^{\aleph_0}$, ce qui prouve (vu que $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{H_\mu}}=2^{\aleph_0}$) que les ensembles E et H_μ sont presque disjoints.

Supposons maintenant que $m_e(E)<1$. Puisque $E\subset J$, il existerait alors, comme on sait, un G_δ, soit Q, tel que $E\subset Q\subset J$ et $m(Q)<1$. On aurait donc $Q\,\epsilon\,\Gamma$ et il existerait par conséquent un nombre ordinal $\lambda<\varphi$ tel que $Q=Q_{2\lambda}$. Or, d'après (3) on a $p_{2\lambda}\,\text{non}\,\epsilon\,Q_{2\lambda}$, ce qui est incompatible avec $E\subset Q=Q_{2\lambda}$. On a donc $m_e(E)=1$ et, comme $m_i(E)=0$ (puisque $E\,\epsilon\,\Phi_0$), l'ensemble E est non mesurable L.

Supposons enfin que l'ensemble E ne soit pas partout de II-ième catégorie dans J. Il existerait alors un F_σ, soit Q, où $E\subset Q\subset J$ et qui ne serait pas partout de II-ième catégorie dans J. En effet, E n'étant pas partout de II-ième catégorie dans J, il existe un intervalle $\delta\subset J$ tel que E est de I-e catégorie dans δ, c. à d. que $E\delta=M_1+M_2+M_3+\dots$ où $M_1, M_2, M_3, \dots$ sont des ensembles non-denses dans J; on aurait donc $E\subset(J-\delta)+\overline{M}_1+\overline{M}_2+\overline{M}_3+\dots$ où $J-\delta$ est évidemment un F_σ et les autres sommandes sont fermés comme des fermetures des ensembles $M_1, M_2, M_3, \dots$.

En posant donc $(J-\delta)+\overline{M}_1+\overline{M}_2+\dots=Q$, on aurait $Q\,\epsilon\,\Theta$ et $E\subset Q$.

Or, $Q\,\epsilon\,\Theta$ implique l'existence d'un nombre ordinal λ, $0\leqslant\lambda<\varphi$, tel que $Q=Q_{2\lambda+1}$. D'après (3), on trouve donc $p_{2\lambda+1}\,\text{non}\,\epsilon\,Q_{2\lambda+1}$, ce qui est incompatible avec la formule $E\subset Q=Q_{2\lambda+1}$.

L'ensemble E est donc partout de II-ième catégorie dans J.

Le lemme étant ainsi établi, soit $2^{\aleph_0}=\aleph_\gamma$. Nous définirons par l'induction transfinie une suite du type $\omega_{\gamma+1}$, $\{N_\xi\}_{\xi<\omega_{\gamma+1}}$, d'ensembles de la famille Φ_0 comme il suit.

Soit N_0 un ensemble quelconque de la famille Φ_0 et $0<\alpha<\omega_{\gamma+1}$ Supposons définis tous les ensembles N_ξ (de la famille Φ_0) pour $\xi<\alpha$. Leur famille $\Phi=\{N_\xi\}_{\xi<\alpha}$ est de puissance, $\leqslant\aleph_\gamma=2^{\aleph_0}$, puisque $\alpha<\omega_{\gamma+1}$. L'application du lemme à la famille Φ donne un ensemble E que nous désignerons par N_α.

Or, on voit sans peine que les ensembles N_α, où $1<\alpha<\omega_{\gamma+1}$, forment une famille (de puissance $\aleph_{\gamma+1}>\aleph_\gamma=2^{\aleph_0}$) qui satisfait aux conditions du théorème.

Sur les suites transfinies finalement disjointes.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Etant données deux suites transfinies (aux termes quelconques) du type ordinal φ de seconde espèce, $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$, nous dirons qu'elles sont *finalement disjointes*, s'il existe un nombre ordinal $\mu<\varphi$ tel qu'on ait

$$a_\xi\neq b_\eta \qquad \text{pour} \quad \mu<\xi<\varphi \quad \text{et} \quad \mu<\eta<\varphi.$$

Théorème. $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha\geqslant\aleph_0$ *étant un nombre cardinal quelconque, il existe une famille* Φ *de puissance* $\aleph_{\alpha+1}$ *formée de suites transfinies du type* ω_α *de nombres ordinaux croissants* $<\omega_\alpha$, *finalement disjointes deux à deux.*

Démonstration. 1) $\alpha=0$. Soit

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

une suite infinie contenant chaque nombre rationnel une infinité de fois. Pour tout nombre réel x, il existe — comme on voit sans peine — une suite infinie croissante de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \dots$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} r_{n_k}=x.$$

Choissons une telle suite $S(x)$ pour tout x réel. On montre aisément que si $x\neq y$, les suites $S(x)$ et $S(y)$ n'ont qu'un nombre fini (ou nul) de termes communs; elles sont donc finalement disjointes. La famille de toutes les suites $S(x)$, pour x réels, en tant que de puissance $2^{\aleph_0}$, contient une sous-famille Φ de puissance $\aleph_1$ qui répond à la thèse du théorème.