10. *Corollaire.* *L'espace compact N jouissant de la propriété (Δ), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que chaque ensemble $A \subset M$ de diamètre $< \eta$ se laisse contracter dans un sous-ensemble de N de dimension $\leqslant \dim A + 1$ et de diamètre $< \varepsilon$.*

Démonstration. N étant localement contractile, il existe un $\eta > 0$ tel que chaque sous-ensemble A de M de diamètre $< \eta$ se laisse contracter dans un sous-ensemble de N de diamètre $< \varepsilon$. Cela veut dire qu'il existe une fonction continue $\varphi(x, t)$ définie dans le produit (cartésien) $A \times \langle 0, 1 \rangle$, telle que $\varphi(x, 0) = x$ et $\varphi(x, 1) = \text{const.}$ pour tout $x \in A$ et dont les valeurs constituent un sous-ensemble de N de diamètre $< \varepsilon$. L'ensemble $A \times (0) + A \times (1)$ étant fermé dans $A \times \langle 0, 1 \rangle$, le théorème du N° **9** entraîne l'existence d'une fonction continue $\varphi'(x, t)$ qui transforme $A \times \langle 0, 1 \rangle$ en un sous-ensemble de N de diamètre $< \varepsilon$ et satisfait aux conditions:

$$\varphi'(x, 0) = x, \qquad \varphi'(x, 1) = \text{const.} \qquad \text{pour tout} \quad x \in A,$$

$$\dim \varphi'[A \times \langle 0, 1 \rangle - A \times (0) - A \times (1)] \leqslant \dim [A \times \langle 0, 1 \rangle] \leqslant \dim A + 1.$$

L'ensemble $\varphi'[A \times (0) + A \times (1)]$ étant fermé dans $\varphi'[A \times \langle 0, 1 \rangle]$, il en résulte (d'après le „*Summensatz*" de la théorie des dimensions) que $\dim [\varphi'(A \times \langle 0, 1 \rangle)] \leqslant \dim A + 1$, ce qui achève la démonstration.

Sur les prolongements des transformations continues.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Les récherches topologiques conduisent souvent aux problèmes de la forme suivante:

Trouver des conditions pour qu'une fonction continue φ transformant un sous-ensemble fermé A d'un espace donné M en sous-ensemble d'un autre espace donné N admette un prolongement continu sur l'espace M tout entier.

L'opération de prolongement étant en général non-univoque, la question se pose de choisir parmi les prolongements possibles de φ un seul, φ^*, qui dépende d'une manière continue de φ *parcourant une famille donnée de fonctions.*

Les résultats exposés ici se rattachent à ces questions.

1. Notations. Tous les espaces considérés sont supposés métriques.

$\varrho(x, y)$ désigne la distance entre x et y.

$\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \varrho(x, y)$.

$\langle \alpha, \beta \rangle$ désigne l'ensemble des nombres réels t assujettis à l'inégalité $\alpha \leqq t \leqq \beta$.

H_n désigne la sphère euclidienne à n dimensions et S_{n-1} sa surface. Nous admettons en particulier que H_1 coïncide avec l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$; l'ensemble S_0 ne contient alors que les nombres 0 et 1.

N^M désigne la classe de toutes les transformations continues de l'espace M en sous-ensembles de l'espace N. Dans le cas où l'espace M ou N est compact, on considère N^M comme un espace, en posant pour $\varphi_1, \varphi_2 \in N^M$

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x \in M} \varrho[\varphi_1(x), \varphi_2(x)].$$

φ étant une transformation d'un sous-ensemble A de M en un sous-ensemble de N, $N^M(A, \varphi)$ désignera le sous-ensemble de N^M composé de tous les prolongements de φ.

2. *Lemme.* *A étant un sous-ensemble fermé d'un espace M, il existe une opération univoque qui fait correspondre à toute fonction $\varphi \in \langle\alpha, \beta\rangle^A$ un prolongement $\varphi^* \in \langle\alpha, \beta\rangle^M$ de manière que:*

(1) $\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \varrho(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$, *quels que soient* $\varphi_1, \varphi_2 \in \langle\alpha, \beta\rangle^A$,

(2) *à une certaine fonction $\varphi_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle^A$ corresponde comme φ_0^* un prolongement donné d'avance.*

D é m o n s t r a t i o n. Sans restreindre la généralité, on peut admettre évidemment que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

Soient a et $b \geqslant a$ deux nombres réels. Posons:

$$r_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \leqslant a, \\ \dfrac{b-t}{b-a} & \text{pour } a < t \leqslant b, \\ 0 & \text{pour } t > b. \end{cases}$$

Posons en outre, pour tout $p \in M$, $x \in A$ et $\varphi \in \langle 0, 1\rangle^A$,

$$\varphi_p(x) = r_{\varrho(p, A), 2\varrho(p, A)}[\varrho(p, x)] \cdot \varphi(x).$$

On constate facilement que la fonction $\varphi_p(x)$ ainsi définie satisfait aux conditions:

(3) $$0 \leqslant \varphi_p(x) \leqslant 1,$$

(4) $|\varphi_p(x) - \varphi_p'(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi'(x)|$, quels que soient $\varphi, \varphi' \in \langle 0, 1\rangle^A$,

(5) $p_n \to p \in M - A$ entraîne la convergence uniforme des fonctions $\varphi_{p_n}(x)$ vers la fonction $\varphi_p(x)$.

(6) $p_n \to p \in A$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty} [\sup\limits_{x \in A} \varphi_{p_n}(x)] = \varphi_p(p) = \varphi(p)$.

Les conditions (3), (5) et (6) impliquent que la fonction

$$\overline{\varphi}(p) = \sup_{x \in A} \varphi_p(x)$$

est continue dans l'espace M tout entier et que ses valeurs appartiennent à l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$. Elle constitue en outre, d'après (6), un prolongement de la fonction φ. Enfin, on conclut de (4) que

(7) $\varrho(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}') \leqslant \varrho(\varphi, \varphi')$, quels que soient $\varphi, \varphi' \in \langle 0, 1\rangle^A$.

Soit maintenant φ_0^* un prolongement donné d'avance d'une certaine fonction $\varphi_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle^A$. En posant

(8) $\varphi^*(p) = r_{0,1}[\overline{\varphi}(p) + \varphi_0(p) - \overline{\varphi}_0(p)]$ pour $\varphi \in \langle 0, 1\rangle^A$ et $p \in M$,

on obtient une opération qui fait correspondre à toute fonction $\varphi \in \langle 0, 1\rangle^A$ une fonction $\varphi^* \in \langle 0, 1\rangle^M$. Or, φ^* est un prolongement de φ, car, pour tout $p \in A$, on a $\varphi^*(p) = r_{0,1}[\varphi(p)] = \varphi(p)$. De plus, la fonction $r_{0,1}$ satisfaisant à l'inégalité $|r_{0,1}(t) - r_{0,1}(t')| \leqslant |t - t'|$ pour toutes les valeurs de t et t', on conclut que

(9) $\varrho(\varphi^*, \varphi'^*) \leqslant \varrho(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}')$, quels que soient $\varphi, \varphi' \in \langle 0, 1\rangle^A$.

La fonction φ^* étant un prolongement de φ, (7) et (9) entraînent l'égalité (1) et la formule (8) réalise la condition (2).

3. Le lemme qui précède permet d'établir deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *A étant un sous-ensemble fermé d'un espace métrique M et N un rétracte absolu* [1]*), il existe une opération univoque et continue qui fait correspondre à toute fonction $\varphi \in N^A$ un prolongement $\varphi^* \in N^M$ de manière qu'à une certaine fonction $\varphi_0 \in N^A$ vienne correspondre comme φ_0^* un prolongement de φ_0 donné d'avance.*

Théorème 2. *A étant un sous-ensemble fermé d'un espace métrique M et N rétracte absolu de voisinage* [1]*), il existe un nombre positif ε (ne dépendant que de N) et une opération univoque et continue qui fait correspondre à toute fonction $\varphi \in N^A$ asujettie à l'inégalité $\varrho(\varphi, \varphi_0) < \varepsilon$ un de ses prolongements $\varphi^* \in N^M$ de manière qu'à une certaine fonction $\varphi_0 \in N^A$ vienne correspondre comme φ_0^* un prolongement de φ_0 donné d'avance.*

[1]) Un sous-ensemble E d'un espace M s'appelle *rétracte de M*, lorsqu'il existe une fonction $f \in E^M$ telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in E$. E s'appelle respectivement *rétracte absolu* et *rétracte absolu de voisinage*, suivant que, pour tout espace $M \supset E$, l'ensemble E est un rétracte de M ou un rétracte d'un certain entourage de E dans M.

4. ***Démonstration des théorèmes 1 et 2.*** On peut admettre que N est un sous-ensemble du „cube fondamental" Q_ω [2]) de l'espace de Hilbert. Toute fonction $\varphi \epsilon N^A \subset Q_\omega^A$ est alors de la forme $\varphi(x)=\{\varphi_n(x)\}$ où $\varphi_n \epsilon \langle 0, 1/n\rangle^A$. D'après le lemme du N° **2**, on peut faire correspondre à toute fonction $\psi \epsilon \langle 0, 1/n\rangle^A$ un de ses prolongements $\psi^{(*,n)} \epsilon \langle 0, 1/n\rangle^M$ de manière que:

(10) $\varrho(\psi_1, \psi_2)=\varrho(\psi_1^{(*,n)}, \psi_2^{(*,n)})$, quels que soient $\psi_1, \psi_2 \epsilon \langle 0, 1/n\rangle^A$,

(11) pour une certaine fonction $\varphi_{n,0} \epsilon \langle 0, 1/n\rangle^A$, $\varphi_{n,0}^{(*,n)}$ soit un prolongement de $\varphi_{n,0}$ donné d'avance.

En posant maintenant

$$\overline{\varphi}(x)=\{\varphi^{(*,0)}(x)\} \qquad \text{pour tout} \qquad x \epsilon M,$$

on obtient un prolongement $\overline{\varphi} \epsilon Q_\omega^M$ de la fonction $\varphi \epsilon Q_\omega^A$, défini d'une manière univoque. En outre, il résulte de (11) que le prolongement de la fonction $\varphi_0=\{\varphi_{n,0}\}$ ainsi obtenu est bien de la forme donnée d'avance $\varphi_0^*=\{\varphi_{n,0}^{(*,n)}\} \epsilon N^M$. Enfin, (10) implique que

(12) $\varrho(\varphi, \varphi')=\varrho(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}')$, quels que soient $\varphi, \varphi' \epsilon N^A$.

Pour démontrer le théorème 1, admettons maintenant que N est un rétracte absolu. Il existe alors une fonction $r(y)$ rétractant Q_ω en N. On constate facilement qu'en posant

$$\varphi^*(x)=r[\overline{\varphi}(x)]$$

pour tout $x \epsilon M$ et $\varphi \epsilon M^A$, on obtient une opération de prolongement satisfaisant à la thèse du théorème 1.

Pour démontrer le théorème 2, admettons que N est un rétracte absolu de voisinage. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ et une fonction $r(y)$ rétractant l'ensemble $U=\underset{y}{\mathrm{E}}[y \epsilon Q_\omega; \varrho(y, N) < \varepsilon]$ en N. Le prolongement $\overline{\varphi}_0$ de φ_0 étant par définition $\varphi_0^* \epsilon N^M$, on conclut de (12) que, pour toute fonction $\varphi \epsilon N^A$ telle que $\varrho(\varphi, \varphi_0) < \varepsilon$, les valeurs de la fonction $\overline{\varphi}$ appartiennent à U. On obtiendra par conséquent une opération de prolongement bien définie dans le domaine des fonctions $\varphi \epsilon N^A$ pour lesquelles $\varrho(\varphi, \varphi_0) < \varepsilon$, lorsqu'on posera

$$\varphi^*(x)=r\,\overline{\varphi}(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x \epsilon M.$$

Comme la fonction $r(x)$ rétracte U en N et l'opération $\overline{\varphi}$ est continue, l'opération de prolongement ainsi définie satisfait à la thèse du théorème 2.

[2]) Q_ω désigne le sous-ensemble compact de l'espace de Hilbert, à savoir composé de points $\{x_i\}$ où $0 \leqslant x_i \leqslant 1/i$ pour tout $i=1, 2 \ldots$ D'après le théorème connu d'Urysohn, chaque espace séparable (et par conséquent, chaque espace compact) est topologiquement contenu dans Q_ω.

5. Le théorème 2 entraîne le corollaire suivant:

Corollaire. *N étant un rétracte absolu de voisinage et $\{\varphi_t\}$ une famille (dépendant d'une manière continue du paramètre $t \epsilon \langle 0, 1\rangle$) de fonctions transformant un sous-ensemble fermé A d'un espace M en sous-ensembles de N, on peut faire correspondre d'une manière continue à tout t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ un prolongement $\varphi_t^* \epsilon N^M$ tel qu'en particulier la fonction φ_0 obtienne comme $\varphi_0^* \epsilon N^M$ un de ses prolongements, donné en avance.*

6. ***Théorème 3.*** *A étant un sous-ensemble fermé d'un espace M et N un rétracte absolu de voisinage, l'espace $N^M(A, \varphi_0)$ est localement contractile* [3]) *pour tout $\varphi_0 \epsilon N^A$.*

D é m o n s t r a t i o n. On peut admettre que N est un sous-ensemble de Q_ω. Il existe alors une fonction $r(x)$ rétractant un certain entourage U de N (entourage dans l'espace Q_ω) en N et on a l'inclusion

$$N^M(A, \varphi_0) \subset U^M(A, \varphi_0) \subset Q_\omega^M(A, \varphi_0),$$

[3]) *L'ensemble E se laisse contracter dans un ensemble B en un point p*, lorsqu'il existe une fonction continue $f(x, t)$ transformant le produit cartésien $A \times \langle 0,1\rangle$ en un sous-ensemble de B, telle que $f(x, 0)=x$ et $f(x, 1)=p$ pour tout $x \epsilon B$. L'espace N est *localement contractile au point* $p \epsilon M$, lorsque tout entourage U de p contient un entourage U_0 de p qui se laisse contracter dans U en p. L'espace E est dit *localement contractile* tout court, lorsqu'il l'est en chacun de ses points. Les rétractes absolus de voisinage sont caractérisés parmi les espaces compacts de dimension finie par leur contractilité locale. La contractilité en soi caractérise les rétractes absolus parmi ceux de voisinage.

où $U^M(A,\varphi_0)$ constitue un entourage de $N^M(A,\varphi_0)$ dans l'espace $Q_\omega^M(A,\varphi_0)$. En faisant correspondre à toute fonction $\psi\epsilon U^M(A,\varphi_0)$ la fonction $r\psi\epsilon N^M(A,\varphi_0)$, on obtient une rétraction de $U^M(A,\varphi_0)$ en $N^M(A,\varphi_0)$. En tenant compte de l'invariance de la contractilité locale par rapport aux rétractions, on en conclut qu'il ne reste à établir que la contractilité locale de l'espace $Q_\omega^M(A,\varphi_0)$.

D'après la définition de Q_ω, toute fonction $\psi\epsilon Q_\omega^M(A,\varphi_0)$ est de la forme $\psi=\{\psi_n\}$ où $\psi_n\epsilon\langle 0,1/n\rangle^M$. Afin de montrer que $Q_\omega^M(A,\varphi_0)$ est localement contractile au point $\psi_0=\{\psi_{0,n}\}$, remarquons qu'en posant

$\psi^{(t)}=\{\psi_{0,n}+t(\psi_n-\psi_{0,n})\}$, quels que soient $\{\psi_n\}\epsilon Q_\omega^M(A,\varphi_0)$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$,

on obtient une contraction [3]) de l'espace $Q_\omega^M(A,\varphi_0)$ dans lui-même en le point ψ_0, qui reste immobile pendant cette contraction. L'entourage suffisamment petit de ψ_0 est donc contracté par $\psi^{(t)}$ en ψ_0 dans un entourage arbitrairement petit de ψ_0, c. q. d. f.

7. Le théorème que nous allons démontrer à présent peut être considérer comme réciproque des théorèmes 1 et 2.

Théorème 4. *Si pour toute fonction φ_0 transformant S_0 en sous-ensemble d'un espace donné N et susceptible d'un prolongement $\varphi_0^*\epsilon N^{H_1}$ il existe une opération continue qui fait correspondre à toute fonction $\varphi\epsilon N^{S_0}$ appartenant à un certain entourage de φ_0 un prolongement $\varphi^*\epsilon N^{H_1}$ (coïncidant avec φ_0^* pour φ_0), alors l'espace N est localement contractile.*

Dans le cas, où cette opération de prolongement se laisse définir dans l'ensemble N^{S_0} tout entier, l'espace N est contractile en soi.

D é m o n s t r a t i o n. D'après nos hypothèses, il existe une opération continue qui fait correspondre à toute fonction $\varphi\epsilon N^{S_0}$ satisfaisant à l'inégalité $\varrho(\varphi,\varphi_0)<\varepsilon$ (resp. à toute fonction $\varphi\epsilon N^{S_0}$) un prolongement $\varphi^*\epsilon N^{H_1}$ de façon que, en particulier, à la fonction $\varphi_0\epsilon N^{S_0}$, transformant S_0 en un seul point $p\epsilon N$ arbitrairement donné, vienne correspondre comme φ_0^* la fonction $\varphi_0^*(x)\equiv p$. Désignons par

$\psi(q,t)$ le prolongement φ^* de la fonction $\varphi\epsilon N^{S_0}$ définie par les formules:

$$\varphi(0)=p \qquad \text{et} \qquad \varphi(1)=q,$$

où q désigne un point de N satisfaisant à l'inégalité $\varrho(p,q)<\varepsilon$ (resp. un point arbitraire de N). La fonction $\psi(q,t)$ ainsi définie satisfait aux conditions:

1° $\psi(q,0)=p$ et $\psi(q,1)=q$ pour toutes les valeurs de q,

2° $\psi(p,t)=p$ pour tout $0\leqslant t\leqslant 1$,

3° Si $t_n\to t$, alors $\psi(q,t_n)\to\psi(q,t)$,

4° Si $q_n\to q$, alors $\psi(q_n,t)$ tend uniformément vers $\psi(q,t)$

Les conditions 3° et 4° montrent que $\psi(q,t)$ est une fonction continue de deux variables q et t à la fois. D'après 1° et 2°, cette fonction effectue une contraction de l'ensemble $\underset{q}{\mathrm{E}}[q\epsilon N;\varrho(p,q)<\varepsilon]$ en point p, qu'elle laisse immobile. Par conséquent, tout entourage suffisamment petit de p se trouve contracté par ψ en p dans un entourage arbitrairement petit de p, c. q. f. d.

8. Passons à présent au cas où l'espace N n'est pas compact.

Théorème 5. *Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace compact M tel que $\dim(M-A)\leqslant n$. Soit N un espace localement connexe en dimensions $\leqslant n$* [4]). *Si $\{\varphi_t\}\subset N^A$ est une famille de fonctions dépendant d'une manière continue du paramètre $t\epsilon\langle 0,1\rangle$, il existe pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$ un prolongement $\varphi_t^*\epsilon N^M$ de φ_t qui dépend aussi d'une manière continue du paramètre t, le prolongement φ_0^* de φ_0 étant donné d'avance.*

D é m o n s t r a t i o n. En posant

$$\psi(x,t)=\varphi_t(x) \quad \text{pour tout} \quad x\epsilon A \quad \text{et} \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

et

$$\psi(x,0)=\varphi_0^*(x) \quad \text{pour tout} \quad x\epsilon M,$$

on obtient une fonction continue dont les valeurs appartiennent à N et qui est définie dans l'ensemble $E=M\times(0)+A\times\langle 0,1\rangle$,

[4]) Un espace E est dit *localement connexe en dimension k au point p*, lorsqu'à chaque entourage U de p correspond un entourage V de p tel que chaque fonction continue $\varphi\epsilon V^{S_k}$ admet un prolongement continu transformant H_{k+1} en un sous ensemble de U.

fermé dans l'espace $M\times\langle 0,1\rangle$. Comme $\dim[M\times\langle 0,1\rangle-E]\leqslant \leqslant\dim(M-A)+1\leqslant n+1$ et l'espace N est localement connexe en dimensions $\leqslant n$, il existe[5]) un entourage U de E dans $M\times\langle 0,1\rangle$ tel que ψ admet un prolongement $\psi'\epsilon N^U$. L'ensemble E étant compact, il existe un nombre $\alpha>0$ tel que tout point $(x,t)\epsilon M\times\langle 0,1\rangle-U$ satisfait aux conditions:

$$\varrho(x,A)>\alpha \quad \text{et} \quad t>\alpha.$$

En posant maintenant

$$\varphi_t^*(x)=\psi'\left(x,\frac{\alpha^2 t}{\alpha^2+\varrho(x,A)}\right), \tag{13}$$

on obtient une famille $\{\varphi_t^*\}$ de fonctions définies dans l'espace $M\times\langle 0,1\rangle$ tout entier, puisque $\varrho(x,A)>\alpha$ entraîne $\frac{\alpha^2 t}{\alpha^2+\varrho(x,A)}\leqslant\alpha$, de sorte que le point $\left(x,\frac{\alpha^2 t}{\alpha^2+\varrho(x,A)}\right)$ appartient à U pour tout $(x,t)\epsilon M\times\langle 0,1\rangle$. La fonction $\psi'\left(x,\frac{\alpha^2 t}{\alpha^2+\varrho(x,A)}\right)$ dépendant de t d'une manière continue et satisfaisant aux conditions:

$$\psi'\left(x,\frac{\alpha^2 t}{\alpha^2+\varrho(x,A)}\right)=\psi'(x,0) \qquad \text{pour} \quad t=0,$$

$$\psi'\left(x,\frac{\alpha^2 t}{\alpha^2+\varrho(x,A)}\right)=\psi'(x,t)=\varphi(x,t) \qquad \text{pour tout} \quad x\epsilon A,$$

on conclut que la famille des fonctions définies par la formule (13) satisfait à la thèse du théorème 5.

9. En rapprochant le théorème 5 du théorème de M. C. Kuratowski[6]) d'après lequel l'espace N^A des transformations continues d'un espace compact A de dimension $\leqslant n$ en sous-ensembles d'un espace N localement connexe en dimensions $\leqslant n$ est localement connexe en dimension 0, on parvient au théorème suivant:

Théorème 6. *A étant un sous-ensemble fermé d'un espace compact M de dimension $\leqslant n$ et N un espace localement connexe en dimensions $\leqslant n$, celles des fonctions $\varphi\epsilon N^A$ qui sont susceptibles des prolongements $\varphi^*\epsilon N^M$ constituent un sous-ensemble à la fois ouvert et fermé de l'espace N^A.*

[5]) voir C. Kuratowski, Fund. Math. 24 (1935), p. 273.
[6]) l. c., p. 283.

10. L'hypothèse concernant la dimension de M joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 6. Or, une partie importante de sa thèse se laisse obtenir sans aucune hypothèse sur la dimension de l'espace M tout entier, mais seulement avec celle sur la dimension de $M-A$:

Théorème 7. *A étant un sous-ensemble fermé d'un espace compact M, où $\dim(M-A)\leqslant n$, et N un espace séparable, localement connexe en dimensions $<n$, celles des fonctions $\varphi\epsilon N^A$ qui sont susceptibles des prolongements $\varphi^*\epsilon N^M$ constituent un sous-ensemble ouvert de l'espace N^A.*

11. Le théorème 7 est notamment une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme[7]). *Soit B un sous-ensemble compact d'un espace N séparable et localement connexe en dimensions $<n$. A chaque nombre réel $\varepsilon>0$ correspond alors un nombre positif $\eta=\eta(\varepsilon,B,N)$ tel que, si A est un sous-ensemble fermé d'un espace compact M assujetti à l'inégalité $\dim(M-A)\leqslant n$ et si $\varphi_0\epsilon N^A$ est une fonction susceptible d'un prolongement $\varphi_0^*\epsilon N^A$ assujetti à l'inégalité $\varrho[\varphi_0^*(x),B]<\eta$ pour tout $x\epsilon M$, chaque fonction $\varphi\epsilon N^A$ dont la distance de φ_0 est $<\eta$ admet un prolongement $\varphi^*\epsilon N^M$ dont la distance de φ^* est $<\varepsilon$.*

D é m o n s t r a t i o n. Le lemme étant évident dans le cas où $A=0$, nous pouvons admettre que l'ensemble A n'est pas vide. Si $n=0$, il existe une décomposition de $M-A$ en une suite $\{E_k\}$ d'ensembles disjoints, à la fois fermés et ouverts dans $M-A$ et dont le diamètre tend vers 0 avec leur distance de A. En faisant correspondre à chaque E_k un point $a_k\epsilon A$ tel que $\varrho(a_k,E_k)\leqslant 2\varrho(A,E_k)$, on constate sans peine que les formules

$$r(x)=a_k \qquad \text{pour tout} \qquad x\epsilon E_k,$$

$$r(x)=x \qquad \text{pour tout} \qquad x\epsilon A$$

définissent une fonction rétractant M en A. Nous avons ainsi démontré que

[7]) Comp. le lemme du Nr. 8, p. 95 de mon travail de ce volume, qui concerne le cas où l'espace M est séparable et l'espace N compact.

Chaque sous-ensemble fermé A d'un espace séparable M tel que $\dim(M-A)=0$ *est un rétracte de* M.

La distance des fonctions $\varphi_0^*(x)$ et $\varphi[r(x)]$ dans l'ensemble A, et par suite aussi dans un entourage suffisamment petit U de A, est $<\eta$. Comme $(M-A)=0$, on peut choisir l'entourage U de façon que les ensembles U et $M-U$ soient séparés [8]). Il en résulte qu'on obtiendra une fonction continue, en posant $\varphi^*(x)=\varphi[r(x)]$ pour tout $x\in U$ et $\varphi^*(x)=\varphi_0^*(x)$ pour tout $x\in M-U$. Cette fonction constitue un prolongement de φ pour lequel $\varrho(\varphi_0^*,\varphi^*)<\eta$, de sorte que la thèse du lemme est remplie par $\eta=\varepsilon$.

Nous procéderons maintenant par induction, en admettant que $n>0$ et qu'il existe pour tout $\varepsilon>0$ un nombre positif $\eta'(\varepsilon,B,N)$ remplissant la thèse du lemme dans le cas où $\dim(M-A)\leqslant n-1$. L'espace N étant localement connexe en dimensions $<n$, il existe [9]) pour tout $p\in N$ un entourage U_p tel que chaque fonction continue transformant un sous-ensemble fermé d'un espace séparable X à $\leqslant n$ dimensions en un sous-ensemble de U_p se laisse prolonger sur X de manière que ses valeurs constituent un sous-ensemble de N de diamètre $<\varepsilon/3$. L'ensemble B étant compact, il en résulte l'existence d'un nombre positif $\lambda<\varepsilon$ si petit que chaque fonction transformant un sous-ensemble fermé d'un espace séparable de dimension $\leqslant n$ en un sous-ensemble de N dont le diamètre et la distance de B sont $<\lambda$ admet un prolongement sur l'espace tout entier et dont les valeurs constituent un sous-ensemble de N de diamètre $<\varepsilon/3$.

Nous allons montrer que, pour satisfaire à la thèse du lemme, il suffit de prendre comme $\eta(\varepsilon,B,N)$ un nombre positif arbitraire η satisfaisant aux conditions:

(14) $$\eta\leqslant\eta'(\lambda/3,B,N),$$

(15) $$\eta<\lambda/3.$$

Soit, en effet, $\varphi_0\in N^A$ une fonction admettant un prolongement $\varphi_0^*\in N^M$ tel que

(16) $$\varphi_0^*(M)\subset\underset{x}{\mathrm{E}}[x\in N;\varrho(x,B)<\eta].$$

[8]) c. à d. que $\overline{U}\cdot(M-U)+U\cdot\overline{M-U}=0$.

[9]) Cf. C. Kuratowski, l. c., p. 273, Théorème 1, I et III.

Soit $\varphi\in N^A$ une fonction satisfaisant à l'inégalité

(17) $$\varrho(\varphi_0,\varphi)<\eta.$$

Comme $M-A$ est un sous-ensemble ouvert de dimension $\leqslant n$ de l'espace compact M, on en conclut sans peine qu'il existe un sous-ensemble fermé T de $M-A$ de dimension $\leqslant n-1$ et tel que l'ensemble $M-A-T$ se laisse décomposer en une suite $\{E_k\}$ d'ensembles disjoints, à la fois ouverts et fermés dans leur somme, dont le diamètre et la distance de A tendent vers 0 et qui satisfont à la condition:

(18) pour tout E_k le diamètre de $\varphi_0^*(E_k)$ est $<\lambda/3$.

Nous pouvons admettre en outre que la fermeture de chaque E_k contient des points appartenant à T, car, dans le cas contraire, nous pourrions ajouter à T tous les E_k qui sont des ensembles isolés et un point d'accumulation de chacun des autres E_k. En posant $M'=A+T$, on conclut de (14) qu'il existe un prolongement $\varphi'\in N^{M'}$ de φ qui diffère de φ_0^* dans l'ensemble M' de moins que $<\lambda/3$. Les inégalités (15), (16) et (18) montrent que $\varphi'(M')\subset\underset{x}{\mathrm{E}}[x\in N;\varrho(x,B)<\lambda]$ et que, pour tout E_k, le diamètre de l'ensemble $\varphi'(\overline{E}_k\cdot M')$ est $<\lambda$. Vu la définition du nombre λ, on en conclut que φ' se laisse prolonger sur l'ensemble $\overline{E}_k$ de façon que la fonction prolongée soit une transformation continue de $\overline{E}_k$ en un sous-ensemble de M de diamètre $\varepsilon/3$. De plus, en tenant compte de la compacité de $\varphi(A)$ et de la connexité locale de N en dimensions $<n$, on peut admettre de la fonction prolongée φ' que le diamètre des images qu'elle donne de $\overline{E}_k$ tend vers 0 avec celui de E_k. Le prolongement φ^* ainsi défini sera alors une fonction continue dans l'espace M tout entier.

La fonction φ coïncidant avec φ' dans l'ensemble M' et, par conséquent, ne différant de φ_0^* dans cet ensemble que de $\lambda/3<\varepsilon$, il ne reste qu'à prouver que, pour tout $x\in M-M'$, la distance entre $\varphi(x)$ et $\varphi_0^*(x)$ est $<\varepsilon$. Or, dans la fermeture de l'ensemble E_k contenant x, il existe un point x' appartenant à T. On a donc

$$\varrho[\varphi^*(x),\varphi_0^*(x)]\leqslant\varrho[\varphi^*(x),\varphi'(x')]+\varrho[\varphi'(x'),\varphi_0^*(x')]+\varrho[\varphi_0^*(x'),\varphi_0(x)]<$$
$$<\varepsilon/3+\lambda/3+\lambda/3<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

La démonstration du lemme est ainsi achevée; le théorème 7 en est un corollaire immédiat.

12. ***Théorème 8.*** *Si une fonction continue φ_0 transforme un sous-ensemble fermé A d'un espace compact M tel que* $\dim(M-A) \leqslant n$ *en sous-ensemble d'un espace N séparable et localement connexe en dimensions $\leqslant 2n$, alors l'ensemble $N^M(A, \varphi_0)$ est localement connexe en dimensions $\leqslant n$.*

Démonstration. Soit f une fonction continue transformant S_k (où $k \leqslant n$) en un sous-ensemble de $N^M(A, \varphi_0)$. A chaque $y \in S_k$ correspond alors, comme valeur de $f(y)$, un prolongement $\varphi_y \in N^M$ de la fonction φ_0. En tenant compte de la continuité de f, on obtiendra donc une fonction continue transformant le sous-ensemble fermé $E = M \times S_k + A \times H_{k+1}$ de l'espace $M \times H_{k+1}$ en un sous-ensemble de N, si l'on pose:

$$\psi(x, y) = \varphi_y(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in M \quad \text{et} \quad y \in S_k,$$
$$\psi(x, y) = \varphi_0(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in A \quad \text{et} \quad y = H_{k+1}.$$

Soit maintenant φ_0^* une fonction appartenant à $N^M(A, \varphi_0)$. En posant

$$\psi_0(x, y) = \varphi_0^*(x) \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in E,$$

on obtient une fonction $\psi_0 \in N^E$. La fonction

$$\psi_0^*(x, y) = \varphi_0^*(x) \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in M \times H_{k+1}$$

constitue un prolongement de ψ_0 sur l'espace $M \times H_{k+1}$ tout entier. Or, dans le cas où les valeurs de la fonction f sont situées dans un entourage suffisamment petit de φ_0^*, la fonction ψ diffère de ψ_0 aussi peu que l'on veut. Il en résulte, d'après le lemme du Nr. **11**, l'existence d'un prolongement $\psi^* \in N^{M \times H_{k+1}}$ de ψ dont la distance de ψ_0 est plus petite qu'un nombre positif donné d'avance, c. q. f. d.

Sur une décomposition du segment en plus que $2^{\aleph_0}$ ensembles non mesurables et presque disjoints.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer à l'aide du théorème de M. Zermelo ce

Théorème. *Il existe une famille de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles non mesurables situés dans l'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$, deux à deux presque disjoints* [1]*, de mesure extérieure 1 et partout de II-ième catégorie dans J.*

La démonstration que j'en vais donner ici ne fait pas l'usage de l'hypothèse du continu. Or, si l'on admet cette hypothèse, le théorème devient une conséquence immédiate d'une proposition que j'ai démontrée antérieurement [2].

Démonstration. Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$. Il résulte du théorème de M. Zermelo l'existence d'une suite transfinie du type φ

$$(1) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

formée de tous les nombres de l'intervalle J.

---

[1]) Deux ensembles A et B sont dits *presque disjoints*, si l'ensemble $A \cdot B$ de leurs éléments communs est de puissance inférieure à celle de A et de B.

[2]) Fund. Math. t. XIII (1929), p. 195—200. C'est la proposition suivante: *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition de l'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles qui sont de mesure extérieure* 1, *de II-ième catégorie dans tout sous-intervalle de J et qui n'ont deux à deux qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs* (cf. aussi mon livre „*Hypothèse du continu*", Monografje Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934, p. 127).