Sur les transformations continues n'augmentant pas la dimension.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

1. Dans maintes recherches topologiques, on fait l'usage du théorème [1]) d'après lequel toute transformation continue f d'un espace métrique séparable en un sous-ensemble d'un espace euclidien se laisse approcher par des transformations continues qui n'augmentent pas la dimension. Le but de cet ouvrage est de démontrer un théorème plus précis, concernant le cas plus général, à savoir celui des transformations continues d'un espace métrique séparable en sous-ensembles d'un espace compact jouissant d'une propriété topologique locale, dite propriété $(\varDelta)$ [2]), et de traiter quelques questions qui s'y rattachent.

2. Soit P un complexe géométrique [3]). Désignons par P_n le complexe géométrique qui s'en obtient, en enlevant les intérieurs de tous les simplexes de dimension $>n$ de P.

[1]) Pour les espaces compacts, c'est une conséquence facile du théorème connu sous le nom de „*Überführungssatz*" de M. P. Alexandroff (voir Annals of Math. 30, 1928, p. 120). Dans le cas général, c'est une conséquence du théorème de M. W. Hurewicz, d'après lequel toute transformation continue d'un sous-ensemble fermé E d'un espace M métrique, séparable et tel que $\dim(M-E)\leqslant n$ en sphère euclidienne de dimension n se laisse prolonger d'une manière continue sur l'espace M tout entier (voir Fund. Math. 24, 1935, p. 146).

[2]) L'espace N *jouit au point* $p\in N$ *de la propriété* $(\varDelta)$, lorsque tout entourage U de p contient un entourage U_0 de p tel que chaque ensemble compact $A\subset U_0$ se laisse contracter dans un sous-ensemble de U de dimension $\leqslant \dim A+1$. L'espace N *jouit de la propriété* $(\varDelta)$, lorsqu'il jouit de cette propriété en chacun de ses points. Les espaces compacts jouissant de la propriété $(\varDelta)$ se distinguent par la régularité de leur structure topologique. Cf. mes notes de C. R. 201 (1935), p. 1086; C. R. 202 (1936), p. 187 et Fund. Math. 27 (1936), p. 77—93.

[3]) On entend par *complexe géométrique* un polyèdre avec décomposition simpliciale donnée.

Lemme. *M étant un espace métrique séparable de dimension $\leqslant n$ et P un complexe géométrique, il existe pour chaque fonction $f\in P^M$ une fonction $f_0\in P_n^M$ coïncidant avec f dans $f^{-1}(P_n)$* [4]) *et telle que pour tout $x\in M$ les points $f(x)$ et $f_0(x)$ appartiennent au même simplexe du complexe P.*

Démonstration. Soit P' un complexe géométrique qui s'obtient de P, en y enlevant l'intérieur d'un simplexe $\varDelta$ de dimension la plus grande. Il suffit évidemment de prouver qu'il existe dans le cas où $\dim\varDelta>n$ une fonction $f'\in P'^M$ coïncidant avec f dans $f^{-1}(P')$ et satisfaisant à la condition:

$$f'[f^{-1}(\varDelta)]\subset\varDelta. \tag{1}$$

Soit $\varLambda$ la frontière du simplexe $\varDelta$. L'ensemble $f^{-1}(\varLambda)$ étant un sous-ensemble fermé de l'ensemble $f^{-1}(\varDelta)$, qui est de dimension $\leqslant n$, il existe [5]) une transformation continue φ de $f^{-1}(\varDelta)$ en $\varLambda$ coïncidant avec f dans l'ensemble $f^{-1}(\varLambda)$. Or, en posant $f'(x)=f(x)$ pour tout $x\in f^{-1}(P')$ et $f'(x)=\varphi(x)$ pour tout $x\in f^{-1}(\varDelta)$, la fonction f' satisfait à la condition (1).

3. ***Théorème.*** *Soit M un espace métrique séparable et N un espace compact jouissant de la propriété $(\varDelta)$. Les transformations continues f, pour lesquelles $\dim\overline{f(M)}>\dim M$ constituent un F_σ de I-ère catégorie dans l'espace N^M* [6]).

Démonstration. La thèse du théorème étant évidente dans le cas où la dimension de M est infinie, nous pouvons admettre que $n=\dim M$ est un nombre fini. Désignons pour tout $k=1, 2, \ldots$ par $\varPhi_k$ la famille de toutes les fonctions $f\in N^M$ pour lesquelles la $(n+1)$-ième constante d'Urysohn [7]) de l'ensemble $\overline{f(M)}$ est $<1/k$; la famille $\varPhi$ des fonctions $f\in N^M$ pour lesquelles $\dim\overline{f(M)}\leqslant\dim M$ coïncide alors avec la partie commune de tous les $\varPhi_k$. Il ne reste donc qu'à montrer que pour tout $k=1, 2, \ldots$:

1° *$\varPhi_k$ est ouvert dans N^M,*

2° *$\varPhi_k$ est dense dans N^M.*

[4]) E étant un ensemble arbitraire, $f^{-1}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)\in E$.

[5]) D'après le théorème de M. Hurewicz, cité au renvoi [1]).

[6]) N^M désigne l'espace (complet) des transformations continues de M en sous-ensembles de N.

[7]) nommée aussi „*coefficient d'applatissement de dimension n*" (cf. P. Urysohn, Fund. Math. 8, 1926, p. 353). Pour qu'un ensemble compact F soit de dimension $\geqslant n$, il faut et il suffit que sa n-ième constante d'Urysohn soit positive.

Ad 1°. f étant un élément de Φ_k, il existe une décomposition de $\overline{f(M)}$ en sous-ensembles fermés $A_1, A_2, \ldots, A_l$ de diamètre $<1/k$ et tels que chaque point appartient tout au plus à $n+1$ ensembles A_i. En remplaçant chaque A_i par son entourage U_i suffisamment petit, on obtient un système d'ensembles satisfaisant aux conditions analogues. Or, si la distance de la fonction $f'\epsilon N^M$ de f est suffisamment petite, les ensembles $A_i'=\overline{f'f^{-1}[A_i\cdot f(M)]}$ où $i=1,2,\ldots,l$ sont respectivement des sous-ensembles de U_i. Par conséquent, le diamètre de ces ensembles est $<1/k$ et chaque point de $\overline{f'(M)}$ appartient au moins à 1 et au plus à $n+1$ d'entre eux. Or, la $(n+1)$-ième constante d'Urysohn de l'ensemble $\overline{f'(M)}$ est $<1/k$, c. à d. que $f'\epsilon\Phi_k$.

Ad 2°. On peut admettre que N est un sous-ensemble du cube fondamental Q_ω de l'espace de Hilbert R_ω. Il existe alors [8]) une suite $\{\varphi_k\}\subset Q_\omega^N$ telle que les ensembles $P^{(k)}=\varphi_k(N)$ sont des polyèdres et que $\varrho(x,\varphi_k(x))<1/k$ pour tout $x\epsilon N$. On peut d'ailleurs admettre que le polyèdre $P^{(k)}$ est donné sous la forme d'un complexe géométrique, pour lequel le diamètre maximum des simplexes est $<1/k$. En désignant, comme auparavant, par $P_n^{(k)}$ le complexe géométrique qui s'obtient de $P^{(k)}$ en y enlevant les intérieurs de tous les simplexes de $P^{(k)}$ de dimension $>n$, posons $H=N+\sum_{k=1}^{\infty}P_n^{(k)}$. L'espace N étant localement contractile, il existe une fonction $r(x)$ rétractant un entourage U de N (dans l'espace H) en N [9]). L'espace N jouissant de la propriété (Δ), on peut admettre [10]) que la fonction rétractante $r(x)$ satisfait à la condition

$$(2)\qquad \dim r(P_n^{(k)})\leqslant\dim P_n^{(k)}\leqslant n\quad\text{pour tout}\quad k=1,2,\ldots.$$

Soit maintenant $f\epsilon N^M$. Les fonctions $\varphi_k f\epsilon P^{(k)M}$ constituent alors une suite uniformément convergente vers f. D'après le lemme du N° **2**, il existe pour toute fonction $\varphi_k f$ une fonction $\psi_k\epsilon P_n^{(k)M}$ telle que, pour tout $x\epsilon M$, les points $\psi_k(x)$ et $\varphi_k f(x)$ appartiennent au même simplexe du complexe $P^{(k)}$ et satisfont par conséquent à l'inégalité

$$\varrho[\psi_k(x),\varphi_k f(x)]\leqslant 1/k\qquad\text{pour tout}\quad x\epsilon M.$$

Or, la suite $\{\psi_k\}$ converge uniformément vers la fonction f. On a donc $\psi_k(M)\subset U$ pour toute valeur suffisamment grande de k. Il en résulte que pour ces valeurs de k les fonctions $r\psi_k\epsilon N^M$ sont définies et constituent une suite uniformément convergente vers la fonction $rf(x)=f(x)$. Il résulte enfin de l'inclusion $\overline{r\psi_k(M)}\subset r(P_n^{(k)})$ et de l'inégalité (2) que $\dim\overline{r\psi_k(M)}\leqslant n$ et par conséquent $r\psi_k\epsilon\Phi_k$.

4. *Corollaire 1.* *M étant un espace métrique séparable de dimension $\leqslant n$ et N un continu contractile en soi en dimensions $\leqslant n$ [11]) qui jouit de la propriété (Δ), l'espace N^M est connexe.*

En effet, la contractilité en soi de N en dimensions $\leqslant n$ implique que chaque fonction $f\epsilon N^M$ assujettie à la condition $\dim\overline{f(M)}\leqslant n$ est homotope à une constante dans N^M [12]). Il en résulte que ces fonctions appartiennent à la même composante C de N^M. Leur ensemble étant dense dans N^M d'après le théorème du N° **3**, il vient $N^M=C$.

5. Soient maintenant A un sous-ensemble fermé d'un espace métrique M et N un espace compact de dimension finie. Les transformations $f\epsilon N^A$ admettant des prolongements $f^*\epsilon N^M$ constituent alors un ensemble à la fois ouvert et fermé dans N^A [13]). En rapprochant ce fait du corollaire précédent, on obtient le

Corollaire 2. *Etant donnés un sous-ensemble fermé A de dimension $\leqslant n$ d'un espace métrique M et un continu N de dimension finie, jouissant de la propriété (Δ) et contractile en soi en dimensions $\leqslant n$, toute fonction $f\epsilon N^A$ admet un prolongement $f^*\epsilon N^M$* [14]).

---

[8]) D'après le „*Überführungssatz*" de M. P. Alexandroff, cité au renvoi [1]).

[9]) c. à d. que $r\epsilon N^U$ et $r(x)=x$ pour tout $x\epsilon N$. Quant à l'existence d'une fonction rétractant un entourage U de N en N, voir C. Kuratowski, Fund. Math. 24 (1935), p. 273.

[10]) Voir C. R. 202 (1936), p. 187; aussi Fund. Math. 27 (1936), p. 83.

[11]) L'espace N est dit *contractile en soi en dimensions* $\leqslant n$, lorsque chacun de ses sous-ensembles fermés de dimension $\leqslant n$ est homotope dans lui à un point (voir C. Kuratowski, l. c. p. 286).

[12]) c. à d. qu'il existe une fonction continue $\varphi(x,t)$ satisfaisant aux conditions: $\varphi(x,0)=f(x)$, $\varphi(x,1)=\text{const.}$, $\varphi(x,t)\epsilon N$ pour $x\epsilon M$ et $0\leqslant t\leqslant 1$.

[13]) Voir Fund. Math. 19 (1932), p. 229. L'hypothèse de la dimension finie de N se laisse remplacer ici par l'hypothèse moins restrictive que N est un „*rétracte absolu de voisinage*".

[14]) La thèse du corollaire 2 reste vraie, lorsqu'on remplace l'hypothèse de dimension finie de N par celle de dimension finie de M.

6. On a enfin le

Corollaire 3. *Etant donnés un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable M de dimension $\leqslant n+1$ et un continu N jouissant de la propriété (Δ) et contractile en soi en dimension $\leqslant n$, toute fonction $f \epsilon N^A$ admet un prolongement $f^* \epsilon N^M$.*

Démonstration. L'espace N étant localement contractile et par conséquent localement connexe en toutes les dimensions, il existe pour toute fonction $f \epsilon N^A$ un entourage U de A dans M et un prolongement $f' \epsilon N^U$ [15]). La dimension de M étant $\leqslant n+1$, il existe un entourage ouvert V de A tel que $\overline{V} \subset U$ et que la frontière B de V est de dimension $\leqslant n$. Or, la fonction partielle f', définie dans l'ensemble B, admet d'après le cor. 2 un prolongement $f'' \epsilon N^{M-V}$. Pour obtenir le prolongement demandé $f^* \epsilon N^M$, il ne reste qu'à poser:

$$f^*(x) = f'(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \epsilon V.$$
$$f^*(x) = f''(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \epsilon M - V.$$

7. Le théorème du N° **3** permet, en particulier, d'approcher toute fonction $f \epsilon N^M$ par des transformations qui n'augmentent pas la dimension. Cependant, il est quelquefois utile de savoir si une telle approximation peut se faire par des transformations speciales, qui prennent des valeurs bien déterminées dans un sous-ensemble donné A de M. L'étude de cette question constitue l'objet des considérations qui vont suivre.

Lemme. *f étant une transformation continue d'un espace métrique séparable M en Q_ω et φ une transformation continue d'un sous-ensemble fermé A de M en Q_ω, il existe un prolongement continu φ' de φ sur M tel que* $\operatorname{Sup}_{x \epsilon M} \varrho[f(x), \varphi'(x)] = \operatorname{Sup}_{x \epsilon A} \varrho[f(x), \varphi(x)]$.

Démonstration. Soient: $f(x)=\{f_n(x)\}$, $\varphi(x)=\{\varphi_n(x)\}$ et $\alpha = \operatorname{Sup}_{x \epsilon A} \varrho[f(x), \varphi(x)]$. Les fonctions $\psi_n(x)=\varphi_n(x)-f_n(x)$ satisfont alors aux conditions:

$$(3) \qquad -\frac{1}{n} \leqslant \psi_n(x) \leqslant \frac{1}{n},$$

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_n(x)]^2 \leqslant \alpha^2.$$

[15]) Cf. C. Kuratowski, l. c., p. 272 et 273.

Etendons maintenant chaque fonction ψ_n sur l'espace M tout entier, en conservant la condition (3). Nous pouvons admettre, en outre, que la condition (4) est aussi remplie par ces prolongements, car on pourrait remplacer dans le cas contraire $\psi_n(x)$ par $\theta(x)\cdot\psi_n(x)$ où $\theta(x)=1$, si $\sum_{n=1}^{\infty}[\psi_n(x)]^2 \leqslant \alpha$, et par $\theta(x)=\alpha\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}[\psi_n(x)]^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ pour les autres valeurs de x.

En posant à présent

$$\varphi^*(x) = \{f_n(x)+\psi_n(x)\} \qquad \text{pour tout} \quad x \epsilon M,$$

on obtient une fonction continue qui satisfait, d'après (4), à l'inégalité $\varrho[f(x), \varphi^*(x)] \leqslant \alpha$ pour tout $x \epsilon M$. Or, les valeurs de cette fonction peuvent ne pas appartenir à Q_ω. Pour obtenir la fonction demandée, posons

$$\lambda_n(t)=0 \qquad \text{pour} \quad t \leqslant 0,$$
$$\lambda_n(t)=t \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/n,$$
$$\lambda_n(t)=1/n \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 1.$$

La fonction $\lambda(\{x_n\}) = \{\lambda_n(x_n)\}$ constitue une rétraction de l'espace de Hilbert R_ω en Q_ω, tout en remplissant l'inégalité $\varrho[\lambda(p), \lambda(q)] \leqslant \varrho(p, q)$, quels que soient $p, q \epsilon R_\omega$. La fonction $\varphi'(x)=\lambda[\varphi^*(x)]$ satisfait donc à la thèse du lemme.

8. ***Lemme.*** Prémisses: 1° *N est un espace compact localement connexe en dimensions $<n$;* 2° *A est un sous-ensemble fermé d'un espace M métrique, séparable et tel que* $\dim(M-A) \leqslant n$.

Thèse: *A chaque $\varepsilon > 0$ correspond alors un $\eta > 0$ tel que, f étant une transformation continue de M et φ de A en N assujetties à l'inégalité $\varrho[f(x), \varphi(x)] \leqslant \eta$ pour tout $x \epsilon A$, il existe un prolongement φ' de φ sur l'espace M tout entier assujetti à l'inégalité $\varrho[f(x), \varphi(x)] \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \epsilon M$.*

Démonstration. On peut admettre que N est un sous-ensemble de Q_ω. Il existe alors [16]) un polytope infini $T \subset Q_\omega - N$ tel que $N+T$ est un rétracte absolu. Admettons que T est donné sous la forme d'un complexe géométrique infini, dont les diamètres des simplexes constituent une suite convergeant vers 0. Désignons par T_n le polytope-somme de toutes les faces de dimension $\leqslant n$

[16]) Voir Fund. Math. 27 (1936), p. 240.

du complexe T. L'espace N étant localement connexe en dimensions $<n$, il existe un entourage U de N et une fonction $r_n(x)$ rétractant $U\cdot(N+T_n)$ en N [9]). Soit $r(x)$ une fonction rétractant Q_ω en $N+T$. Il existe alors pour tout $\varepsilon>0$:

(a) un entourage $U_1 \subset U$ de N tel que $\varrho[y, r_n(y)] \leqslant \varepsilon/4$ pour tout $y \in U_1 \cdot T_n$,

(b) un entourage U_2 tel que chaque simplexe de T empiétant sur U_2 est contenu dans U_1 et son diamètre est $<\varepsilon/4$.

(c) un entourage $U_3 \subset U_2$ tel que $r(U_3) \subset U_2$ et que $\varrho[y, r(y)] < \varepsilon/4$ pour tout $y \in U_3$.

Soit enfin $\eta>0$ un nombre plus petit que chacun des deux nombres $\varepsilon/4$ et $\varrho(N, Q_\omega - U_3)$. D'après le lemme du N° **7**, il existe un prolongement $\varphi_3 \in Q_\omega^M$ de φ pour lequel

(5) $$\varrho(f, \varphi_3) \leqslant \eta < \varepsilon/4.$$

Par conséquent, toutes les valeurs de φ_3 appartiennent à U_2. En vertu de (c), la fonction $\varphi_2(x) = r\varphi_3(x)$ constitue donc un prolongement de φ sur M dont les valeurs appartiennent à $(N+T)\cdot U_2$ et qui remplit l'inégalité

(6) $$\varrho(\varphi_2, \varphi_3) < \varepsilon/4.$$

En tenant compte de l'inégalité $\dim(M-A) \leqslant n$, du lemme du N° **2** et de la convergence vers 0 du diamètre des simplexes de T, on conclut que φ_2 se laisse remplacer par une fonction $\varphi_1 \in (N+T_n)^M$ coïncidant avec φ_2 dans l'ensemble $\varphi_2^{-1}(N+T_n)$ et dont les valeurs pour les autres x appartiennent aux mêmes simplexes du complexe T que les valeurs correspondantes de la fonction φ_2.

Il en résulte d'après (b) que φ_1 appartient à $[(N+T_n)\cdot U_1]^M$ et que

(7) $$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant \varepsilon/4.$$

On en déduit d'après (a) que la fonction $\varphi' = r_n \varphi_1 \in N^M$ est un prolongement de φ et qu'elle remplit l'inégalité

(8) $$\varrho(\varphi', \varphi_1) \leqslant \varepsilon/4.$$

Or, les inégalités (5), (6), (7) et (8) entraînent l'inégalité $\varrho(f, \varphi') \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

9. *Théorème.* *Soit f_0 une transformation continue d'un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable M en un sous-ensemble d'un espace compact N jouissant de la propriété* (Δ).

$N^M(A, f_0)$ désignant le sous-ensemble de N^M, dont les éléments sont des prolongements de f_0, les fonctions f qui remplissent la condition $\dim f(M-A) > \dim(M-A)$ *constituent un sous-ensemble de I-ère catégorie dans $N^M(A, f_0)$.*

Démonstration. L'ensemble $M-A$ est somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés F_k (p. ex. d'ensembles $F_k = \underset{x}{\mathrm{E}}[\varrho(x, A) \geqslant 1/k]$). D'après le „*Summensatz*" de la théorie des dimensions, on a $\dim f(M-A) \leqslant \operatorname{Sup} \dim \overline{f(F_k)}$. Pour achever la démonstration, il suffit donc d'établir la proposition suivante:

F étant un sous-ensemble fermé de $M-A$, les fonctions f qui remplissent la condition $\dim \overline{f(F)} > \dim F$ *constituent un F_σ de I-ère catégorie dans $N^M(A, f_0)$.*

En faisant correspondre à toute fonction $f \in N^M(A, f_0)$ sa fonction partielle dans F, on obtient une opération continue dans $N^M(A, f_0)$, dont les valeurs appartiennent à N^F. Or, nous avons déjà constaté dans N° **3**, 1° que, n désignant la dimension de F, les transformations $\varphi \in N^F$ pour lesquelles la $(n+1)$-ième constante d'Urysohn de $\varphi(F)$ est $<1/k$ constituent dans l'espace N^F un ensemble ouvert. Il en résulte que l'ensemble Φ_k^* de toutes les transformations pour lesquelles la $(n+1)$-ième constante d'Urysohn de $\overline{f(F)}$ est $<1/k$ est ouvert dans $N^M(A, f_0)$. Il ne reste donc qu'à prouver que l'ensemble Φ_k^* est dense dans $N^M(A, f_0)$. Or, en s'appuyant sur le théorème du N° **3**, on peut trouver pour tout $f \in N^M(A, f_0)$ et tout $\eta>0$ une fonction $\varphi \in N^F$ telle que l'on ait $\dim \overline{\varphi(F)} \leqslant n$ et $\varrho[f(x), \varphi(x)] \leqslant \eta$ pour tout $x \in F$. En posant en outre $\varphi(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in A$, on obtient une fonction $\varphi \in N^{A+F}$ satisfaisant à l'inégalité $\varrho[f(x), \varphi(x)] \leqslant \eta$ pour tout $x \in A+F$. Il existe donc, d'après le lemme du N° **8**, un prolongement $f' \in N^M$ qui, pour un η suffisamment petit, diffère de f aussi peu qu'on le veut. Comme prolongement de φ, la fonction f' appartient à Φ_k^*. Le théorème est ainsi démontré.

10. *Corollaire.* *L'espace compact N jouissant de la propriété (Δ), il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $\eta>0$ tel que chaque ensemble $A\subset M$ de diamètre $<\eta$ se laisse contracter dans un sous-ensemble de N de dimension $\leqslant \dim A+1$ et de diamètre $<\varepsilon$.*

Démonstration. N étant localement contractile, il existe un $\eta>0$ tel que chaque sous-ensemble A de M de diamètre $<\eta$ se laisse contracter dans un sous-ensemble de N de diamètre $<\varepsilon$. Cela veut dire qu'il existe une fonction continue $\varphi(x,t)$ définie dans le produit (cartésien) $A\times\langle 0,1\rangle$, telle que $\varphi(x,0)=x$ et $\varphi(x,1)=$ const. pour tout $x\,\epsilon\,A$ et dont les valeurs constituent un sous-ensemble de N de diamètre $<\varepsilon$. L'ensemble $A\times(0)+A\times(1)$ étant fermé dans $A\times\langle 0,1\rangle$, le théorème du N° **9** entraîne l'existence d'une fonction continue $\varphi'(x,t)$ qui transforme $A\times\langle 0,1\rangle$ en un sous-ensemble de N de diamètre $<\varepsilon$ et satisfait aux conditions:

$$\varphi'(x,0)=x, \qquad \varphi'(x,1)=\text{const.} \qquad \text{pour tout} \quad x\,\epsilon\,A,$$

$$\dim \varphi'[A\times\langle 0,1\rangle - A\times(0) - A\times(1)] \leqslant \dim[A\times\langle 0,1\rangle] \leqslant \dim A+1.$$

L'ensemble $\varphi'[A\times(0)+A\times(1)]$ étant fermé dans $\varphi'[A\times\langle 0,1\rangle]$, il en résulte (d'après le „*Summensatz*" de la théorie des dimensions) que $\dim[\varphi'(A\times\langle 0,1\rangle)]\leqslant \dim A+1$, ce qui achève la démonstration.

Sur les prolongements des transformations continues.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Les récherches topologiques conduisent souvent aux problèmes de la forme suivante:

Trouver des conditions pour qu'une fonction continue φ transformant un sous-ensemble fermé A d'un espace donné M en sous-ensemble d'un autre espace donné N admette un prolongement continu sur l'espace M tout entier.

L'opération de prolongement étant en général non-univoque, la question se pose de choisir parmi les prolongements possibles de φ un seul, φ^*, qui dépende d'une manière continue de φ *parcourant une famille donnée de fonctions.*

Les résultats exposés ici se rattachent à ces questions.

1. Notations. Tous les espaces considérés sont supposés métriques.

$\varrho(x,y)$ désigne la distance entre x et y.

$\varrho(x,Y)=\inf\limits_{y\epsilon Y}\varrho(x,y)$.

$\langle\alpha,\beta\rangle$ désigne l'ensemble des nombres réels t assujettis à l'inégalité $\alpha\leqq t\leqq\beta$.

H_n désigne la sphère euclidienne à n dimensions et S_{n-1} sa surface. Nous admettons en particulier que H_1 coïncide avec l'intervalle $\langle 0,1\rangle$; l'ensemble S_0 ne contient alors que les nombres 0 et 1.

N^M désigne la classe de toutes les transformations continues de l'espace M en sous-ensembles de l'espace N. Dans le cas où