10. Une famille de fonctions $\Phi \subset X^X$ est dite uniformément continue au point $x \in X$, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $\varrho(x_1, x) < \eta$ implique l'inégalité $\varrho(f(x_1), f(x)) < \varepsilon$ pour tout $f \in \Phi$.

On prouve sans peine que

(*) *X étant un espace métrique compact, les familles compactes $\Phi \subset X^X$ coïncident avec celles uniformément continues en tout point.*

Une homéomorphie $f \in \mathfrak{H}(X)$ est dite d'après M. B. von Kerékjártó [9]) *régulière* au point $x \in X$, lorsque la famille composée de deux suites $\{f^n\}$ et $\{f^{-n}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est uniformément continue en ce point. En vertu de (*) et de **9** *d*), on a le théorème suivant:

Théorème. *X étant un espace compact métrisable, les homéomorphies $f \in \mathfrak{H}(X)$ régulières en tous les points coïncident avec les isométries topologiques.*

Cet énoncé permet de formuler comme il suit deux théorèmes de M. B. v. Kerékjártó [10]).

Théorème. *Pour qu'une homéomorphie qui transforme la surface de sphère en elle-même sans point invariant et sans changement d'orientation soit topologiquement équivalente à une transformation linéaire elliptique, il faut et il suffit qu'elle soit une isométrie topologique.*

Théorème. *S étant une surface à 2 dimensions (close ou bornée) de genre $p > 1$, pour qu'une transformation homéomorphe de S en elle-même soit topologiquement équivalente à une représentation conforme, il faut et il suffit qu'elle soit une isométrie topologique.*

---

[9]) C. R. Paris 198 (1934), p. 317.

[10]) Acta Szeged 6 (1934), p. 236; Acta Szeged 7 (1936), p. 73 et 76.

La dimension et la mesure *).

Par

Edward Szpilrajn (Warszawa).

Introduction. Dans la géométrie élémentaire, la notion de *dimension* et celle de *mesure* sont en liaison manifeste: on définit la *longueur* pour des *lignes*, l'*aire* pour des *figures*, le *volume* pour des *corps*.

Il y a actuellement d'une part la théorie de dimension au sens, déjà classique, de Brouwer-Menger-Urysohn; il y a, d'autre part, les théories de la mesure, en particulier celle de la mesure p-dimensionnelle due à MM. Carathéodory et Hausdorff [1]). Dans ces théories, on définit la dimension et la mesure (extérieure) non seulement pour les figures de la géométrie élémentaire, mais d'une manière générale pour les ensembles métriques tout-à-fait arbitraires. Il paraît donc intéressant de lier les deux notions en toute leur généralité.

Or, la relation entre la dimension et la mesure n'est pas immédiate: p. ex. l'ensemble des points du plan à deux coordonnées irrationnelles est de dimension 0, tandis que sa mesure superficielle est positive. Cette divergence est d'ailleurs bien naturelle, la dimension étant une notion topologique et la mesure une notion métrique. Cependant la relation entre elles se laisse formuler d'une

---

*) Les résultats principaux de cet ouvrage ont fait l'objet de ma communication au Congrès International des Mathématiciens à Oslo 1936.

[1]) Voir F. Hausdorff, *Dimension und äusseres Mass*, Math. Ann. 79 (1919), pp. 157—179; S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów (à paraître), pp. 53 et 54.

façon assez simple. Notamment, en profitant des idées de MM. Nöbeling, Pontrjagin et Schnirelmann[2]), on parvient au théorème:

Pour qu'un ensemble (situé dans un espace métrique séparable) soit de dimension $\leqslant n$, *il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un ensemble de mesure* $(n+1)$-*dimensionnelle nulle (situé dans le cube à* $2n+1$ *dimensions)* (cf. § 4).

Termes et notations. I désigne l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$; I^n désigne le cube fondamental de l'espace cartésien à n dimensions.

M étant un espace métrique, $\varrho(x, y)$ désigne pour $x, y \epsilon M$ la distance entre ces points. Pour chaque $E \subset M$, $\delta(E)$ désigne le diamètre de E et *dim* (E) la dimension (au sens de Brouwer-Menger-Urysohn) de E.

J'emploie le terme *compact* dans le sens: compact en soi.

ϱ_1 et ϱ_2 désignant la distance dans les espaces M_1 et M_2 respectivement, une transformation f d'un ensemble $E \subset M_1$ en sous-ensemble de M_2 s'appellera *raccourcissement*, si $\varrho_1(x, y) \geqslant \varrho_2[f(x), f(y)]$ pour tous les $x, y \epsilon E$.

Je dis qu'une condition est satisfaite pour *presque* chaque nombre, lorsque l'ensemble des nombres pour lesquels elle n'est pas satisfaite est de mesure lebesguienne nulle.

Les notations: $\Phi, L^{\varphi}, L^{(p)}$ et la notion d'*ordre* d'une fonction seront définies dans le § 1, $S(r)$ dans le § 2 et $h(E)$ dans le § 4.

§ 1 [1]). Soit $\varphi(x)$ une fonction non négative d'une variable non négative, continue, croissante, et telle que $\varphi(0)=0$. Dans la suite Φ désignera la classe de toutes les fonctions de ce genre. Soit E un ensemble situé dans un espace métrique. Pour chaque nombre $\varepsilon > 0$, soit $L_{\varepsilon}^{\varphi}(E)$ la borne inférieure de tous les nombres $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi[\delta(E_n)]$ où $E=E_1+E_2+\ldots$ est une décomposition de E en une suite d'ensembles de diamètre plus petit que ε. La limite du nombre $L_{\varepsilon}^{\varphi}(E)$ pour $\varepsilon \to 0$ sera désignée par $L^{\varphi}(E)$.

Dans le cas où $\varphi(x)=x^p$ (pour $p > 0$), la fonction $L^{\varphi}(E)$ sera désignée par $L^{(p)}(E)$.

[2]) G. Nöbeling, *Hausdorffsche und mengentheoretische Dimension*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 3 (1932), pp. 24 et 25; L. Pontrjagin et L. Schnirelmann, *Sur une propriété métrique de la dimension*, Annals of Math. 33 (1932), pp. 156—162. (Cf. plus loin § 4). — La connaissance de ces travaux n'est pas nécessaire pour le lecteur du présent article.

Dans l'espace cartésien à n dimensions, la classe des ensembles pour lesquels la fonctions $L^{(n)}$ s'annule coïncide avec celle des ensembles de mesure lebesguienne (n-dimensionnelle) nulle. Par analogie, nous appellerons *ensembles de mesure p-dimensionnelle nulle* les ensembles pour lesquels $L^{(p)}$ s'annule. Pareillement, les ensembles pour lesquels cette fonction est finie seront appelés *ensembles de mesure p-dimensionnelle finie* [3]).

La fonction $L^{(1)}$ étant égale pour les ensembles linéaires à la mesure lebesguienne extérieure, nous l'appellerons *mesure linéaire*.

En outre, nous désignerons par $L^{(0)}(E)$ *(mesure 0-dimensionnelle de E)* la fonction égale à n pour chaque ensemble E composé de n points ($n=0, 1, 2, \ldots$) et à $+\infty$ pour chaque ensemble E infini.

La définition des fonctions de la classe Φ permet de déduire facilement que

(i) $L^{\varphi}(E)=0$ équivaut à l'existence pour chaque $\varepsilon>0$ d'une décomposition $E=E_1+E_2+\ldots$ telle que $\sum_{j=1}^{\infty}\varphi[\delta(E_j)]<\varepsilon$.

Nous allons démontrer encore que

(ii) E étant un ensemble compact, $L^{\varphi}(E)=0$ équivaut à l'existence pour chaque $\varepsilon>0$ d'une décomposition finie $E=E_1+E_2+\ldots+E_N$ telle que $\sum_{j=1}^{N}\varphi[\delta(E_j)]<\varepsilon$.

On peut se borner évidemment à établir la nécessité de cette condition. Il existe en vertu de (i) une décomposition $E=Z_1+Z_2+\ldots$ telle que

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\varphi[\delta(Z_j)]<\varepsilon/2.$$

La fonction φ étant continue, il existe pour chaque $j=1, 2, \ldots$ un ensemble E_j ouvert dans E, contenant Z_j et tel que

$$(\divideontimes) \qquad \varphi[\delta(E_j)]<\varphi[\delta(Z_j)]+\varepsilon/2^{j+1}.$$

Il existe par conséquent une suite finie $E_1, E_2, \ldots, E_N$ telle que $E_1+E_2+\ldots+E_N=E$, d'où en vertu de (*) et ($\divideontimes$) l'inégalité q. f. d.

On montre aisément que

(iii) Chaque polyèdre à n dimensions est de mesure n-dimensionnelle finie ($n=0, 1, 2, \ldots$).

[3]) suivant la terminologie de M. Saks, l. c.

$L(E)$ et $L^*(E)$ étant deux fonctions d'ensemble, nous dirons que la fonction L^* est *d'un ordre supérieur* que la fonction L, lorsque la relation $L(E)<+\infty$ entraîne la relation $L^*(E)=0$; nous dirons que son ordre est *égal* à celui de la fonction L, lorsque les relations $L(E)=0$ et $L(E)=+\infty$ équivalent respectivement aux relations $L^*(E)=0$ et $L^*(E)=+\infty$ [4]). On voit facilement que

(iv) Chaque fonction L^φ est d'un ordre supérieur que la fonction $L^{(0)}$.

(v) φ et ψ étant deux fonctions appartenant à Φ et telles que $\lim\limits_{x=0}[\varphi(x)/\psi(x)]=0$, la fonction L^φ est d'un ordre supérieur que la fonction L^ψ.

Par conséquent

(vi) Si $0\leqslant p<q$, la fonction $L^{(q)}$ est d'un ordre supérieur que la fonction $L^{(p)}$.

Remarquons enfin que

(vii) f étant un raccourcissement défini sur un ensemble E, on a $L^\varphi[f(E)]\leqslant L^\varphi(E)$.

§ 2. Dans ce §, E désignera un ensemble situé dans un espace métrique M, x_0 un point fixé de M et $S(r)$ l'ensemble des points $x\epsilon E$ tels que $\varrho(x, x_0)=r$.

Théorème 1. *E étant un ensemble de mesure $(p+1)$-dimensionnelle nulle $(p\geqslant 0)$, l'ensemble $S(r)$ est de mesure p-dimensionnelle nulle pour presque chaque $r>0$.*

Démonstration. 1° $p=0$. Posons $f(x)=\varrho(x, x_0)$ pour chaque $x\epsilon E$. La fonction f est un raccourcissement, car on a pour $x, y\epsilon E$:

$$|f(x)-f(y)|=|\varrho(x, x_0)-\varrho(y, x_0)|\leqslant\varrho(x, y).$$

Par conséquent, E étant un ensemble de mesure linéaire nulle, l'ensemble $f(E)$ l'est également [d'après § 1 (vii)]. D'autre part:

$$f(E)=\underset{r}{\mathrm{E}}[S(r)\neq 0]=\underset{r}{\mathrm{E}}\{L^{(0)}[S(r)]>0\},$$

on a donc $L^{(0)}[S(r)]=0$ pour presque chaque $r>0$.

[4]) Cf. Hausdorff, l. c., pp. 158 et 166.

Il résulte directement de cette partie du théorème que *chaque ensemble de mesure linéaire nulle est de dimension* 0 [5]). Cette proposition entraîne la proposition suivante: *Chaque ensemble E (situé dans un espace métrique séparable) qui ne contient aucun sous-ensemble indénombrable non-dense dans E est de dimension* 0 [6]). Pour la démonstration, il suffit de rappeler que chaque ensemble de ce genre possède l'ainsi dite propriété (C) [7]) et que chaque ensemble à propriété (C) est de mesure linéaire nulle [8]).

2° [9]) $p>0$. L'ensemble E étant de mesure $(p+1)$-dimensionnelle nulle, il existe une suite double $\{E_j^m\}$ d'ensembles non vides bornés telle que

$$(*)\qquad E=E_1^m+E_2^m+\dots\quad\text{pour}\quad m=1, 2, \dots,$$

$$({*\atop *})\qquad \lim_{m=\infty}\sum_{j=1}^{\infty}[\delta(E_j^m)]^{p+1}=0.$$

Désignons par $r_j^{(m)}$ et $R_j^{(m)}$ respectivement les bornes inférieure et supérieure des nombres $\varrho(x, x_0)$ pour $x\epsilon E_j^m$. On voit facilement que

$$({**\atop *})\qquad \delta(E_j^m)\geqslant R_j^{(m)}-r_j^{(m)}.$$

Posons

$$d_j^{(m)}(r)=\begin{cases}0 & \text{pour}\quad 0<r<r_j^{(m)}\quad\text{et}\quad R_j^{(m)}<r,\\ [\delta(E_j^m)]^p & \text{pour}\quad r_j^{(m)}\leqslant r\leqslant R_j^{(m)},\end{cases}$$

$$d^{(m)}(r)=\sum_{j=1}^{\infty}d_j^{(m)}(r).$$

[5]) Cf. plus loin p. 86, théorème 2.

[6]) C. Kuratowski et W. Sierpiński, *Sur les ensembles qui ne contiennent aucun sous-ensemble indénombrable non-dense*, Fund. Math. 26 (1936), pp. 137—142, en particulier p. 138.

[7]) Théorème de M. Sierpiński; cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 274, proposition 5. Un ensemble E jouit de *la propriété* (C), lorsqu'il existe pour chaque suite de nombres positifs $\{a_n\}$ une décomposition $E=E_1+E_2+\dots$ telle que $\delta(E_n)<a_n$ pour $n=1, 2, \dots$

[8]) C'est une conséquence immédiate de la proposition (i) du § 1. Notons à ce propos que la condition $L^\varphi(E)=0$ *pour chaque* $\varphi\epsilon\Phi$ équivaut à la propriété (C) (A. S. Besicovitch, *Concentrated and rarified sets of points*, Acta Math. 62 (1934), pp. 289—300, en particulier p. 290).

[9]) Ce raisonnement repose sur la même idée que la démonstration de M. Nöbeling de l'inégalité citée plus loin (§ 4 (i), p. 89). — Selon une remarque de M. S. Eilenberg, cette partie de notre démonstration embrasserait aussi le cas de $p=0$, si l'on admet la convention suivante: $[\delta(0)]^0=0$ et, pour tout ensemble E non vide, $[\delta(E)]^0=1$.

La définition de $d_j^{(m)}(r)$ et la relation $\binom{**}{*}$ entraînent

$$\int_0^R d_j^{(m)}(r)\,dr \leqslant [\delta(E_j^m)]^{p+1} \qquad \text{pour} \quad R > 0.$$

Chaque fonction $d_j^{(m)}(r)$ étant non négative, on a donc

$$\int_0^R d^{(m)}(r)\,dr = \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^R d_j^{(m)}(r)\,dr \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}[\delta(E_j^m)]^{p+1}.$$

En vertu de $\binom{*}{*}$, la suite des fonctions $d^{(m)}(r)$ converge donc en moyenne vers 0 dans l'intervalle $0 \leqslant r \leqslant R$; il existe par conséquent une suite partielle $d^{(k_m)}(r)$ qui tend presque partout vers 0 dans cet intervalle [10]).

Il en résulte en vertu de la relation

$$\{\delta[E_j^m \cdot S(r)]\}^p \leqslant d_j^{(m)}(r)$$

qu'on a presque partout dans l'intervalle $0 \leqslant r \leqslant R$:

$$\lim_{m=\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta[E_j^{k_m}\cdot S(r)]\}^p = 0.$$

D'après (*), on a donc $L^{(p)}[S(r)] = 0$ pour presque chaque nombre $r > 0$, c. q. f. d.

Remarquons que la deuxième partie de ce théorème (cas $p > 0$) peut être généralisée facilement comme il suit: *Soient* $\varphi \epsilon \Phi$ *et* $\psi(x) = x\cdot\varphi(x)$. *E étant un ensemble tel que* $L^{\psi}(E) = 0$, *on a* $L^{\varphi}[S(r)] = 0$ *pour presque chaque* $r > 0$.

Le théorème 1 donne par l'induction le

Théorème 2. *Chaque ensemble de mesure* $(n+1)$*-dimensionnelle nulle* $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *est de dimension* $\leqslant n$.

§3. ***Théorème 3.*** *Si la fonction* L^{φ} *est d'un ordre supérieur que la fonction* $L^{(n)}$, *chaque ensemble E de dimension* $\leqslant n$ *(situé dans un espace métrique séparable) est homéomorphe à un sous-ensemble* E^* *de* I^{2n+1} *tel que* $L^{\varphi}(E^*) = 0$.

[10]) Cf. p. ex. E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable*, vol. II, Cambridge 1926, p. 242.

Démonstration [11]). En vertu du théorème de M. Hurewicz d'après lequel chaque ensemble séparable est homéomorphe à un sous-ensemble d'un ensemble compact de même dimension [12]), on peut supposer, sans restreindre la généralité, que E est un ensemble compact.

Désignons par **C** l'espace des transformations continues de E en sous-ensembles de I^{2n+1} [13]), par **H** la classe des homéomorphies appartenant à **C**, par **K** celle des éléments de **C** qui transforment E en ensembles pour lesquels la fonction L^{φ} s'annule et enfin par **K*** la famille des éléments de **C** qui transforment E en sous-ensembles des polyèdres à n dimensions.

La fonction L^{φ} étant d'un ordre supérieur que la fonction $L^{(n)}$, on a d'après § 1 (iii): $\mathbf{K}^* \subset \mathbf{K}$.

D'autre part, l'ensemble **K*** est dense dans **C** [14]); par conséquent:

(i) La classe **K** est dense dans **C**.

(d) désignant une décomposition finie de l'ensemble E:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_N$$

et m étant un nombre naturel, désignons par $\mathbf{F}_m^{(d)}$ la classe de toutes les transformations $f \epsilon \mathbf{C}$ telles que

$$\sum_{j=1}^{N}\varphi\{\delta[f(E_j)]\} \geqslant \frac{1}{m}.$$

En vertu de § 1 (ii), on a donc

$$(*) \qquad \mathbf{C} - \mathbf{K} = \sum_{m=1}^{\infty}\prod_{(d)}\mathbf{F}_m^{(d)},$$

le produit $\prod_{(d)}$ s'étendant à toutes les décompositions (d).

[11]) J'ai obtenu d'abord ce théorème, en m'appuyant sur le résultat de MM. Pontrjagin et Schnirelmann, l. c., p. 161 (cf. aussi § 4 [19])). La démonstration directe, donnée dans le texte, est due à M. S. Eilenberg.

[12]) *Über Einbettung separabler Räume in gleichdimensionale kompakte Räume*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 37 (1930), pp. 199—208.

[13]) On pose, comme d'habitude, $\varrho(f_1, f_2) = \underset{x \epsilon E}{\operatorname{Max}}\, \varrho[f_1(x), f_2(x)]$ pour chaque $f_1 \epsilon \mathbf{C}$, $f_2 \epsilon \mathbf{C}$.

[14]) W. Hurewicz, *Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen cartesischer Räume*, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1933, pp. 754—768, en particulier p. 758 et p. 759 [1]).

Le nombre $\delta[f_n(Z)]$ pour $Z \subset E$ tendant vers $\delta[f(Z)]$ pendant que la transformation $f_n \in \mathbf{C}$ tend vers f, et la fonction φ étant continue, la classe $\mathbf{F}_m^{(d)}$ constitue un sous-ensemble fermé dans $\mathbf{F}$. Il en résulte en vertu de (*) que

(ii) La classe $\mathbf{K}$ est un G_δ.

$\mathbf{C}$ étant un espace complet et la classe $\mathbf{H}$ étant, comme on sait, un G_δ dense dans $\mathbf{C}$ [15]), on conclut de (i) et (ii) que

(iii) La classe $\mathbf{KH}$ est un G_δ dense dans $\mathbf{C}$.

Cette classe est donc non vide, c. q. f. d.

Soit $\varphi(x)$ une fonction appartenant à Φ, égale à $-x^n/lg\,x$ dans l'intervalle $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$. Par conséquent $\lim_{x=0}[\varphi(x)/x^n]=0$ et $\lim_{x=0}[x^p/\varphi(x)]=0$ pour tout $p>n$, d'où on obtient d'après § 1 (v) le

Corollaire 4. *Chaque ensemble de dimension $\leqslant n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ est homéomorphe à un ensemble (situé dans I^{2n+1}) qui est de mesure p-dimensionnelle nulle pour tous les nombres réels $p>n$.*

Le problème s'impose: peut-on aller plus loin et démontrer qu'il existe pour chaque ensemble E de dimension $\leqslant n$ $(n=1, 2, \ldots)$ un ensemble homéomorphe à *E de mesure n-dimensionnelle finie?* La réponse est *négative*: le produit cartésien du segment rectiligne et de l'ensemble non-dense de Cantor est un ensemble de dimension 1 et en même temps chacune de ses images homéomorphes, en tant que composée d'une infinité indénombrable d'arcs simples, est de mesure linéaire infinie.

Le corollaire 4 donne aussi lieu aux considérations suivantes. D'après ce corollaire, tout ensemble E de dimension $\leqslant 1$ (situé dans l'espace métrique séparable) est homéomorphe à un ensemble E^* de mesure superficielle nulle, situé dans I^3. Or, *dans le cas de l'ensemble E situé dans le carré I^2, on peut trouver l'ensemble E^* situé aussi dans I^2* [16]). En effet, chaque ensemble plan de dimension $\leqslant 1$ est homéomorphe à un sous-ensemble de l'ainsi dite courbe universelle de M. Sierpiński [17]). Cette courbe est de mesure superficielle nulle. — En modifiant légèrement la construction de cette courbe, on peut obtenir d'ailleurs une courbe plane analogue et qui soit de mesure p-dimensionnelle nulle pour tous les $p>1$ à la fois.

---

[15]) Voir la démonstration de M. W. Hurewicz (l. c., pp. 757—759) de l'„Einbettungssatz" de MM. Menger et Nöbeling.

[16]) C'est la réponse partielle à un problème de M. W. Sierpiński.

[17]) K. Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie*. Fund. Math. 10 (1927), pp. 96—115, en particulier p. 106.

§ 4. Les théorèmes 2 et 3 donnent le

Théorème 5. *Soit L^φ une fonction d'un ordre supérieur à celui de la fonction $L^{(n)}$, mais inférieur ou égal à celui de la fonction $L^{(n+1)}$. Pour qu'un ensemble E (situé dans un espace métrique séparable) soit de dimension $\leqslant n$, il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un ensemble E^* (situé dans I^{2n+1}) tel que $L^\varphi(E^*)=0$.*

En posant $\varphi(x)=x^{n+1}$, nous en tirons en vertu de § 1 (vi) l'énoncé de l'Introduction (p. 82).

Étant donné dans un espace métrique séparable un ensemble non vide E, soit $h(E)$ la borne supérieure des p réels pour lesquels $L^{(p)}(E)>0$ (M. Nöbeling appelle ce nombre *dimension de Hausdorff* de l'ensemble E). Il résulte du théorème 2 que

(i) $$h(E) \geqslant dim\,(E)\ ^{18}).$$

On conclut de cette inégalité et du corollaire 4 que

(ii) *La borne inférieure des nombres $h(E^*)$, où E^* parcourt tous les ensembles homéomorphes à E, est un nombre naturel: elle est égale à la dimension de E* [19]).

---

[18]) L'inégalité démontrée par M. Nöbeling, l. c. Il est à remarquer que cette inégalité n'implique pas le théorème 2, puisqu'il existe des ensembles E de mesure n-dimensionnelle nulle pour lesquels $h(E)=n$.

[19]) MM. Pontrjagin et Schnirelmann (l. c.) ont défini la notion de *l'ordre métrique d'un ensemble compact*, analogue à la fonction $h(E)$, et ils ont démontré un théorème concernant cette notion, analogue à la proposition (ii).