Pour terminer, nous allons démontrer le théorème suivant, dû à M. S. Ruziewicz:

Théorème 4. *Si l'ensemble E et la relation R satisfont aux conditions du problème **P**, l'ensemble S de tous les systèmes (x, y) tels que $x \epsilon E$, $y \epsilon E$, $x \operatorname{non} R y$ et $y \operatorname{non} R x$, est de même puissance que E.*

Démonstration. Supposons, en effet que dans ces conditions l'ensemble S de tous les systèmes (x, y), tels que $x \epsilon E$, $y \epsilon E$, $x \operatorname{non} R y$ et $y \operatorname{non} R x$ soit de puissance $\mathfrak{n}_1 < \overline{\overline{E}} = \mathfrak{n}$. L'ensemble T de tous les éléments y de E pour lesquels il existe (au moins) un élément x de E tel que $(x, y) \epsilon S$ serait donc de puissance $\mathfrak{n}_2 \leqslant \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{n}$.

Soit $x_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ une suite infinie quelconque formée d'éléments distincts de E. Pour tout n naturel, l'ensemble H_n de tous les éléments y de E tels que $x_n R y$ est (vu les conditions du problème **P**) fini. L'ensemble $H = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$ est donc au plus dénombrable et l'ensemble $T+H$ est de puissance $\leqslant \mathfrak{n}_2 + \aleph_0 < \mathfrak{n}$. Il existe donc un élément y_0 de E tel que $y_0 \operatorname{non} \epsilon\, T+H$. On a donc $y_0 \operatorname{non} \epsilon H_n$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$.

Soit n un nombre naturel donné quelconque. Comme $y_0 \operatorname{non} \epsilon H_n$, on conclut de la définition de H_n que $x_n \operatorname{non} R y_0$. Si on avait en même temps $y_0 \operatorname{non} R x_n$, on aurait d'après la définition de S $(x_n, y_0) \epsilon S$, donc $y_0 \epsilon T$, contrairement à la définition de y_0. On a par conséquent $y_0 R x_n$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$, ce qui est incompatible avec la condition du problème **P** imposée à la relation R (puisque $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est une suite infinie d'éléments *distincts* de E). Il est donc impossible que $\overline{\overline{S}} = \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{n} = \overline{\overline{E}}$ et le théorème 4 se trouve démontré.

Czerchawa, Août 1936.

Sur les groupes compacts d'homéomorphies.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

1. Soit Z un espace topologique et X un espace métrique borné. X^Z désignera la famille de toutes les transformations continues de Z en sous-ensembles de X. En posant pour $f_1, f_2 \epsilon X^Z$

$$|f_1 - f_2| = \sup_{z \epsilon Z} \varrho(f_1(z), f_2(z)),$$

où $\varrho(x_1, x_2)$ désigne la distance entre les points $x_1, x_2 \epsilon X$, la famille X^Z devient un espace métrique. La topologie de cet espace dépend, en général, du choix de la métrique dans X [1]). On peut montrer qu'elle n'en dépend pas, si X est compact.

2. ***Lemme.*** *Quelle que soit la famille compacte* [2]) $\Phi \subset I^Z$ [3]), *la fonction*

$$F(z) = \sup_{f \epsilon \Phi} f(z)$$

est continue pour tout $z \epsilon Z$.

Démonstration. La famille Φ étant compacte, il existe pour tout $z \epsilon Z$ une fonction $f_z \epsilon \overline{\Phi}$ telle que $F(z) = f_z(z)$.

Soit $z = \lim_n z_n$ où $z_n \epsilon Z$. On a pour tout $n = 1, 2, \ldots$

$$F(z_n) = f_{z_n}(z_n) \geqslant f_z(z_n) \qquad \text{et} \qquad \lim_n f_z(z_n) = f_z(z) = F(z),$$

d'où $\liminf_n F(z_n) \geqslant F(z)$. Supposons que $\limsup_n F(z_n) > F(z)$. En remplaçant $\{z_n\}$ par une suite partielle, on pourrait donc admettre que $\lim_n F(z_n) = F(z) + \eta$ où $\eta > 0$. La compacité de $\overline{\Phi}$ permet

---

[1]) J'entends ici par *métrique* toute fonction de deux variables qui jouit des bien connues propriétés formelles de la distance et qui est *équivalente* à la métrique ϱ de X, c. à d. y détermine la même topologie que ϱ.

[2]) à distinguer de *compacte en soi*.

[3]) I désignant l'intervalle clos 0,1.

d'extraire de $\{f_{z_n}\}$ une suite $\{f_{z_{n_i}}\}$ convergente. Soit $f \in \overline{\Psi}$ la limite de cette dernière. On aurait alors $\lim_n F(z_{n_i}) = \lim_n f_{z_{n_i}}(z_{n_i}) = f(z)$, d'où $f(z) = F(z) + \eta$, contrairement à la définition de F.

3. Appelons, pour abréger, *famille close* toute famille $\Phi \subset X^X$ qui est close par rapport à la superposition, c. à d. telle que les superpositions $f_2 f_1$ et $f_1 f_2$ de deux fonctions f_1 et f_2 appartenant à Φ, appartiennent à Φ.

Théorème. *X étant un espace métrique borné et $\Phi \subset X^X$ une famille close compacte, on peut remplacer la métrique ϱ de X par une métrique ϱ' telle que toute fonction $f \in \Phi$ soit un raccourcissement, c. à d. que*

$$\varrho'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varrho'(x_1, x_2) \qquad \textit{pour} \qquad x_1, x_2 \in X.$$

Démonstration. La métrique ϱ étant bornée, on peut admettre que $\varrho(x_1, x_2) \leqslant 1$ pour tous $x_1, x_2 \in X$. On peut admettre aussi que la transformation $f_0(x) \equiv x$ appartient à Φ (en l'ajoutant au besoin à Φ). Posons pour $x_1, x_2 \in X$

$$(1) \qquad \varrho'(x_1, x_2) = \sup_{f \in \Phi} \varrho(f(x_1), f(x_2)).$$

On verifie aisément que la fonction ϱ' jouit des propriétés formelles de la métrique.

Nous allons montrer que les métriques ϱ et ϱ' sont équivalentes. L'identité f_0 appartenant à Φ, on tire de (1) $\varrho(x_1, x_2) \leqslant \varrho'(x_1, x_2)$, d'où il résulte facilement que la relation $\lim_n \varrho'(x_n, x_0) = 0$ implique $\lim_n \varrho(x_n, x_0) = 0$. D'autre part, considérons ϱ comme la métrique dans X et faisons correspondre à toute fonction $f \in \Phi$ la fonction

$$F_f(x) = \varrho(f(x), f(x_0)) \qquad \text{pour} \qquad x \in X.$$

Les fonctions $F_f \in I^X$ forment alors une famille compacte Ψ. En vertu du lemme, la fonction

$$\varrho'(x, x_0) = \sup_{F \in \Psi} F(x)$$

est continue pour tout $x \in X$. La relation $\lim_n \varrho(x_n, x_0) = 0$ implique donc $\lim_n \varrho'(x_n, x_0) = \varrho'(x_0, x_0) = 0$.

L'équivalence de ϱ et ϱ' étant ainsi établie, reste à prouver que toute fonction $f \in \Phi$ est un raccourcissement par rapport à ϱ'.

Supposons, par contre, que l'on ait

$$(2) \qquad \varrho'(x_1, x_2) < \varrho'(f(x_1), f(x_2))$$

pour un $f \in \Phi$ et un couple de points $x_1, x_2 \in X$. Or, selon la définition (1) de ϱ', on a

$$\varrho'(f(x_1), f(x_2)) = \sup_{f' \in \Phi} \varrho(f'f(x_1), f'f(x_2));$$

il existerait donc selon (2) un $f' \in \Phi$ tel que

$$\varrho'(x_1, x_2) < \varrho(f'f(x_1), f'f(x_2)),$$

contrairement à (1), puisque la superposition $f'f$ appartient à la famille close Φ.

Dans la suite, nous allons donner une série d'applications, d'ailleurs assez proches, du théorème qui vient d'être établi.

4. Désignons par $\mathfrak{H}(X)$ la famille de toutes les homéomorphies $f \in X^X$ telles que $f(X) = X$. L'ensemble $\mathfrak{H}(X)$ est un groupe avec l'opération de superposition comme celle du groupe [4]).

Théorème. *X étant un espace métrique borné et $\mathfrak{G}$ un sous-groupe compact de $\mathfrak{H}(X)$, on peut remplacer la métrique ϱ de X par une métrique ϱ' telle que toute transformation $f \in \mathfrak{G}$ soit une isométrie, c. à d. que*

$$\varrho'(f(x_1), f(x_2)) = \varrho'(x_1, x_2) \qquad \text{pour} \qquad x_1, x_2 \in X.$$

Ce théorème résulte immédiatement du précédent, car si une homéomorphie f et son inverse f^{-1} sont des raccourcissements, f est une isométrie.

---

[4]) Cependant $\mathfrak{H}(X)$ n'est pas nécessairement un groupe *topologique*. En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la relation $f_n \to f_0$ implique pour tout $f \in \mathfrak{H}(X)$:

$$1^0 \quad f_n f \to f_0 f, \qquad 2^0 \quad f f_n \to f f_0, \qquad 3^0 \quad f_n^{-1} \to f_0^{-1}.$$

Or, 1^0 est vrai toujours, 2^0 est vrai, si X est compact et 3^0 peut être même alors en défaut.

Si l'on pose pour $f_1, f_2 \in \mathfrak{H}(X)$

$$|f_1 - f_2|^* = |f_1 - f_2| + |f_1^{-1} - f_2^{-1}|,$$

on obtient un espace métrique $\mathfrak{H}^*(X)$ qui est déjà un groupe topologique, mais en général différent de l'espace $\mathfrak{H}(X) \subset X^X$.

Tous les raisonnements ultérieurs concernant $\mathfrak{H}(X)$ sont valables également pour $\mathfrak{H}^*(X)$.

5. Soit maintenant X un espace compact métrisable. La topologie de X^X, et par conséquent celle de $\mathfrak{H}(X)$, ne dépend évidemment pas du choix de la métrique de X.

Etant donné une métrique ϱ de X, nous désignerons par $\mathfrak{I}(\varrho)$ le sous-groupe de $\mathfrak{H}(X)$ composé de toutes les transformations isométriques. On prouve facilement que $\mathfrak{I}(\varrho)$ *est un groupe topologique* (même métrique), *compact en soi*. Le théorème précédent entraîne donc ce

Théorème. *X étant un espace compact métrisable, la classe des sous-groupes compacts de $\mathfrak{H}(X)$ coïncide avec celle des sous-groupes des groupes $\mathfrak{I}(\varrho)$, où ϱ parcourt toutes les métriques de X.*

6. L'espace X est dit *métriquement homogène*, lorsqu'il existe une métrique ϱ de X pour laquelle le groupe $\mathfrak{I}(\varrho)$ est transitif [5]).

Le théorème qui précède permet donc de caractériser d'une façon purement topologique l'homogénéité métrique des espaces compacts:

Théorème. *Pour qu'un espace compact métrisable X soit métriquement homogène, il faut et il suffit que $\mathfrak{H}(X)$ contienne un sous-groupe compact transitif.*

7. Soit X un groupe topologique métrisable et compact. Faisons correspondre à tout couple $x_1, x_2 \in X$ l'homéomorphie

$$f_{x_1 x_2}(x) = x_1 \cdot x \cdot x_2.$$

Ces homéomorphies forment un sous-groupe compact de $\mathfrak{H}(X)$. Il existe donc d'après **5** une métrique ϱ de X pour laquelle ces homéomorphies sont des isométries. On a donc

$$\varrho(x_1 \cdot x \cdot x_2,\ x_1 \cdot x' \cdot x_2) = \varrho(x, x'),$$

quels que soient $x, x', x_1, x_2 \in X$, d'où en particulier

$$\varrho(x_1 \cdot x,\ x_1 \cdot x') = \varrho(x, x') = \varrho(x \cdot x_2,\ x' \cdot x_2),$$

ce qui veut dire que X est un groupe métrique. On obtient donc le théorème suivant, qui est un cas particulier d'un théorème de M. D. van Dantzig [6]):

[5]) Le sous-groupe $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}(X)$ est dit *transitif*, lorsque, pour tout couple $x_1, x_2 \in X$, il existe un $f \in \mathfrak{G}$ tel que $f(x_1) = x_2$.

L'homogénéité *métrique* est à distinguer de celle *topologique*, à savoir de la transitivité du groupe $\mathfrak{H}(X)$.

[6]) Math. Ann. 107 (1932), p. 616.

Théorème. *Tout groupe topologique métrisable et compact se laisse métriser de façon qu'il devienne un groupe métrique.*

8. MM. H. Freudenthal et W. Hurewicz [7]) ont démontré récemment que *X étant compact, tout raccourcissement $f \in X^X$ tel que $f(X) = X$ est une isométrie*. Il en résulte en vertu de **3** le suivant

Théorème. *X étant un espace compact métrisable et $\Phi \subset X^X$ une famille compacte close, il existe une métrique ϱ de X telle que toutes les transformations $f \in \Phi$ sont des raccourcissements, et en particulier celles où $f(X) = X$ sont des isométries.*

Corollaire. *X étant un espace compact métrisable et $\Phi \subset \mathfrak{H}(X)$ une famille compacte close, il existe un sous-groupe compact $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{H}(X)$ contenant Φ.*

Il suffit, en effet, de prendre $\mathfrak{G} = \mathfrak{I}(\varrho)$ où ϱ est donné par le théorème précédent.

9. Nous dirons que la transformation $f \in X^X$ est un *raccourcissement topologique*, lorsqu'il existe une métrique de X telle que f soit un raccourcissement. On définira d'une manière analogue la notion *d'isométrie topologique*.

Soit X un espace métrique compact. Les raccourcissements et les isométries forment alors dans X^X des familles compactes en soi et closes. En vertu de **3** et **8**, on a donc le théorème suivant:

Théorème. *X étant un espace compact métrisable,*

a) pour qu'une transformation $f \in X^X$ soit un raccourcissement topologique, il faut et il suffit que la suite $\{f^n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des itérées de f forme une famille compacte.

b) pour qu'une transformation $f \in X^X$ soit une isométrie topologique, il faut et il suffit que $f(X) = X$ et que la suite $\{f^n\}$ forme une famille compacte.

c) pour qu'une homéomorphie $f \in \mathfrak{H}(X)$ soit une isométrie topologique, il faut et il suffit que la suite $\{f^n\}$ forme une famille compacte [8]).

d) pour qu'une homéomorphie $f \in \mathfrak{H}(X)$ soit une isométrie topologique, il faut et il suffit que les suites $\{f^n\}$ et $\{f^{-n}\}$ forment une famille compacte.

[7]) Fund. Math. 26 (1936), p. 120. Ce th. se trouve aussi dans la Thèse de M. A. Lindenbaum. (Université de Varsovie, 1927, non publiée).

[8]) C'est déjà en 1934 que M. J. Schreier a attiré mon attention sur les homéomorphies satisfaisant à cette condition.

10. Une famille de fonctions $\Phi \subset X^X$ est dite uniformément continue au point $x \epsilon X$, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $\varrho(x_1, x) < \eta$ implique l'inégalité $\varrho(f(x_1), f(x)) < \varepsilon$ pour tout $f \epsilon \Phi$.

On prouve sans peine que

(*) *X étant un espace métrique compact, les familles compactes $\Phi \subset X^X$ coïncident avec celles uniformément continues en tout point.*

Une homéomorphie $f \epsilon \mathfrak{H}(X)$ est dite d'après M. B. von Kerékjártó [9]) *régulière* au point $x \epsilon X$, lorsque la famille composée de deux suites $\{f^n\}$ et $\{f^{-n}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ est uniformément continue en ce point. En vertu de (*) et de **9** *d*), on a le théorème suivant:

Théorème. *X étant un espace compact métrisable, les homéomorphies $f \epsilon \mathfrak{H}(X)$ régulières en tous les points coïncident avec les isométries topologiques.*

Cet énoncé permet de formuler comme il suit deux théorèmes de M. B. v. Kerékjártó [10]).

Théorème. *Pour qu'une homéomorphie qui transforme la surface de sphère en elle-même sans point invariant et sans changement d'orientation soit topologiquement équivalente à une transformation linéaire elliptique, il faut et il suffit qu'elle soit une isométrie topologique.*

Théorème. *S étant une surface à 2 dimensions (close ou bornée) de genre $p > 1$, pour qu'une transformation homéomorphe de S en elle-même soit topologiquement équivalente à une représentation conforme, il faut et il suffit qu'elle soit une isométrie topologique.*

---

[9]) C. R. Paris 198 (1934), p. 317.

[10]) Acta Szeged 6 (1934), p. 236; Acta Szeged 7 (1936), p. 73 et 76.

La dimension et la mesure *).

Par

Edward Szpilrajn (Warszawa).

Introduction. Dans la géométrie élémentaire, la notion de *dimension* et celle de *mesure* sont en liaison manifeste: on définit la *longueur* pour des *lignes*, l'*aire* pour des *figures*, le *volume* pour des *corps*.

Il y a actuellement d'une part la théorie de dimension au sens, déjà classique, de Brouwer-Menger-Urysohn; il y a, d'autre part, les théories de la mesure, en particulier celle de la mesure p-dimensionnelle due à MM. Carathéodory et Hausdorff [1]). Dans ces théories, on définit la dimension et la mesure (extérieure) non seulement pour les figures de la géométrie élémentaire, mais d'une manière générale pour les ensembles métriques tout-à-fait arbitraires. Il paraît donc intéressant de lier les deux notions en toute leur généralité.

Or, la relation entre la dimension et la mesure n'est pas immédiate: p. ex. l'ensemble des points du plan à deux coordonnées irrationnelles est de dimension 0, tandis que sa mesure superficielle est positive. Cette divergence est d'ailleurs bien naturelle, la dimension étant une notion topologique et la mesure une notion métrique. Cependant la relation entre elles se laisse formuler d'une

---

*) Les résultats principaux de cet ouvrage ont fait l'objet de ma communication au Congrès International des Mathématiciens à Oslo 1936.

[1]) Voir F. Hausdorff, *Dimension und äusseres Mass*, Math. Ann. 79 (1919), pp. 157—179; S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów (à paraître), pp. 53 et 54.