Sur un problème concernant les fonctions semi-continues.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Je me propose de résoudre ici (à l'aide de l'hypothèse du continu) le même problème pour les fonctions semi-continues que j'ai résolu pour les fonctions de classe 1 de Baire [1]). Je démontrerai notamment ce

Théorème. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe une fonction* $f(x)$ *d'une variable réelle, semi-continue supérieurement, et un ensemble linéaire* E *indénombrable et tel que la fonction* $f(x)$ *est discontinue sur tout sous--ensemble indénombrable de* E.

La démonstration de ce théorème sera basée sur la modification d'un raisonnement dont M. Lusin s'était servi, d'ailleurs dans un autre but [2]).

Démonstration. Q étant un ensemble linéaire parfait et δ un nombre positif, il existe — comme on sait — une suite infinie $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ d'ensembles parfaits de diamètre $<\delta$, disjoints, situés dans Q, non-denses dans Q et tels que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ est dense dans Q.

Il en résulte en particulier l'existence d'un système d'ensembles parfaits $\{P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ situés dans l'intervalle $(0,1)$ et assujettis aux conditions: les ensembles P_n $(n=1,2,3,\ldots)$ sont disjoints deux

---

[1]) *Fund. Math.* t. 27, p. 191.

[2]) N. Lusin, *Fund. Math.* t. 21, p. 119—122; cf. aussi mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1934, p. 65—67.

à deux, non-denses et tels que leur somme est dense dans $(0,1)$; en outre, quels que soient les nombres naturels $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ et n, les ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ sont de diamètre $<1/k$, disjoints deux à deux, situés dans l'ensemble $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, non-denses dans lui et tels que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$ y est dense.

Posons pour $k=1, 2, 3, \ldots$

$$S_k = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \tag{1}$$

où la sommation s'étend à tous les systèmes de k nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Soit

$$T = S_1 S_2 S_3 \ldots \tag{2}$$

Soit d'autre part y un nombre réel, $0<y\leqslant 1$ et

$$\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \ldots$$

le développement de y en fraction dyadique contenant une infinité de chiffres non nuls. On déduit de la définition des ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ que

$$Z(y) = P_{n_1} P_{n_1, n_2} P_{n_1, n_2, n_3} \ldots$$

est un point bien déterminé de l'ensemble T. La fonction $Z(y)$ établit, comme on voit sans peine, une correspondance biunivoque entre les nombres réels y tels que $0<y\leqslant 1$ et les points de l'ensemble T; il est aussi aisé à voir que la fonction $Z(y)$ est continue dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$.

Or, je dis que la fonction $f(x)$ définie dans l'ensemble T comme fonction inverse à la fonction $Z(y)$ (définie pour $0<y\leqslant 1$) est semi-continue supérieurement dans T.

En effet, il résulte sans peine des formules (2) et (1) et des propriétés du système $\{P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ l'existence pour tout $x_0 \epsilon T$ d'une suite (déterminée par le nombre x_0) de nombres naturels $m_1, m_2, m_3, \ldots$ telle que

$$x_0 \epsilon P_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad \text{pour} \quad k=1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

D'après la définition de la fonction $f(x)$ (pour $x \epsilon T$), on a

$$f(x_0) = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2+m_3}} + \ldots \tag{4}$$

Soient ε un nombre positif quelconque et s un nombre naturel pour lequel

$$\frac{1}{2^s} < \varepsilon. \tag{5}$$

Désignons pour tout nombre naturel i, par Φ_i la famille des m_i-1 ensembles $P_{m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, n}$ où $n<m_i$ et posons

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_s.$$

La famille Φ est évidemment formée d'un nombre fini (à savoir de $m_1+m_2+\ldots+m_s-s$) d'ensembles parfaits dont chacun est d'après les propriétés du système $\{P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ disjoint de l'ensemble parfait $P_{m_1, m_2, \ldots, m_s}$. Il existe donc un nombre positif δ tel que chacun des ensembles de la famille Φ est à une distance $\geqslant \delta$ de l'ensemble $P_{m_1, m_2, \ldots, m_s}$.

Soit maintenant x un nombre de T pour lequel $|x-x_0|<\delta$. D'après (3), le nombre x n'appartient donc à aucun des ensembles de la famille Φ. Or, comme $x \epsilon T$, il existe une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ telle que

$$x \epsilon P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad \text{pour} \quad k=1, 2, 3, \ldots$$

et, d'après le définition de la fonction $f(x)$ (pour $x \epsilon T$), on a

$$f(x) = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \ldots \tag{6}$$

Si $n_i = m_i$ pour tout $i=1, 2, \ldots, s$, on a évidemment selon (4), (6) et (5):

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_s}} \leqslant \frac{1}{2^s} < \varepsilon.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe un nombre naturel $p\leqslant s$ tel que l'on a $n_i=m_i$ pour $i<p$, mais $n_p \neq m_p$. Le nombre x n'appartenant à aucun des ensembles de la famille Φ, donc, à plus forte raison, à aucun des ensembles de la famille Φ_p, on a par conséquent

$n_p > m_p$, ce qui donne tout de suite en vertu de (4), (6) et l'égalité $n_i = m_i$ pour $i < p$: $f(x_0) > f(x)$.

On a donc toujours $f(x_0) > f(x) - \varepsilon$ pour $x \epsilon T$, lorsque $|x - x_0| < \delta$, ce qui prouve que la fonction $f(x)$ est dans T semi-continue supérieurement au point x_0. Ce dernier étant arbitraire, la fonction $f(x)$ est semi-continue supérieurement dans T. En tant que bornée dans T, elle peut donc être étendue à une fonction bornée $f(x)$ d'une variable réelle qui soit semi-continue supérieurement [1]).

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Comme l'a démontré M. Lusin [2]), il existe alors un ensemble linéaire indénombrable L qui ne contient aucun sous-ensemble indénombrable non-dense; de plus, on peut supposer que les éléments de L soient des nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$, donc que $L \subset N$. Je dis que l'ensemble $E = Z(L)$ est toujours de I-re catégorie.

En effet, soit P un ensemble linéaire parfait quelconque. Posons

(7) $$R = \underset{y}{\mathrm{E}}[y \epsilon N,\ Z(y) \epsilon P]$$

L'ensemble P étant fermé et la fonction $Z(y)$ continue dans l'ensemble N, l'ensemble R est fermé dans N. Comme tel, il admet donc une décomposition en deux ensembles disjoints

(8) $$R = R_1 + R_2$$

où R_1 est non-dense et R_2 ouvert dans N.

Nous allons montrer d'abord que l'ensemble $Z(R_2)$ est de I-re catégorie dans P.

Etant donné, en effet, une suite finie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, désignons par $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble de tous les nombres y de N dont le développement en fraction dyadique infinie réduit au rang $n_1 + n_1 + \ldots + n_k$ est

$$\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_1+n_2+\ldots+n_k}}.$$

L'ensemble $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est donc une *portion* de N, notamment le produit de N par l'intervalle

$$\left(\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_1+n_2+\ldots+n_k}},\ \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_1+n_2+\ldots+n_k-1}}\right).$$

[1]) Voir p. ex. v. Alexits, *Fund. Math.* 15, p. 53.

[2]) C. R. Paris t. 158, p. 1259 (Note du 4 mai 1914); cf. aussi *Fund. Math.* 6, p. 155.

On voit sans peine que tout ensemble ouvert dans N, donc en particulier l'ensemble R_2, est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. La définition de la fonction $Z(y)$ montre que

(9) $$Z(Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = TP_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

quelle que soit la suite finie d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Pour tout $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset R_2$ on a donc en vertu de (7), (8) et (9)

(10) $$TP_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset P$$

et on conclut des définitions de T et des ensembles parfaits $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ que T est dense dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$; ce dernier ensemble étant fermé (de même que P), on tire donc de (10):

(11) $$P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset P.$$

D'autre part, il vient selon la définition de T:

$$TP_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset \sum_{n=1}^{\infty} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n},$$

où le membre droit est de I-re catégorie dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ en tant que somme dénombrable d'ensembles non-denses dans lui. Il en est donc de même du membre gauche; en vertu de (11) et (9), on en conclut aussitôt que l'ensemble $Z(Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k})$ est de I-re catégorie dans P. L'ensemble R_2 étant composé d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, l'ensemble $Z(R_2)$ est donc encore de I-re catégorie dans P.

Or, comme $L \subset N$, on a d'après (7) $PZ(L) = Z(LR)$, d'où en vertu de (8) $PZ(L) = Z(LR_1) + Z(LR_2)$. L'ensemble R_1 étant non-dense et l'ensemble L ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable non-dense, l'ensemble LR_1 et par conséquent $Z(LR_1)$ est au plus dénombrable. Evidemment, on a $Z(LR_2) \subset Z(R_2)$ et $Z(R_2)$ est, comme nous avons montré, de I-re catégorie dans P. L'ensemble $PZ(L) = Z(LR_1) + Z(LR_2)$ est donc aussi de I-re catégorie dans P.

Il en résulte que l'ensemble linéaire indénombrable $E = Z(L)$ est toujours de I-re catégorie. Reste à montrer que la fonction $f(x)$ est discontinue sur tout ensemble indénombrable $H \subset E$.

Supposons dans ce but que $f(x)$ soit continue sur H. Comme $E=Z(L)$ et la fonction $f(x)$, définie dans T, est inverse à la fonction $Z(y)$ définie pour $0<y\leqslant 1$, on a $L=f(E)$. Par conséquent $f(H)\subset f(E)=L$. L'ensemble $f(H)$ est donc indénombrable et (en tant que sous-ensemble de L) ne contient aucun ensemble indénombrable non-dense. Comme tel, il ne jouit pas — on le sait — de la propriété de Baire.

Or, la fonction f étant par hypothèse continue sur H et la fonction $Z(y)$ continue sur N, donc à plus forte raison sur $f(H)\subset L\subset N$, la fonction $f(x)$ établit une homéomorphie entre les ensembles H et $f(H)$. L'ensemble H étant toujours de I-re catégorie (comme sous-ensemble de E), il en serait donc le même de $f(H)$, ce qui est toutefois impossible, puisque $f(H)$ ne jouit pas de la propriété de Baire. Ainsi la fonction $f(x)$ n'est pas continue sur H, c. q. f. d.

Comme toute fonction $f(x)$ définie sur un ensemble linéaire, semi-continue supérieurement sur cet ensemble et n'y prenant que des valeurs $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ se laisse étendre à une fonction d'une variable réelle, semi-continue supérieurement et ne prenant que des valeurs du même intervalle, on apperçoit sans peine, en analysant la démonstration de mon théorème de *Fund. Math.* t. 27, p. 191 (surtout p. 198), qu'elle fournit en même temps la démonstration de la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, de classe 1 de Baire, et un ensemble linéaire indénombrable E tel que la fonction $f(x)$ n'est semi-continue supérieurement sur aucun sous--ensemble indénombrable de E.

Eine projektive Menge der Klasse *PCA* im Funktionalraum.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Sei R die Menge aller reellen Zahlen, I das abgeschlossene Interval $\langle 0,1\rangle$. Dann bezeichnet $I\times I$ das Einheitsquadrat und $R^{I\times I}$ den Raum aller für $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ definierten stetigen Funktionen $f(x,y)$.

Nachstehend gebe ich im Raum $R^{I\times I}$ ein einfaches Beispiel einer projektiven Menge genau dritter Klasse [1]), d. h. einer *PCA*-Menge an.

Satz. *Die Menge Ψ aller $f\in R^{I\times I}$, welche für mindestens ein y für alle $x\in I$ nach x partiell differenzierbar sind, ist eine PCA-Menge.*

Beweis. Die logisch-symbolische Formel

$$(1)\qquad f\in\Psi\equiv\sum_{y}\prod_{x,m}\sum_{n}\prod_{r_1,r_2}\Big\{|x-r_1|<\frac{1}{n}>|x-r_2|\rightarrow$$
$$\rightarrow\left|\frac{f(r_1,y)-f(x,y)}{r_1-x}-\frac{f(r_2,y)-f(x,y)}{r_2-x}\right|\leqslant\frac{1}{m}\Big\},$$

wo $m,n=1,2,\ldots$ und r_1, r_2 rationale Zahlen aus I sind, zeigt, dass Ψ höchstens von der Klasse *PCA* ist.

---

[1]) in der Terminologie von Kuratowski: *Topologie I*, Monografje Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 234.