Sur les transformations des complexes en sphères.

Par

Solomon Lefschetz (Princeton).

On doit à M. H. Hopf la caractérisation des classes homotopes des transformations uniformes d'un n-complexe K_n en une n-sphère H_n [1]). Partant de ce résultat MM. Bruschlinski et Freudenthal [2]) ont mis en évidence certains groupes associés aux transformations uniformes, isomorphes aux duels, au sens de M. Pontrjagin des groupes de Betti des p-cycles mod 1 de K_n, pour les valeurs $p=1, n$. Ils ont également obtenu les mêmes résultats pour les espaces compacts de dimension finie. On peut ainsi arriver à certains groupes de Betti, en n'ayant recours à la topologie algébrique que pour les sphères. Nous établirons tout d'abord dans ce travail un résultat tout semblable pour toutes les valeurs de p. Il est d'ailleurs susceptible d'être étendu aux complexes ouverts $K_n - L$, L souscomplexe de K_n, et aux divers invariants *relatifs* associés. On en déduira notamment que les groupes de Betti entiers de K_n peuvent ainsi être associés *directement* à certains groupes de transformations de son voisinage sur une H_r convenable où K_n serait plongé. Pour les groupes de Betti de dimension zéro, ce résultat a déjà été obtenu par M. Freudenthal.

Notre méthode, entièrement nouvelle, se fonde sur l'emploi de transformations multiformes généralisant celles à la base de notre solution du problème des points fixes [3]). Elle nous semble d'ailleurs au moins aussi intéressante que les résultats que nous en tirons.

[1]) H. Hopf: Comm. Math. Helvet. vol. 5 (1933), pp. 39—54. Voir aussi l'ouvrage qui vient de paraître; Alexandroff-Hopf: *Topologie* I (Springer 1935), Ch. XIII, § 2).

[2]) N. Bruschlinski: Math. Ann. vol. 109 (1934), pp. 525—537; H. Freudenthal: Compositio Mathematica, vol. 2 (1935), pp. 134—162.

[3]) Voir notre ouvrage: *Topology*, Colloquium Lectures (New York 1930), Chapter VI. Nous emploierons autant que possible les notations et la terminologie de ce livre.

Comme il importe que l'on se rende nettement compte du rôle précis de la topologie algébrique dans ces questions, nous avons donné des indications très complètes et explicites sur ce que nous lui empruntons. Incidemment, nous avons aussi donné une démonstration très simplifiée du théorème de M. Hopf. Sa formulation est faite en termes des pseudocycles entiers [4]), qui jouent un rôle important dans ce travail. Les préliminaires (§ I, II), en apparence assez longs, sont néanmoins justifiés, car ils nous permettent d'avancer bien plus rapidement ensuite.

I. Généralités sur les complexes et leurs pseudocycles.

1. Soit K un complexe simplicial fini. Choisissons pour ses p- et $(p-1)$-chaînes des bases canoniques A_p^{ij}, A_{p-1}^{ij} telles en fait que l'on ait précisément (*Topology*, p. 37):

$$A_p^{i1} \to t_i A_{p-1}^{i1}, \qquad t_i > 1; \tag{1.1}$$

$$A_p^{i2} \to 0\,, \quad \text{mais} \quad non \sim 0; \tag{1.2}$$

$$A_p^{i3} \to A_{p-1}^{i3}; \tag{1.3}$$

$$t_i' A_p^{i4} \sim 0. \tag{1.4}$$

Les t sont les coefficients de torsion pour la dimension $p-1$. De plus, il y aura des chaînes A_{p-1}^{i5} dont aucun multiple n'est ~ 0. Les chaînes des deux premiers groupes sont celles qui importent surtout. Pour $p=n$, dimension de K, le dernier groupe manque, et pour $p=0$ le premier. Les classes homologiques des p-cycles mod 1 correspondent biunivoquement aux cycles

$$\Gamma_p \sim \frac{x_i}{t_i} A_p^{i1} + y_i A_p^{i2} \qquad 0 \leqq x_i < t_i, \qquad 0 \leqq y_i < 1, \tag{1.5}$$

où x_i est entier et y_i simplement réel.

Identifions maintenant K avec son image topologique, voire même polyédrale, sur une sphère euclidienne H_r convenable. A tout système d'entiers μ_i (arbitraire, mod t_i), ν_i (arbitraire), il correspond

[4]) Pour les coefficients rationnels, nous les avions déjà introduits au sujet du problème des points fixes dès 1930 (Annals of Mathematics, ser. 2, vol. 32 (1930), pp. 273—282; *Topology*, pp. 284, 341, 358). Il suffit de mettre en jeu les cycles mod 1 de M. Pontrjagin, pour avoir les pseudocycles entiers, retrouvés d'ailleurs récemment par divers auteurs (Alexander, Kolmogoroff, Whitney).

un cycle entier de H_r mod $H_r—K$ (chaîne à coefficients entiers de frontière ne rencontrant pas K) C_{r-p}, tel que ses indices de Kronecker avec les A_p soient

$$(A_p^{i1} \cdot C_{r-p}) = \mu_i, \qquad (A_p^{i2} \cdot C_{r-p}) = \nu_i.$$

Pour que $C_{r-p} \sim 0 \bmod H_r—K$, il faut et il suffit que $\mu_i \equiv 0 \bmod t_i$ et $\nu_i = 0$. Par suite, le $(r—p)$-ième groupe de Betti de H_r mod $H_r—K$ est isomorphe au groupe additif des ensembles (μ, ν) considérés comme coordonnées d'un espace vectoriel, à cela près que μ_i doit être pris mod t_i. Donc, le groupe de Betti g^p en question est abstraitement fixe. Il est, par suite, un invariant topologique de K et ses éléments, désignés par γ^p, sont les *p-pseudocycles entiers de* K. Le groupe g^p est le *duel* (au sens de Pontrjagin) du p-ième groupe de Betti mod 1, g_p de K. Le premier groupe est discret et le second compact. Si nous voulons préserver les notations d'homologie, nous devrons écrire $\gamma^p \sim 0$, lorsque $\mu_i \equiv 0 \bmod t_i$, $\nu_i = 0$ et alors seulement [5]).

2. Complexes, chaînes, cycles singuliers. Nous allons rappeler ici, pour la commodité du lecteur, certaines notions topologiques qui reviendront constamment dans la suite.

On entend par p-cellule singulière E_p sur un espace topologique $\mathfrak{S}$ un sous-ensemble $\tau\sigma_p$ de $\mathfrak{R}$ où σ_p est un p-simplexe et τ est une transformation uniforme continue (= t. u. c.) sur $\overline{\sigma}_p$. On convient que si $\sigma_p = \tau'\sigma'_p$ où τ' est affine, $\tau\tau'\sigma'_p$ définit toujours la même E_p sur $\mathfrak{R}$. Soit $K_n = \{\sigma_p^i\}$ un n-complexe simplicial fini. Supposons qu'il existe pour chaque σ_p^i une E_p^i singulière, et de plus une t. u. c. τ, de K_n en $\mathfrak{R}$ telle que $\tau\sigma_p^i = E_p^i$ pour chaque σ_p^i. On nomme l'ensemble $\mathfrak{K}_n = \{E_p^i\}$ un n-complexe *singulier* sur $\mathfrak{R}$. De même, les chaînes et cycles de K_n donnent lieu à des chaînes ou cycles *singuliers* de $\mathfrak{R}$, et ce sont eux que l'on envisage toujours.

On subdivise $\mathfrak{R}_n$, ou ses chaînes, en prenant les images de subdivisions de K_n (voir à ce sujet: *Topology*, p. 73 et notre Note du Bull. Amer. Math. Soc., vol. 39 (1933), pp. 124—129).

3. Homotopie. Soient K_n un complexe simplicial, σ_p^i ses cellules orientées, $K_{n+1} = K_n \times \alpha\beta$ le produit de K_n par un segment $\alpha\beta$. S'il existe sur $\mathfrak{R}$ une image singulière $\mathfrak{K}_{n+1}$ de K_{n+1} avec $\mathfrak{K}_n, \mathfrak{K}'_n$ comme images de $K_n \times \alpha$, $K_n \times \beta$, le passage de $\mathfrak{K}_n$ à $\mathfrak{K}'_n$ est nommé déformation ou *homotopie* de $\mathfrak{K}_n$ en $\mathfrak{K}'_n$ sur $\mathfrak{R}$. Cette homotopie des complexes est accompagnée d'une homotopie ϑ des chaînes de $\mathfrak{K}_n$ en celles de $\mathfrak{K}'_n$. Si C_p de K_n correspond à c_p, c'_p de $\mathfrak{K}_n, \mathfrak{K}'_n$, et que l'on dénote génériquement l'image de $C_p \times \alpha\beta$ par $\mathfrak{D}c_p$ (chaîne de déformation de c_p), on aura la relation fondamentale de frontière (*Topology*, p. 78):

$$\mathfrak{D}c_p \rightarrow c'_p — c_p — \mathfrak{D}F(c_p) \tag{3.1}$$

ou bien encore, en termes de la seule chaine c_p:

$$F\mathfrak{D}c_p = \vartheta c_p — c_p — \mathfrak{D}F(c_p). \tag{3.2}$$

En particulier, si e_p^i sont les cellules orientées de $\mathfrak{K}_n$, on aura les cellules de déformation $\mathfrak{D}e_p^i$. Pour que $\mathfrak{K}_n$ et $\mathfrak{K}'_n$, tous deux images du même K_n sur $\mathfrak{R}$, y soient homotopes, il faut et il suffit qu'il soit possible d'insérer successivement les cellules $\mathfrak{D}e_0^i, \mathfrak{D}e_1^i, \ldots$ de manière à satisfaire aux relations (3.1) ou (3.2).

Remarque. A la vérité K_{n+1} n'est pas simplicial, mais seulement *convexe*. Si l'on veut rester dans le domaine des complexes simpliciaux, on pourra remplacer K_{n+1} par son dérivé (subdivision barycentrique), mais peu importe pour ce qui suit.

Signalons deux homotopies commodes, associées à une n-cellule E_n. Prenons en pour image l'intérieur d'une $(n—1)$-sphère euclidienne H_{n-1} de centre A et rayon 1 et soit H_{n-1}^t la sphère concentrique de rayon t entre 0 et 1. Soient P un point variable de H_{n-1}, Q l'intersection de AP avec H_{n-1}^t. Nos homotopies sont toutes deux *radiales*. L'une est une *contraction* telle que $P \rightarrow Q$, l'autre une *expansion* telle que $Q \rightarrow P$ et segment $QP \rightarrow P$; de plus, les transformations entre AP et AQ sont par similitude pour toutes deux.

4. Alors que Hopf se rapporte dans ses recherches toujours au degré de Brouwer, notre instrument topologique primordial est fourni par le

Théorème 1 (*Alexander-Veblen*). *Tout p-complexe singulier $\mathfrak{K}_p$ sur un complexe simplicial K possède une subdivision homotope à un sous-complexe de dimension $\leqq p$ de K, et de même pour les chaînes singulières* (*Topology*, p. 86).

D'ailleurs, si $\mathfrak{K}_n$ et K ont un sous-complexe commun, l'homotopie peut être choisie de manière à le laisser fixe.

Corollaire. Tout cycle de K est $\sim$ un sous-cycle. Tout sous-cycle ~ 0 est la frontière d'une sous-chaîne de K.

C'est ce corollaire qui est à la base de la démonstration de l'invariance des groupes de Betti des complexes (*Topology*, p. 88).

5. Trois lemmes sur les sphères. Soit H_n une sphère topologique de dimension $n > 0$. Prenons en comme représentant une sphère euclidienne, que nous décomposons en cellules, en projetant sur elle à partir du centre les faces d'un simplexe σ_{n+1} régulier, inscrit. Nous désignerons indifféremment par H_n la sphère, le n-complexe résultant de la projection et son n-cycle fondamental orienté d'une certaine manière.

[5]) On pourrait d'ailleurs tout aussi bien remplacer dans la définition une base explicite pour les cycles par une base quelconque, un γ^p étant alors déterminé uniquement par les valeurs des nombres $(\Gamma_p \cdot C_{r-p})$ pris mod 1.

Lemme 1. *Soit K un complexe singulier sur H_n et L un sous-complexe de K de dimension $\leqq n-1$. Il existe une homotopie de K sur H_n réduisant L à un seul point.*

En effet, on peut supposer que K, L sont des sous-complexes de H_n (Théorème 1). Alors si A est un sommet de H_n et A' son antipode, $A' \cdot L = 0$. Par suite, une expansion radiale convenable de centre A', appliquée à la sphère percée en A, aura l'effet voulu [6]).

Lemme 2. *Une sphère singulière $\mathfrak{H}_n \sim 0$ sur H_n $(n > 0)$ y est homotope à un point* [7]).

On pourra supposer (Théorème 1) que $\mathfrak{H}_n$ est une transformée simpliciale TH_n. Alors, comme chaque σ_{n-1} de H_n est face de deux σ_n, et que $=$ et $\sim$ sont équivalents pour les n-cycles de H_n, le nombre algébrique d de fois que les σ_n sont recouverts par les $T\sigma_n$, $\sigma_n \epsilon H^n$, est fixe: c'est le *degré* de $\mathfrak{H}_n$ sur H_n. En particulier, on a ici $d = 0$. Un énoncé équivalent au nôtre est donc:

Lemme 2'. *Lorsque le degré d'une sphère singulière sur H_n est nul, elle y est homotope à un point.*

Notons qu'en vertu du Théorème 1 on sait que d est un invariant topologique de $\mathfrak{H}_n$ seule (donc indépendant du complexe recouvrant H_n), mais peu importe pour la suite.

Nous démontrerons d'ailleurs tout aussi facilement ce lemme plus général:

Lemme 3. *Une sphère singulière $\mathfrak{H}_n$ sur H_n y est homotope à une sphère transformée simpliciale TH_n en H_n, telle que chaque σ_n de H_n soit recouvert par exactement d transformés $T\sigma_n$.*

6. Supposons qu'un σ_n au moins soit recouvert de deux $T\sigma_n$ avec signes opposés. Je dis que l'on pourra réduire de 2 le nombre de $T\sigma_n$ non dégénérés, c'est à dire recouvrant des $\pm\sigma_n$ effectivement.

---

[6]) Le même argument a été employé récemment par M. Whitney au cours d'une démonstration (encore inédite) du théorème de Hopf.

[7]) En substance, les lemmes 2, 3 ont déjà été démontrés par Hopf (Recueil Soc. Math. de Moscou, vol. 37 (1932), pp. 53—62). Cependant notre démonstration, comme le reste de notre traitement, entre dans un cadre quelque peu différent, notamment en certains points de **7**, importants pour la suite et que seuls nous donnerons avec tous détails.

Le cas $n=1$ demande un traitement séparé. Il y aura alors un $\bar\sigma_1 = \overline{\alpha\beta}$ de H_1 et un arc orienté $l = \bar\sigma_1^{*1} + \ldots + \bar\sigma_1^{*r}$ de H_1 tels que $T\bar\sigma_1^{*1} = \overline{\alpha\beta}$, $T\bar\sigma_1^{*r} = \overline{\beta\alpha}$, $T\bar\sigma_1^{*i} = \beta$, $1 < i < r$. Alors l est homotope sur H_1 au point α, après quoi $T\sigma_1^{*1}$, $T\sigma_1^{*r}$ sont aussi dégénérés.

Soit maintenant $n > 1$ et supposons le résultat désiré acquis pour $n-1$. Soit donc $T\sigma_n^{*1} = -T\sigma_n^{*2} = \sigma_n$. Considérons pour l'instant H_n^* comme un S_n avec un seul point à l'infini, qui ne sera ni sur $\bar\sigma_n^{*1}$ ni sur $\bar\sigma_n^{*2}$. Soit L une droite de S_n ne rencontrant pas les faces des σ_n^* de dimension $< n-1$ et rencontrant au moins deux σ_n dont les transformés recouvrent σ_n avec signes opposés. Il y aura des segments de L dont les extrémités sont sur deux tels $\bar\sigma^*$. Supposons que A^1A^2 en soit un n'en contenant pas d'autres et que $A^1 \subset \bar\sigma_n^{*1}$, $A^2 \subset \bar\sigma_n^{*2}$, ce qui n'impose nulle restriction. Notons que dans ces circonstances $l = TA^1A^2$ est une ligne polygonale brisée, d'extrémités sur $F(\sigma_n)$, mais sans points sur σ_n.

Soit maintenant θ une région tubulaire fermée, d'axe L, de section tranversale sphérique, assez déliée pour que θ, coupée ras aux σ^* ne rencontre que les $(n-1)$-faces contenant les A^i. On montre aisément: (a) que $\varepsilon_n = \bar\sigma_n^{*1} + \theta + \sigma_n^{*2}$ est une n-cellule ε_n + sa frontière, une sphère η_{n-1}; (b) qu'il existe une homotopie T' de H_n en elle même, $=1$ en dehors d'un tube θ' un peu plus grand que θ et contractant θ en son axe A^1A^2. Soit de plus T'' une homotopie de H_n en elle même, $=1$ sur σ_n, coïncidant avec une expansion radiale sur la cellule $H_n - \bar\sigma_n$ et réduisant l à la frontière de σ_n. Alors, si l'on remplace $T\mathfrak{H}_n$ par $T''TT'\mathfrak{H}_n$, on aura la même situation qu'auparavant, sauf que maintenant T transforme $\bar\varepsilon_n$ en $\bar\sigma_n$, et ceci de manière que les $T\sigma^{*i}$ soient transformés en $\pm\sigma_n$ et le reste en $F(\sigma_n)$. En particulier, $T\theta \subset F(\sigma_n)$, donc $T(\theta) \sim 0$ sur $F(\sigma_n)$. D'ailleurs $TF(\sigma_n^{*1} + \sigma_n^{*2}) \equiv 0$, donc $T(\eta_{n-1}) \sim 0$ sur $F(\sigma_n)$.

7. Avec des notations plus commodes, nous avons la situation suivante: soient ε_n^1, ε_n^2 les régions intérieures de deux sphères euclidiennes η_{n-1}^i de rayons 1 et soit T une t. u. c.: $\bar\varepsilon_n^1 \to \bar\varepsilon_n^2$ telle que $\eta_{n-1}^1 \to \eta_{n-1}^2$ avec $T\eta_{n-1}^1 \sim 0$ sur η_{n-1}^2. Nous allons montrer que T peut être modifiée sur ε_n^1 (non sur la frontière) de manière qu'un point de ε_n^2 cesse d'être recouvert par $T\varepsilon_n^1$. Une expansion radiale à partir de ce point découvrira ε_n^2 toute entière et le lemme sera démontré.

Soit α^i le centre de ε_n^i. On peut supposer α^2 recouvert, donc (en remplaçant s'il le faut ε_n^2 par une homéomorphe convenable) que $T\alpha^1=\alpha^2$. Modifions alors T comme il suit: soit P^1 un point quelconque de η_{n-1}^1 et $P^2=TP^1\subset\eta_{n-1}^2$. Soient: Q^i les points divisant les segments $\alpha^i P^i$ dans un même rapport t, $Q'^2=TQ^1$, T' la t. u. c. radiale $Q^1\to Q^2$. Les segments $\overrightarrow{Q'^2Q^2}$ définissent manifestement une modification de T dans sa classe, $=1$ sur les frontières. Nous pouvons donc supposer: (a) que T est radiale; (b) que si η_{n-1}^{it} est la sphère de centre α^i et de rayon t entre 0 et 1, on aura $T\eta^{1t}=\eta^{2t}$. Par suite, si U_{it} est l'homothétie radiale de η_i en η_{it} (contraction dans le rapport t) et si V est ce que devient T sur η_{n-1}^1, on obtient T en prenant $[U_{2t}VU_{1t}^{-1}]\,\eta_{n-1}^{1t}$, puis en faisant varier t de 0 à 1.

Ceci posé, en vertu de l'hypothèse pour $n-1$, la classe de V contient une transformation $V(t)$ variant continuement avec t entre 0 et 1, et telle que $V(0)=V$, tandis que $V(1)\,\eta_{n-1}^1$ ne recouvre pas entièrement η_{n-1}^2. Soit alors $0\leqq s\leqq 1$, puis associons à s une nouvelle transformations $T(s)$, obtenue en remplaçant dans [ ] ci-dessus

$$V \text{ par } \begin{cases} V(2(1-t)s) \\ V(s) \end{cases} \qquad \text{pour} \qquad \begin{cases} 0\leqq t\leqq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1. \end{cases}$$

Quand s varie de 0 à 1, on fera ainsi varier T dans sa classe, sans modification sur les η_{n-1}^i, de manière à découvrir un point de η_{n-1}^{2t} pour $t=\frac{1}{2}$. Ceci achève la démonstration de nos lemmes.

II. Le théorème de Hopf.

8. Soit K_n, $n>0$, un complexe simplicial fini et T une t. u. c. $K_n\to H_n$. La *classe* $\varkappa$ de T est l'ensemble des t. u. c. T': $K_n\to H_n$ telles que TK_n et $T'K_n$ soient homotopes sur H_n. T est *inessentielle*, si $\varkappa$ contient une t. u. c. de K_n en un point de H_n; elle est *essentielle* autrement.

Soient A_n^{ij} les éléments de la base de K_n pour la dimension n (cf. **1**). Les TA_n^{i1}, TA_n^{i2} sont respectivement des cycles mod t_i et entiers de H_n, d'où

$$\left.\begin{aligned} &(8.1) \qquad TA_n^{i1}\sim\mu_i H_n \bmod t_i \\ &(8.2) \qquad TA_n^{i2}\sim\nu_i H_n \end{aligned}\right\}\ \text{sur } H_n.$$

Les entiers μ_i, ν_i sont les *entiers caractéristiques* de T, μ_i n'étant d'ailleurs déterminé que mod t_i. Ce sont des invariants de la classe de T. D'ailleurs $\mu_i\equiv 0 \bmod t_i$, $\nu_i=0$, lorsque T n'est pas essentielle.

En se rapportant à **1**, on voit que T, ou plutôt la classe $\varkappa$, détermine, par l'entremise des μ, ν, un pseudocycle γ^n bien défini et que la classe inessentielle correspond à $\gamma^n\sim 0$. Le théorème de Hopf peut alors être énoncé ainsi:

Théorème 2. *Les classes $\varkappa$ de transformations univoques et continues $K_n\to H_n$, $n>0$ sont en correspondance biunivoque avec les n-pseudocycles* [8]).

Démonstration. Soient σ_p^i les simplexes orientés de K_n. En vertu du lemme 2, il y a une homotopie ϑ de TH_n sur H_n réduisant toutes ses cellules $T\sigma_p^i$, $p<n$ au point A (lemme 1). Donc $\vartheta T=T'$ est une t. u. c. de la même classe $\varkappa$ que T et telle que $T'\sigma_p^i=A$ pour tout $p<n$. Une telle transformation sera dite une *réduite*.

Du reste, étant donné plusieurs t. u. c., T^i, on pourra traiter simultanément tous les T^iK_n comme ci-dessus, donc remplacer les T^i par des réduites. Par conséquent, dans la détermination des classes $\varkappa$, on peut se borner aux réduites.

Prenons donc une réduite T. Puisque les $T\sigma_n^i$ sont des n-cycles, on aura

$$(8.3) \qquad T\sigma_n^i\sim m_i H_n \text{ sur } H_n.$$

Je dis que *les entiers m_i sont entièrement arbitraires*: à tout système d'entiers m_i correspond une réduite T. En effet, soit U^i un homéomorphisme de σ_n^i en H_n-A de degré $+1$ et V^i une rotation de $2\pi m_i$ autour du diamètre AA'. La transformation T donnée par

$$T(K_n-\Sigma\,\sigma_n^i)=A, \qquad T\sigma_n^i=V^iU^i\sigma_n^i$$

possède évidemment les propriétés voulues.

---

8) La dimension $n=0$ n'offre en fait nulle difficulté. H_0 consiste alors en deux points A, B et K_n en $p=R_0(K_n)$ points. A tout groupe de q, $0\leqq q\leqq p$, des points de K_n correspond une tranformation les réduisant au point A et les autres au point B. Donc, il y a $\binom{p}{q}$ transformations, et aussi autant de classes distinctes. Dorénavant on supposera toujours $n>0$.

9. Soient maintenant T, T' deux réduites et demandons nous si elles sont de même classe. D'après **3**, il s'agit d'insérer les $\mathfrak{D}T\sigma_p^i$ convenables. Déjà en vertu du lemme 1, on peut supposer $\mathfrak{D}T\sigma_p^i = A$ pour $p < n-1$. Il ne manque donc que les $\mathfrak{D}T\sigma_{n-1}^i$ et $\mathfrak{D}T\sigma_n^i$.

Les frontières des $\mathfrak{D}T\sigma_{n-1}^i$ coïncident avec A; ces cellules sont donc des n-cycles et, comme pour les $T\sigma_n^i$, il faudra avoir

$$\mathfrak{D}T\sigma_{n-1}^i \sim x_i H_n \quad \text{sur } H_n. \tag{9.1}$$

Par contre, les $\mathfrak{D}T\sigma_n^i$, si on peut les insérer, doivent satisfaire à (3.1), que nous écrivons

$$\mathfrak{D}T\sigma_n^i \to T'\sigma_n^i - T'\sigma_n^i - \mathfrak{D}F(T(\sigma_n^i)). \tag{9.2}$$

Puisque $FT = TF$, ceci revient à

$$\Gamma_n^i = T'\sigma_n^i - T\sigma_n^i - \mathfrak{D}TF(\sigma_n^i) \sim 0 \quad \text{sur } H_n. \tag{9.3}$$

Ainsi, condition nécessaire pour que T, T' soient de même classe, il faut pouvoir choisir les $\mathfrak{D}T\sigma_{n-1}^i$ de manière que (9.1) et (9.3) soient satisfaites. Je dis que ces conditions sont également suffisantes. En effet, Γ_n^i est alors l'image du n-cycle fondamental γ_n de la n-sphère frontière de la cellule prismatique $\sigma_n^i \times \alpha\beta$. En vertu de (9.3), de **5** et du lemme 1, Γ_n est alors homotope à A sur H_n. Or, l'ensemble des chemins décrits par ses points est une $(n+1)$-cellule singulière, image du „joint" de γ_n et d'un point. On prendra donc tout simplement cette cellule pour $\mathfrak{D}T\sigma_n^i$ et la détermination des $\mathfrak{D}T\sigma_n^i$ sera achevée.

10. Tout revient en définitive à satisfaire à (9.1) et (9.3). Ceci posé, ces relations sont *linéaires* par rapport aux σ_n, σ_{n-1}, donc invariantes de forme par rapport aux changements de *base* pour les $(n-1)$- et les n-chaînes. Choisissons celles de **1**. Avec les nouvelles bases les chaînes à déterminer sont les $\mathfrak{D}TA_{n-1}^{ij}$. Les conditions qu'elles doivent satisfaire, au lieu de (9.1), (9.3), sont maintenant

$$\mathfrak{D}TA_{n-1}^{ij} \sim y_{ij} H_n \quad \text{sur } H_n, \tag{10.1}$$

$$T'A^{ij} - TA^{ij} - \mathfrak{D}TFA_n^{ij} \sim 0 \quad \text{sur } H_n. \tag{10.2}$$

Soient μ_i, ν_i et μ_i', ν_i' les entiers caractéristiques de T et T' (cf. **8**). Au lieu de (8.3), nous avons ici

$$TA_n^{i1} \sim \mu_i H_n \bmod t_i, \qquad T'A_n^{i1} \sim \mu_i' H_n \bmod t_i \tag{10.3}$$

$$TA_n^{i2} \sim \nu_i H_n, \qquad T'A_n^{i2} \sim \nu_i' H_n. \tag{10.4}$$

En outre, les A_n^{i3} étant transformés en cycles, on aura:

$$TA_n^{i3} \sim \varrho_i H_n, \qquad T'A_n^{i3} \sim \varrho_i' H_n. \tag{10.5}$$

Il n'y aura pas d'autres relations, puisque les A_n^{i4} et A_n^{i5} n'existent pas.

En substituant maintenant des relations autres que (10.2) dans cette dernière, on obtient pour les y les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \mu_i' - \mu_i - t_i y_{i1} &\equiv 0 \mod t_i, \\ \nu_i' - \nu_i &= 0, \\ \varrho_i' - \varrho_i - y_{i3} &= 0. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Les y_{i5} peuvent donc être pris arbitraires et les y_{i3} sont donnés d'une façon unique. Les conditions de compatibilité des autres relations, et par suite de tout le système, se réduisent ainsi à

$$\mu_i \equiv \mu_i' \bmod t_i, \qquad \nu_i = \nu_i' \tag{10.7}$$

ou bien, si γ^n, γ'^n sont les n-pseudocycles associés à T, T' à la condition

$$\gamma^n \sim \gamma'^n, \tag{10.8}$$

ce qui est le théorème de Hopf.

11. Cas particulier des sphères. Les transformations d'une n-sphère en une autre ne forment aucunement exception à ce qui précède. Le groupe g^n est alors cyclique, d'ordre infini, et il y a une classe $\varkappa$ de t. u. c., $H_n' \to H_n$, et une seule, pour chaque entier s. Ce résultat peut d'ailleurs être établi par la méthode précédente, où tout se simplifie, car les bases se réduisent à peu de chose. Des entiers μ, ν il ne reste plus qu'un seul ν_1, qui est le degré.

III. Transformations multiformes.

12. Transformations normales. Nous avons déjà eu l'occasion d'étudier des transformations multiformes continues (= t. m. c.) au cours de nos recherches sur les points fixes (voir *Topology*, Ch. VI). Pour arriver à des résultats de quelque précision, on est toujours obligé de restreindre les t. m. c.

D'une façon générale, considérons les transformations $K_p^1 \to K_n^2$ entre deux complexes simpliciaux quelconques. Tout comme dans nos recherches mentionnées, il est commode de passer par le complexe produit $K_p^1 \times K_n^2$. Une t. m. c. T du premier au second est alors entièrement caractérisée par l'ensemble $\tau = \{P^1 \times P^2\}$, $P^1 \epsilon K_p^1$, $P^2 \epsilon K_n^2$,

$P^2 = TP^1$. Nous imposerons alors à nos t. m. c. la condition suivante: *τ doit être un n-complexe singulier $\mathfrak{K}_n$ sur le produit $K_p^1 \times K_n^2$*. Cette condition est susceptible d'être exprimée, en se passant du produit, de la manière suivante: il existe un complexe simplicial K_n^0 et trois t. u. c. T_0, T_1, T_2 telles que

(a) $\mathfrak{K}_n$ est l'image singulière de K_n^0 par T_0;
(b) T_1, T_2 sont des t. u. c. de $\mathfrak{K}_n$ en K_p^1 et K_n^2, donc T_1T_0, T_2T_0 des t. u. c. de K_n^0 en K_p^1 et K_n^2;
(c) $T = T_2 T_1^{-1}$.

Si l'on veut, T_i $(i=1, 2)$ est la t. u. c. $P^1 \times P^2 \to P^i$, dite aussi *projection* du produit sur K^i.

Une t. m. c. du type que nous venons de définir est dite *normale*. Les t. u. c. $K_p^1 \to K_n^2$ sont *normales* et correspondent au cas où T_1 est topologique. De même, les transformations de nos recherches déja citées sont également normales, $\mathfrak{K}_n$ étant alors un n-cycle singulier.

Il est à peine besoin d'observer que *la normalité est une propriété topologique*.

On définira les *classes* de transformations normales comme correspondant aux ensembles de complexes singuliers, $\{\mathfrak{K}_n\}$, homotopes sur $K_p^1 \times K_n^2$. Lorsque T est une t. u. c., sa classe $\varkappa$ en tant que t. u. c. est comprise dans sa classe $\varkappa'$ en tant que transformation normale. En effet, lorsque T varie continuement dans $\varkappa$, son image $\mathfrak{K}_n$ varie continuement dans l'ensemble des images topologiques de K_p^1 sur $K_p^1 \times K_n^2$. Or, cet ensemble est certainement compris dans celui de tous les complexes singuliers $\{\mathfrak{K}_n^*\}$ homotopes à $\mathfrak{K}_n$ sur $K_p^1 \times K_n^2$. Les transformations de $\varkappa'$ étant précisément caractérisées par le fait que leurs images sont des $\mathfrak{K}_n^*$, on a bien $\varkappa \subset \varkappa'$.

Il est à noter qu'une transformation normale n'opère pas nécessairement sur K_p^1 tout entier. Elle peut fort bien n'avoir pour champ d'action qu'un sous-ensemble fermé de K_p^1.

Reprenons les t. u. c. T_0, T_1, T_2 considérées plus haut, telles que $T = T_2 T_1^{-1}$. On pourra ramener $T_2 T_0$ à une réduite en tant que t. u. c. de K^0 en K^2. Ceci aura pour effet de remplacer T par une transformation normale de même classe, dite *réduite*. Appliquons ensuite simultanément le Théorème 1 aux complexes singuliers $T_i T_0 K_n^0$ sur K_p^i. Ce faisant, il peut être nécessaire de remplacer K^0 par une subdivision convenable. Comme résultat, on obtient une transformation T' de même classe que T et qui a pour effet de transformer continuement chaque simplexe de K_p^1 en un nombre exact de simplexes du complexe K_n^2. Nous dirons d'une telle transformation qu'elle est *simpliciale*. Nous avons donc le

Théorème 3. *Dans toute classe de transformations normales, il existe des transformations simpliciales.*

Soit K_n^1 la partie n-dimensionnelle de K_p^1 (somme de ses σ_q^1, $q \leqslant n$). On a alors le

Corollaire. *Toute classe de transformations normales $K_p^1 \to K_n^2$ contient des transformations $K_n^1 \to K_n^2$.*

13. Bornons nous pour l'instant aux transformations normales simpliciales $K_n^1 \to K_n^2$. Si T en est une, un σ_n^2 quelconque sera recouvert positivement par p transformés d'un σ_n^1 donné $(\sigma_n^i \in K_n^i)$ et négativement par q d'entre eux. Le nombre $d = p - q$ est le *degré* de $T\sigma_n^1$ sur σ_n^2. On a alors le

Lemme 4. *Lorsque $d = 0$, on peut modifier T dans sa classe de manière à ce que les $T\sigma_n^1$ ne recouvrent plus σ_n^2.*

En un certain sens, ce lemme généralise le second. On peut de même généraliser le lemme 3, en montrant que *T est réductible à une transformation telle que le recouvrement soit exactement de d fois*, mais nous n'avons pas besoin de ceci pour la suite.

Passons à la démonstration. Il suffit évidemment de supposer que $K_n^i = \bar{\sigma}_n^i$. Admettons le et posons $F(\sigma_n^i) = H_{n-1}^i$.

Considérons d'abord la valeur $n=1$. Nous avons donc $q=p$, $d=0$. On peut représenter $\bar{\sigma}_n^1$, $\bar{\sigma}_n^2$ par les deux côtés $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, d'un rectangle $ABCD$, qui sera alors l'image du produit $\bar{\sigma}_n^1 \times \bar{\sigma}_n^2$. L'image de T se composera des diagonales $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ prises p fois. Soit E leur intersection. On peut considérer T comme la superposition des deux t. u. c. représentées par $p\overrightarrow{AEB}$, $p\overrightarrow{DEC}$, qui sont homotopes sur le rectangle, sans déplacement des extrémités, aux segments $p\overrightarrow{AB}$, $p\overrightarrow{DC}$. La somme de ces derniers correspond à une transformation $AB \to A + D$, donc ne recouvrant pas AC. C'est le résultat voulu pour $n=1$.

Soit maintenant $n>1$; admettons le lemme pour $n-1$ et démontrons le pour n. Puisque T est une superposition de t. u. c. simpliciales entre $\bar{\sigma}_n^1$ et $\bar{\sigma}_n^2$, on aura $TF(\sigma_n^1)=FT(\sigma_n^1)\equiv 0$ sur H_{n-1}^2. Donc T, en tant que transformation entre les H, satisfait à la condition du lemme relativement à toute paire de leurs σ_{n-1} transformés l'un dans l'autre. Observons en outre que T, en tant que simpliciale, transforme le barycentre G^1 de σ_n^1 en celui G^2 de σ_n^2, et de même pour les homothétiques H^{it} des H^i par rapport aux G^i et au rapport t entre zéro et un. D'ailleurs, T est „radiale" par rapport à ces barycentres. Nous sommes donc exactement dans la situation de **7**. La même modification que l'on y a considérée, réduira alors T dans sa classe à une transformation T' telle que $T'\sigma_n^i$ ne recouvre plus σ_n^2.

En comparant avec la traitement du lemme 2, on voit que la différence a lieu surtout pour le cas $n=1$.

14. T r a n s f o r m a t i o n s n o r m a l e s $K_n \to H_n$. O p é r a t i o n s e t g r o u p e. Nous allons maintenant introduire pour les classes de transformations normales certaines relations qui vont conduire à un groupe. Il sera commode de désigner indifféremment par T une transformation ou sa classe.

(a) La classe obtenue en superposant T et T' sera désignée par $T+T'$. Cette classe est unique quand T et T' varient dans les leurs. Elle est représentée sur $K_n \times H_n$ par le complexe singulier $\mathfrak{K}_n + \mathfrak{K}_n'$, somme de ceux relatifs à T et T'. Pour préciser, on peut considérer $\mathfrak{K}_n$ et $\mathfrak{K}_n'$ comme images de deux complexes polyédraux disjoints K_n^0, $K_n'^0$ d'un même espace euclidien S_p. Alors $T+T'$ est représentée par $\mathfrak{K}_n + \mathfrak{K}_n$ considéré comme image de $K_n^0 + K_n'^0$.

Notons que l'addition ainsi définie est manifestement commutative et distributive.

(b) Soit U une homéomorphie de H_n en elle-même qui en change l'orientation: $UH_n = -H_n$. Telle est par exemple une symétrie de H_n par rapport à un S_{n-1} diametral. Si T est normale, UT l'est également et nous la désignerons par $-T$.

Comme les U appartiennent à une classe unique, il en est de même de $-T=UT$, lorsque T varie dans une classe déterminée. De plus $-(T+T')=U(T+T')=UT+UT'=-T-T'$.

(c) On dira que T est *inessentielle* ou *essentielle*, suivant que sa classe contient ou non une transformation de K_n en un seul point de H_n. Notons que si T, T' sont inessentielles, il en est de même de $T+T'$ et de $UT=-T$.

(d) Convenons d'écrire $T=0$, lorsque T est inessentielle, et partant $T=T'$, lorsque $T-T'=T+UT'=0$.

L'égalité est:

symétrique, puisque, grâce à

$$T'-T=-(T-T'),$$

si $T-T'$ est inessentielle, il en est de même de $T'-T$;

transitive, car

$$T-T''=(T-T')+(T'-T''),$$

de sorte que si les transformations entre parenthèses sont inessentielles, il en est de même de $T-T''$;

réflexive, c'est à dire $T=T$.

Cela revient en fait à démontrer que

$$T'=T-T=T+UT=0.$$

Effectivement, choisissons pour U la symétrie mentionnée sous (b), puis réduisons T comme dans **8**. Il en résultera la même réduction pour UT, pourvu que le point A soit choisi sur le S_{n-1} de symétrie et que les autres sommets soient pris symétriques par rapport à ce S_{n-1}, ce qui est toujours possible. Or, si σ_n^i sont les simplexes de K_n, $T'\sigma_n^i$ recouvre H_n zéro fois. Du lemme 4, on tire alors de suite que T' est inessentielle, donc $T'=0$.

Je dis maintenant que les classes normales, réduites comme ci-dessus modulo les classes inessentielles, forment un groupe additif abélien. Les conditions requises sont:

I. Addition associative et commutative;
II. Zéro unique tel que $T+0=T$;
III. Négatif $-T$ unique tel que $T+(-T)=0$.

Nous avons déjà considéré I et III. Quant à II, elle revient à démontrer que si S est inessentielle, il en est de même de $T+UT+S$. Pour cela, il suffit d'établir que $T+UT$ est inessentielle, et nous venons justement de le faire plus haut.

Nous avons ainsi démontré le

Théorème 4. *Les opérations et relations* (a), (b), (c), (d) *réduisent l'ensemble des transformations normales à un groupe additif abélien G_n qui est un invariant topologique de K_n.*

Remarque. Dans la définition de G_n, la topologie algébrique n'intervient que par l'entremise des propriétés topologiques des sphères envisagées dans **11**.

15. Soit T une transformation normale quelconque. Nous venons d'observer qu'elle est égale à une réduite. Les $T\sigma_n^i$ auront alors des degrés m_i bien définis:

$$T\sigma_n^i \sim m_i H_n \quad \text{sur } H_n. \tag{15.1}$$

Par suite, il existe une t. u. c. réduite T' aux degrés $-m_i$. Donc, $T-T'$ a ses degrés tous nuls et, par le même raisonnement que ci-dessus, $T=T'$. Ainsi

Théorème 5. *Toute transformation normale est égale à une t. u. c. Partant, G_n peut être considéré comme un groupe additif de t. u. c., la somme de T et T' étant la t. u. c. égale à la transformation normale $T+T'$, etc.*

De cette manière, les transformations normales ne jouent au fond, quant à G_n, qu'un rôle purement intermédiaire.

Théorème 6. *Le groupe G_n est isomorphe au groupe g^n des n-pseudocycles.*

Soient, en effet, T une transformation normale et T^* une t. u. c. réduite égale à T. Nous ferons correspondre à T le même pseudocycle γ^n qu'à T^* en vertu de **8**. Il s'agit de montrer que cette correspondance est une isomorphie.

Effectivement, on passe des m aux nombres caractéristiques μ, ν de T^* par la même transformation linéaire qui permet de passer des σ_n^i aux éléments de base A_n^{ij} (voir **9**). Or, l'addition des T correspond à celle des m_i, donc aussi à celle des μ, ν et enfin à celle des γ^n. De même, $-T=-T^*$, donc $-T$ correspond aux $-\mu, -\nu$ et enfin à $-\gamma^n$, d'où l'on conclut que $T=0$ correspond à $\gamma^n \sim 0$. Par suite, la transformation univoque $T \to \gamma^n$ est une homomorphie $G_n \to g_n$. D'ailleurs, à un γ^n donné correspondent des T^*, donc des T

égales, de sorte que la correspondance entre les groupes est biunivoque. Comme $T+T'$ et $-T$ correspondent déjà à $\gamma^n + \gamma'^n$ et $-\gamma^n$, la correspondance $g_n \to G^n$ est également une homomorphie et les deux groupes sont bien isomorphes.

On conclut qu'il est possible de définir g^n, et par suite son duel g_n, le groupe de Betti mod 1, à l'aide du groupe G_n.

16. Transformations d'un complexe K_p en H_n. Il est clair que lorsque $p<n$, toute t. m. c. $K_p \to H_n$ est inessentielle (TK est homotope à un point sur H_n). Le seul cas intéressant nouveau est donc $p>n$, que nous allons examiner de plus près. En fait, seule la définition des transformations normales est à modifier. Si T en est une, elle devra toujours avoir pour image un $\mathfrak{K}_n$ sur $K_p \times H_n$, mais ce $\mathfrak{K}_n$ devra subir la restriction suivante: soit $\mathfrak{H}_n$ une n-sphère, sous-complexe de $\mathfrak{K}_n$; si sa projection sur K_p, qui est une n-sphère singulière $\mathfrak{H}'_n$, y est homotope à un point, $\mathfrak{H}_n$ devra l'être également sur le produit. Si T était une t. u. c. de K_p, ou d'un sous-ensemble B de K_p, en H_n, cela reviendrait à exiger que toute n-sphère sur B, homotope à un point sur K_p, ait une transformée inessentielle sur H_n.

Soient T, T' deux transformations d'images $\mathfrak{K}_n$, $\mathfrak{K}'_n$ *homotopes* sur $K_p \times H_n$. Je dis que si l'une, disons T, est normale, il en est de même de l'autre. Une fois ceci acquis, les classes de transformations normales pourront être définies comme auparavant (**14**).

Effectivement, à une sphère $\mathfrak{H}'_n$, sous-complexe de $\mathfrak{K}_n$, correspond une sphère homotope $\mathfrak{H}_n$ de $\mathfrak{K}_n$. Leurs projections étant homotopes sur K_p, si celle de $\mathfrak{H}'_n$ y est homotope à un point, il en est de même de celle de $\mathfrak{H}_n$. Donc, puisque T est normale, $\mathfrak{H}_n$ est homotope à un point sur $K_p \times H_n$, et par suite aussi $\mathfrak{H}'_n$ qui lui est homotope sur le produit, c'est à dire que T' est bien normale.

Lorsque TK_p est un seul point A de H_n, c'est à dire lorsque la projection de $\mathfrak{K}_n$ sur H_n est A, T est certainement normale. En effet, l'homotopie à un point est équivalente pour une n-sphère à être frontière d'une $(n+1)$-cellule singulière. Ici, lorsque la projection de $\mathfrak{H}_n$ est $F(E_{n+1})$, on a $\mathfrak{H}_n = A \times F(E_{n+1}) = F(A \times E_{n+1})$. Comme $A \times E_{n+1}$ est une $(n+1)$-cellule singulière, la condition de normalité est verifiée. Toute transformation de la même classe qu'une T de ce type est dite *inessentielle*, toute autre est dite *essentielle*. Si T est inessentielle, on écrira aussi $T=0$.

17. Arrivés où nous en sommes, nous pouvons introduire $T+T'$, $-T$, $T=T'$ comme dans **14**, et nous aurons un nouveau groupe additif abélien G_{pn}. Nous aurons de plus les théorèmes analogues aux théorèmes 3, ..., 6, que nous désignerons maintenant par théorèmes 3_{pn}, ... Sauf pour le dernier, théorème 6_{pn}, les démonstrations déjà données sont valides sans changement.

Examinons donc le théorème 6_{pn} de plus près. Désignons tout d'abord par K_r la partie r-dimensionnelle de K_p (voir **12**). Si T et $\mathfrak{K}_n$ sont comme plus haut, nous pouvons, en vertu du corollaire de **12**, prendre pour T une transformation $K_n \to H_n$. Selon le théorème 5_{pn}, on peut se borner aux t. u. c. $K_n \to H_n$. Comme on le sait d'ailleurs, cette nouvelle transformation peut être prise simpliciale. La condition complémentaire de normalité revient à ceci: toute n-sphère, sous-complexe de K_n, homotope à un point sur K_p, doit avoir une transformée inessentielle. Examinons cette condition.

Pour $n<p$, les éléments de base A_n^{ij} de **1** comprendront des cycles absolus A_n^{i4}, tels que $t_i' A_n^{i4} \sim 0$ sur K_p, donc sur K_{n+1}, où naturellement $t_i' \neq 0$. Si l'on identifie K_n avec le complexe de **8**, il faudra ajouter aux relations (10.3), (10.4), (10.5) les suivantes:

$$TA_n^{i4} \sim \bar{\nu}_i H_n, \qquad T'A_n^{i4} \sim \bar{\nu}_i' H_n. \tag{17.1}$$

Les $\bar{\nu}$ apparaissent ainsi comme de nouveaux entiers caractéristiques des transformations normales $K_n \to H_n$, à ajouter aux μ, ν. Deux transformations $K_n \to H_n$ aux mêmes μ, ν, $\bar{\nu}$ sont de même classe en ce sens spécial. Donc, si l'une est normale en tant que transformation $K_p \to H_n$ (et non plus seulement $K_n \to H_n$), il en est de même de l'autre, et toutes deux sont de même classe en ce sens. Donc les classes sont individualisées, ici également, par les entiers caractéristiques μ, ν, $\bar{\nu}$. Il s'agit de savoir à quelles valeurs de ces entiers elles correspondent.

La réponse à la question est facile. Let $t_i' A_n^{i4}$ forment base additive pour toutes les sommes de sphères $F(\sigma_{n+1})$. Par conséquent, pour que T soit normale, il faudra que les degrés $t_i' \bar{\nu}_i$ des $T(t_i' A_n^{i4})$ soient nuls sur H_n. Comme les t_i' ne le sont pas, les $\bar{\nu}$ devront l'être. D'ailleurs, s'ils le sont, T est bien normale. En effet, tout sous-cycle de K_n, donc toute n-sphère $\mathfrak{H}_n^*$ orientée, sous-complexe de K_n, homotope à un point sur K, donc ~ 0 sur K, est une somme des A_n^{i4}. Sous l'hypothèse, $T\mathfrak{H}_n^*$ sera de degré 0 sur H_n et T est bien normale. Ainsi, pour que T soit normale, il faut et il suffit que les $\bar{\nu}$ soient tous nuls.

Nous pourrons donc conclure que les classes de transformations normales correspondent, comme dans **14**, aux ensembles d'entiers μ_i (arbitraires mod t_i) et ν_i (arbitraires). Cela suffit pour achever de démontrer le Théorème 6_{pn}. Bien entendu, les groupes comparés sont: G_{pn} le groupe des transformations normales $K_p \to H_n$ et g^{pn} le groupe des n-pseudocycles de K_p.

Il est d'ailleurs facile de vérifier nos théorèmes pour $0 \leqslant p < n$; on se rappellera que, pour $n=0$, H_0 consiste alors en deux points distincts. Pour $p=n$, ils ont déjà été démontrés, puisque, comme nous venons de le voir, ils se ramènent aux théorèmes déjà démontrés pour K_n, qui coïncide alors avec K_p. Nous avons donc le

Théorème 7. *Les Théorèmes $3_{pn}, \dots, 6_{pn}$ sont valides pour les transformations normales $K_p \to H_n$, quels que soient p, n. Explicitement: les groupes g^{pn} des n-pseudocycles entiers de K_p et les groupe G_{pn} des transformations normales de K_p en H_n sont isomorphes.*

Cet énoncé comprend la

Généralisation du Théorème de Hopf, *qui est donc valide pour les transformations normales $K_p \to H_n$, à cela près que la répartition en classes homotopes est à remplacer par celle en classes de transformations égales.*

8. Cas $n=1$, $p>1$. C'est celui considéré par M. Bruschlinski. On peut dans ce cas spécial prendre comme groupe de transformations G_{p1} le groupe additif des t. u. c. $K_p \to H_1$, tout comme dans le théorème de Hopf. En effet, d'après ce qui précède, on peut considérer les t. u. c. $K_1 \to H_1$. Je dis qu'une telle transformation T peut être étendue à K_p tout entier. Soit σ_2 un 2-simplexe quelconque de K_p. L'image de $F(\sigma_2)$ est une H_1 singulière sur H_1 dont le degré est 0 d'après le choix même de T. On pourra donc insérer une E_2 singulière de frontière $TF(\sigma_2)$ que l'on définira comme étant $T\sigma_2$. On obtiendra ainsi TK_2. Comme toute H_q, $q>1$ singulière sur H_1 y est inessentielle [9]), on pourra insérer de même les $T\sigma_3$, etc., et étendre ainsi T à K tout entier. Il en résulte que les t. u. c. $K_1 \to H_1$ qui engendrent $G_p{}^1$ peuvent être remplacées par des t. u. c. $K_p \to H_1$, comme on l'avait affirmé. Donc, g^1 est toujours isomorphe à un groupe additif de t. u. c. $K_p \to H_1$. C'est là le résultat de M. Bruschlinski [2]).

---

[9]) Voir Hopf: Math. Ann. vol. 104 (1931), p. 660.

IV. Extension aux groupes définis par un sous-complexe L d'un complexe K.

19. Nous poserons $\dim K = p$, $\dim L = q$. Nous recherchons tout particulièrement des résultats analogues aux précédents pour les groupes de Betti induits par L. Il y a lieu de considérer ces trois types:

Type A. Groupes de K mod L. On prendra uniquement les transformations $K \to H_n$ telles que $L \to A$, un point fixe de H_n. Alors T, si elle est une t. u. c., sera inessentielle, lorsque sa classe contient une t. u. c. telle que $K \to A$. Tout ce que nous avons dit s'applique sans plus. Identifions K avec une image topologique sur une H_r, $r \geqq 2p+1$. Alors les pseudocycles qui se présentent sont représentés par les cycles de $H-L$ mod $(H-L-K)$.

20. Type B. Groupes de $K-L$. Il convient ici de remplacer, s'il le faut, K par une subdivision, ce qui n'importe nullement au point de vue topologique. Désignant toujours la subdivision par K, nous la choisirons de manière à obtenir un K-voisinage N de L, *normal* au sens de *Topology*, p. 91. Je rappelle qu'alors N, qui est la somme des simplexes de K desom mets sur N, aura cette propriété: si Φ est sa frontière, il passe par tout point P de $N-L$ un segment unique d'extrémités sur L et Φ, dit *projetante* de P sur L ou sur Φ. Le complexe Φ, dit *complément* de L dans K, est la somme des simplexes de K sans sommets sur L, mais qui sont faces de simplexes avec des sommets sur L. Enfin il y a lieu de considérer un autre complexe compagnon de L, le complexe fermé $K^0 = K - N$. A l'aide des projetantes on voit de suite que les groupes de Betti de $K-L$ sont isomorphes à ceux de K^0. Ceci permet immédiatement d'étendre tous nos résultats aux groupes G_{pn} de $K-L$. On dira ici que la t. u. c. T, est essentielle pour K^0, si sa classe $\varkappa$ n'en contient pas une T' telle que $T'K^0 \to A$. En terme de $K-L$ seul, cela revient à ceci: il existe un sous-ensemble fermé F de $K-L$ tel que nulle $T' \in \varkappa$ ne transforme F en A. Les deux conditions sont d'ailleurs équivalentes. En effet, supposons que T satisfasse à la seconde. En glissant $N-L$ le long des projetantes, on le déforme en sous-ensemble de Φ, donc $K-L \to K^0$ par une homotopie U sur K. Comme $UF \subset K^0$ satisfait à la seconde condition, T est essentielle pour un sous-ensemble de K^0; donc, la première condition est, pour K^0, une conséquence de la seconde. D'ailleurs, K^0 est un F

convenable, donc la réciproque est vraie: les deux conditions sont bien équivalentes.

En termes de la représentation dans H_r, les pseudocycles à introduire correspondent ici aux cycles de H_r mod $(H_r-(K-L))$.

21. Type C. Groupes du voisinage de L dans K. Ils sont de beaucoup les plus intéressants, car ils conduisent à des propriétés des voisinages de points, etc., en rapport étroit avec d'autres questions, notamment avec la dimension des ensembles.

Nous entendrons d'abord par *r-cycle du voisinage* une chaîne Γ_r dont la frontière est la somme de deux chaînes, l'une sur L, l'autre sur $K-L$. De plus, $\Gamma_r \sim 0$ signifie que Γ_r lui-même est $\sim$ à une somme de ce type. Les groupes de Betti associés peuvent aussi être définis comme ceux de K mod $((K-L, L)$. Ils sont isomorphes à ceux obtenus, quand on n'admet que des sous-chaînes de $N-L$, négligeant le reste [10]).

En remplaçant de toute façon K par son dérivé (subdivision barycentrique), nous pouvons nous arranger pour que le complément Φ de L soit homéomorphe à l'ensemble φ des projetantes (chacune considérée comme un point). On en déduit que:

(α) les groupes de Betti du voisinage pour s sont isomorphes aux groupes absolus de Betti de Φ pour $s-1$.

Ceci posé, considérons les t. u. c. des fermetures $\overline{V}$ des voisinages V de L dans K (sous-ensembles ouverts $\supset L$) en un espace euclidien S_p, telles que si T en est une: (a) $TL = A$, un point fixe de S_p; (b) $TF(V) \supset A$. Deux transformations T, T' de ce genre seront de même classe, s'il existe un $\overline{V}$ relativement auquel, et aux transformations du même genre seulement, elles sont de même classe au sens usuel. Enfin, T sera inessentielle, si sa classe contient une T' à voisinage associé V, tel que A ne soit pas un point intérieur de l'ensemble $T'V$. On dira alors aussi que T' ne recouvre pas A.

En se servant de l'homotopie $N-L \to \Phi$, il est élémentaire de montrer que:

(β) les classes des t. u. c. de voisinage que l'on vient de définir sont en correspondance biunivoque avec celles des t. u. c., $\Phi \to H_{p-1}$.

---

10) On pourrait aussi considérer des groupes de voisinage au sens *faible*, c'est à dire analogues aux précédents sauf que l'on ne néglige pas les chaînes de L. Ici, ce sont définitivement les autres qu'il nous faut. D'ailleurs, pour les dimensions $r > q = \dim L$, cas le plus important, les deux types coïncident.

Si l'on introduit ensuite les transformations normales de $K_p \to S_r$, $r > 0$ comme auparavant, on aura:

(γ) le groupe des transformations normales du voisinage de L dans K en S_r est isomorphe à celui des transformations normales de Φ en H_{n-1}.

22. Il s'agit maintenant de faire entrer en jeu les pseudocycles du voisinage N de L dans K. En supposant $K \subset H_t$, ils devront correspondre au type duel des cycles, c'est à dire être représentés par les cycles de $H_t - L - (K - N)$ mod $(H_t - K)$.

Reprenons la représentation de K sur H_t et supposons H_t recouverte d'un complexe tel que les deux H_t-voisinages N'', N' de L et K soient normaux. Au pis-aller il peut en résulter de nouveaux N et Φ, mais peu importe. Ceci posé, si C_s est une chaîne de $N' - L - (K - N)$, on pourra la glisser le long des projetantes de N'' de façon à la faire sortir d'un certain voisinage de $L + (K - N)$. Il en résulte que seule la „bande centrale" de N' compte pour les pseudocycles de N. Prenons en avantage comme il suit. Dans un S_{t-1} d'un S_t, construisons un complexe simplicial Ψ de même structure que Φ. Ceci est toujours possible, puisque $t - 1 > 2(p-1) + 1$ et $\dim \Phi = p - 1$. Le lieu $\mathfrak{N}$ des droites indéfinies de S_t perpendiculaires à S_{t-1} et rencontrant Ψ est une variété cylindrique $\mathfrak{N}$ homéomorphe à N. Or, les n-pseudocycles de Ψ sont représentés: 1° soit par les chaînes C_{t-1-n} de S_{t-1} de frontière ne rencontrant pas Ψ, 2° soit par les C_{t-n} de S_t engendrées par les perpendiculaires à S_{t-1} rencontrant les C_{t-1-n} précédentes. Comme celles du premier type correspondent également aux $(n+1)$-pseudocycles de N, on a:

(δ) les groupes g^n et g^{n+1} de pseudocycles de Φ et N sont isomorphes.

En confrontant avec (β) et (γ), on obtient ce

Théorème 8. *Le théorème de Hopf ainsi que ceux sur les transformations normales s'appliquent aux transformations de voisinage en H_q, $q > 0$. En particulier, les classes des t. u. c. correspondent biunivoquement aux p-pseudocycles entiers de voisinage.*

Remarque. Le Th. 8 a pour conséquence l'invariance topologique des groupes des pseudocycles, qui peut, il est vrai, être démontrée directement.

23. Soit en particulier P un point de K. S'il n'est pas un sommet, nous pouvons remplacer K par une subdivision de sommet P, de sorte que nous pouvons admettre, sans restriction, que P en soit un. Pour qu'une t. u. c. de voisinage $K \to H_n$ soit essentielle, il faut que P soit sur un $\bar{\sigma}_r$, $r \geqq q$, de K. Il suffit pour cela que P soit sur un σ_q qui n'est face d'aucun autre σ. Donc:

Théorème 9. *La dimension p de K est le plus petit entier tel que K ait une t. u. c. de voisinage d'un point en H_p qui soit essentielle.*

En combinant avec le Théorème 8, on a le

Corollaire I. *$p = \dim K$ est le plus grand entier pour lequel il existe un groupe de p-pseudocycles entiers de voisinage des points non identiquement nul.*

Corollaire II. *Même énoncé, sauf que les groupes de Betti mod 1 remplacent ceux des pseudocycles*[11]).

24. Application aux cycles entiers des complexes. Les cycles de voisinage vont nous permettre de remplacer à peu près partout les pseudocycles par les cycles et, partant, d'avoir des définitions topologiques „directes" au sens de M. Freudenthal pour les groupes de Betti. Effectivement, si l'on remplace L et K par K et H_t, les $(t-s)$-cycles de voisinage mod 1 deviennent les images des s-pseudocycles mod 1 de K, et leur groupe devient le groupe de Betti des s-cycles entiers de K lui-même. Une simple transcription du Th. 8 nous conduit alors au:

Théorème 10. *Identifions K avec une image topologique polyédrale sur une H_t où $t - 1 > 2p = 2 \dim K$. Le groupe des t. u. c. de voisinage de K en une H_t est alors isomorphe au groupe de Betti entier g_0. Le groupe des transformations normales de voisinage en H_{t-q} est isomorphe au groupe de Betti entier g_q de K. Les classes des t. u. c. de voisinage sont en correspondance biunivoque avec les classes d'homologie des 0-cycles.*

Pour préciser, si K se compose de h parties disjointes, les t. u. c. correspondent aux éléments d'un groupe abélien libre de rang h.

[11]) Ce résultat a été énoncé récemment pour les ensembles compacts arbitraires par MM. Alexandroff-Hopf-Pontrjagin. Voir à ce sujet le mémoire de M. Alexandroff: Annals of Mathematics ser. 2, vol. 36 (1935), p. 27.

9*