# Sur la séparabilité généralisée.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Etant donné un ensemble $E$ quelconque et une famille $\Phi$ de sous-ensembles de $E$, nous dirons que les éléments de $E$ sont *séparables au moyen (des ensembles) de la famille* $\Phi$, s'il existe pour tout couple d'éléments distincts $p, q$ de $E$ deux ensembles disjoints de la famille $\Phi$ dont l'un contient $p$ et l'autre $q$.

Le but de cette Note est de démontrer ce

**Théorème.** *Soit* $\mathfrak{m}$ *un nombre cardinal quelconque* $\geqslant \aleph_0$. *Pour que les éléments d'un ensemble* $E$ *soient séparables au moyen d'une famille* $\Phi$ *de puissance* $\leqslant \mathfrak{m}$, *il faut et il suffit qu'on ait* $\overline{\overline{E}} \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$.

Démonstration: *I. La condition est nécessaire.* Soit $E$ un ensemble dont les éléments sont séparables au moyen des ensembles d'une famille $\Phi$ de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$. Chacun des éléments de $E$ est alors, comme on le voit sans peine, le produit de tous les ensembles de $\Phi$ qui le contiennent. La puissance de l'ensemble $E$ est donc inférieure ou égale à celle de la famille de tous les produits formés d'ensembles de la famille $\Phi$, c. à d. que $\overline{\overline{E}} \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$.

*II. La condition est suffisante.* Soient: $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal donné $\geqslant \aleph_0$, $E$ un ensemble de puissance $\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, $M$ un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ et $U$ la famille de tous les sous-ensembles de $M$. Comme $\overline{\overline{E}} \leqslant 2^{\mathfrak{m}} = \overline{\overline{U}}$, il existe un sous-ensemble $V$ de $U$ tel que $\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{V}}$, donc aussi une correspondance biunivoque $\varphi$ entre les éléments de $E$ et ceux de $V$. Soit $\varphi^{-1}$ la correspondance inverse (entre les éléments de $V$ et ceux de $E$).



Désignons pour tout élément $x$ de $M$ par $F(x)$ et $F^*(x)$ respectivement la famille de tous les éléments-ensembles de $V$ qui contiennent $x$ et la famille de tous ceux qui ne contiennent pas $x$. Soit $\Phi$ la famille formée de tous les ensembles $\varphi^{-1}(F(x))$ et de tous les ensembles $\varphi^{-1}(F^*(x))$ où $X \epsilon M$. La famille $\Phi$ ainsi définie est évidemment de puissance $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$; reste à montrer que les éléments arbitraires $p$ et $q \neq p$ de $E$ sont séparables au moyen de cette famille.

Or, la fonction $\varphi$ établissant une correspondance biunivoque entre $E$ et $V$, il résulte de la relation: $p \neq q$ que les ensembles $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$ sont distincts. Il existe donc un élément $x$ de $M$ qui appartient à l'un de ces ensembles sans appartenir à l'autre: p. ex. $x \epsilon \varphi(p)$ et $x$ *non* $\epsilon \varphi(q)$. La famille $F(x)$ contient donc comme élément l'ensemble $\varphi(p)$ et la famille $F^*(x)$ l'ensemble $\varphi(q)$. Par conséquent $\varphi(p) \epsilon F(x)$ et $\varphi(q) \epsilon F^*(x)$, d'où $p \epsilon \varphi^{-1}(F(x))$ et $q \epsilon \varphi^{-1}(F^*(x))$.

Enfin, on voit sans peine que les ensembles $\varphi^{-1}(F(x))$ et $\varphi^{-1}(F^*(x))$ sont disjoints (puisque les familles $F(x)$ et $F^*(x)$ le sont). Les ensembles $\varphi^{-1}(F(x))$ et $\varphi^{-1}(F^*(x))$ séparent donc les éléments $p$ et $q$, c. q. f. d.

Le cas particulier $\mathfrak{m} = \aleph_0$ de ce théorème a été démontré par moi directement en 1934 [1]).

[1]) *C. R. Soc. d. Sc. et d. Lettres de Varsovie* Cl. III, XXVII Année 1934, p. 128 (Lemme).