Sur les séries de Fourier.

Par

J. Marcinkiewicz (Wilno).

INTRODUCTION.

1. Soit donnée une fonction $f(x)$ de periode 2π, intégrable dans un sens quelconque. Nous désignerons par $\mathfrak{S}[f]$ la série de Fourier de $f(x)$, c'est à dire la série

$$\tag{0.1} \tfrac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

où les coefficients a_k et b_k sont définis par les égalités

$$\tag{0.2} a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx.$$

La série qu'on obtient en différentiant (0,1) formellement k fois sera désignée par $\mathfrak{S}^{(k)}[f(x)]$.

Nous désignerons respectivement par L, D, D^* les classes des fonctions de période 2π, intégrables au sens de Lebesgue, au sens large de Denjoy et au sens restreint de Denjoy[1]). Souvent, pour plus de brièveté, au lieu d'appeler une fonction intégrable au sens de Lebesgue, nous dirons, tout simplement, qu'elle est intégrable.

2. Ce travail contient quatre chapitres, qui traitent des problèmes différents. Dans le premier chapitre nous allons démontrer les deux théorèmes suivants:

[1]) Pour les définitions, cf., par exemple, Saks **1**.

Théorème 1 [1]). *Il existe une fonction $f(x)\epsilon L$ telle que $\mathfrak{S}[f]$ diverge presque partout, bien que, pour presque tout x,*

$$\tag{0.3} \limsup_{n\to\infty}|S_n(x)|<\infty,$$

où $S_n(x)=S_n(x,f)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ *désigne la n-ième somme partielle de $\mathfrak{S}[f]$.*

Théorème 2 [2]). *Pour chaque fonction $\omega(t)$ remplissant les conditions*

$$\tag{0.4} \lim_{t\to 0}\omega(t)=0,\qquad \omega(t)=\omega(-t),$$

$$\tag{0.5} \lim_{t\to+0}\omega(t)\lg\frac{1}{t}=\infty$$

il existe une fonction $f(x)\epsilon L$ telle que $\mathfrak{S}[f]$ diverge presque partout, bien que, pour presque chaque point x,

$$\frac{1}{t}\int_0^t|f(x+u)-f(x)|\,du=O(\omega(t)).$$

L'intérêt que peut présenter le théorème 1 consiste en ce qu'il donne lieu au problème des limites d'indétermination des séries de Fourier [3]).

En démontrant les théorèmes 1 et 2, nous nous servirons de la méthode par laquelle M. Kolmogoroff, **1**, a démontré l'existence d'une fonction $f\epsilon L$ telle que $\mathfrak{S}[f]$ diverge presque partout. Nous supposerons dans le premier chapitre que le lecteur est en connaissance du travail de M. Kolmogoroff.

Le théorème 2 est un complément naturel de la proposition suivante, qui a été démontrée dans un autre travail [4]):

Si la fonction $f\epsilon L$ vérifie dans un ensemble E la condition

$$\frac{1}{t}\int_0^t|f(x+u)-f(x)|\,du=O\left(\frac{1}{\log 1/|t|}\right),$$

la série $\mathfrak{S}[f]$ converge presque partout dans E.

[1]) Ce théorème a été déjà cité chez Zygmund **3**, p. 586.
[2]) Ce théorème a été énoncé, sans démonstration, chez Marcinkiewicz **1**.
[3]) Cf. Zygmund **3**, Marcinkiewicz et Zygmund **1**.
[4]) Cf. Marcinkiewicz **1**.

3. Le deuxième chapitre sera consacré à quelques propriétés des dérivées généralisées de M. de la Vallée-Poussin. Rappelons en les définitions. On dit que *la fonction $f(x)$ admet dans le point x la dérivée généralisée d'ordre k au sens de de la Vallée-Poussin, s'il y a $k+1$ constantes $a_0(x), a_1(x), \dots, a_k(x)$ telles que*

(0.6) $$f(x+t)=a_0(x)+a_1(x)\frac{t}{1!}+a_2(x)\frac{t^2}{2!}+\dots+a_k(x)\frac{t^k}{k!}+o(t^k).$$

Nous écrirons souvent $f^{(i)}(x)$ au lieu de $a_i(x)$.

Un nombre g sera appelé la *limite approximative* d'une fonction $F(u)$ dans un point x, si l'on a

(0.7) $$g=\lim_{h\to 0,\, h\in H} F(x+h),$$

où H est un ensemble ayant 0 pour un point de densité. Nous l'écrirons:

(0.8) $$g=\lim_{h\to 0}{}_a F(x+h) \quad \text{ou} \quad g=\lim_{u\to x}{}_a F(u).$$

Si $g=\lim_{h\to 0}{}_a \{F(x+h)-F(x)\}/h$, nous dirons que g est la *dérivée approximative* de $F(u)$ dans le point x et nous écrirons

(0.9) $$g=\left(\frac{d}{dx}\right)_a F(x).$$

Le résultat principal du deuxième chapitre peut être énoncé comme il suit:

Théorème 3. *Si l'on a pour chaque x d'un ensemble E de mesure positive*

(0.10) $$f(x+t)=f(x)+f^{(1)}(x)\,t+\frac{f^{(2)}(x)}{2!}t^2+\dots+\frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}t^{k-1}+O(t^k),$$

alors on a aussi presque partout dans cet ensemble

(0.11) $$\left(\frac{d}{dx}\right)_a f^{(k-1)}(x)=f^{(k)}(x)$$

et

(0.12) $$f(x+t)=f(x)+f^{(1)}(x)\,t+\dots+\frac{f^{(k)}(x)}{k!}t^k+o(t^k).$$

En outre, il existe un sous-ensemble P de E, parfait et de mesure positive, et deux fonctions g et h telles que

(0.13) $$f(x)=g(x)+h(x),$$

(0.14) $$f(x)=g(x) \quad \text{pour} \quad x\in P,$$

(0.15) *la fonction g admet une dérivée ordinaire d'ordre k, continue dans tout l'intervalle considéré,*

(0.16) *à l'exception d'un nombre fini des segments Δ contigus à P, on a*

(0.17) $$\max_{x\in\Delta}|h(x)|\leqslant M|\Delta|^k,$$

où M désigne une constante et $|\Delta|$ la longueur du segment Δ.

La première partie de ce théorème n'est pas nouvelle. Elle a été démontrée dans un travail de M. M. Zygmund et Marcinkiewicz [1]). Leur démonstration fait appel aux méthodes analytiques; la nôtre est purement métrique.

4. Dans le troisième chapitre, nous appliquons le théorème 3 à la démonstration de deux autres théorèmes. En voici le premier.

Théorème 4. *Si la fonction $f\in L$ admet dans un ensemble E de mesure positive la k-ième dérivée de de la Vallée-Poussin, l'intégrale*

(0.18) $$\int_0^\pi \frac{\omega(x,t)-\omega(x,-t)}{t}\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^\pi \frac{\omega(x,t)-\omega(x,-t)}{t}\,dt$$

existe presque partout dans E, la fonction $\omega(x,t)$ étant définie par l'égalité

(0.19) $$f(x+t)=f(x)+f^{(1)}(x)\frac{t}{1!}+\dots+f^{(k-1)}(x)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\omega(x,t)\frac{t^k}{k!},$$

où l'expression $f^{(i)}(x)$ désigne la i-ème dérivée au sens de de la Vallée-Poussin.

Ce résultat est dû à M. Plessner [2]). Sa démonstration utilise des méthodes analytiques, tandis que la nôtre est métrique. En

[1]) Marcinkiewicz et Zygmund 1.
[2]) Plessner 1.

nous basant sur le théorème 3, nous déduisons le théorème 4 du cas très spécial du théorème 4, à savoir:

Si la fonction $f(x)$ est continue, l'intégrale

$$(0.20)\qquad \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt$$

existe pour presque tout x [1]).

Le second théorème du troisième chapitre est le suivant:

Théorème 5. *Si la fonction $f \epsilon L$ admet dans chaque point x d'un ensemble E la k-ième dérivée de de la Vallée Poussin, $(k=1,2,\dots)$, alors $\mathfrak{S}^{(k)}[f]$ est sommable (C,k) presque partout dans E.*

Le cas le plus intéressant de ce théorème est celui de $k=1$. Il en résulte, en particulier, que *si f est intégrable au sens restreint de Denjoy, la série $\mathfrak{S}[f]$ est sommable $(C,1)$ presque partout.*

5. Le dernier chapitre contient deux théorèmes concernant les séries de Fourier des fonctions $f \epsilon D$.

Théorème 6. *Il existe une fonction $f \epsilon D$ telle que $\mathfrak{S}[f]$ n'est sommable par le procédé de Poisson dans un ensemble de mesure positive.*

Théorème 7. *Si $f \epsilon D$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale*

$$(0.21)\qquad \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt$$

existe presque partout dans un ensemble E, est que l'intégrale indéfinie de f soit dérivable presque partout dans E.

[1]) Ce résultat est dû à M. Lusin, **1**, qui l'a démontré même pour $f \epsilon L^2$. Cf. par exemple Zygmund **1**, p. 76. Comme l'a montré M. Lusin, **1**, l'intégrale $\int_0^{\pi}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}\,dt$ peut diverger presque partout, même si $f(x)$ est continue; voir à ce sujet Kaczmarz **1**, Mazurkiewicz **1** et Zygmund **1**, p. 77.

En ce qui concerne le théorème 6, remarquons qu'il est impossible de construire une fonction $f \epsilon D$ telle que la série $\mathfrak{S}[f]$ soit divergente par le procédé de Poisson *presque partout* dans $(0,2\pi)$. Cela résulte du fait bien connu qu'il existe une suite partout dense d'intervalles, telle que la fonction $f(x)$ est intégrable L sur chacun d'eux. L'intégrale indéfinie de $f(x)$ est donc dérivable dans un ensemble E de mesure positive, d'où il résulte, en tenant compte du théorème 5, que $\mathfrak{S}[f]$ est sommable $(C,1)$ presque partout dans E.

Ajoutons que le théorème 6 permet de construire une fonction $f(x) \epsilon D$ telle que $\mathfrak{S}[f]$ est sommable $(C,1)$ dans un ensemble de mesure positive, quoique presque partout dans E l'intégrale (0.21) n'existe pas.

CHAPITRE I.

1. Nous allons définir une suite de fonctions f_n de façon à avoir

$$(1.01)\qquad f_n(x) \geqslant 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = 0,$$

$$(1.02)\qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}_x E[f_n(x) > 0] = 0 \quad ^{1}),$$

(1.03) *pour chaque n, la série $\mathfrak{S}[f_n]$ converge partout,*

$$(1.04)\qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}_x E[\max_{(p)} |S_p(f_n,x)| < M] = 2\pi,$$

$$(1.05)\qquad \liminf_{n\to\infty} \operatorname{mes}_x E[\max_{(p)} |S_p(f_n,x)| > \alpha] > \theta > 0,$$

M, α et θ désignant des constantes absolues.

Soit notamment

$$(1.06)\qquad f_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\lg n},$$

où $\varphi_n(x)$ est la fonction d'ordre n de M. Kolmogoroff, **1**.

On vérifie d'abord sans difficulté les relations (1.01), (1.02) et (1.03).

D'autre part, la formule (8) de la note de M. Kolmogoroff entraîne (1.05). Il nous reste donc à démontrer (1.04). Dans ce but, posons avec M. Kolmogoroff:

[1]) Les ensembles de points que nous considérons dans ce chapitre sont situés dans l'intervalle $(0,2\pi)$.

$$A_k = \frac{4\pi k}{2n+1} \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n \tag{1.07}$$

et considérons les segments:

$$d_k = \left(A_k + \frac{1}{n \lg n},\ A_{k+1} - \frac{1}{n \lg n}\right), \tag{1.08}$$

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k. \tag{1.09}$$

On trouve alors pour $x \epsilon D_n$

$$|S_p(f_n, x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) \frac{dt}{\left|2 \sin \frac{x-t}{2}\right|} \leqslant M, \tag{1.10}$$

M désignant une constante absolue. Comme l'inégalité (1.10) subsiste pour chaque p, il en résulte (1.04).

2. Pour prouver le théorème 1, posons

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x), \tag{1.11}$$

où $\{n_i\}$ désigne une suite de nombres entiers que nous définirons plus loin et les fonctions f_n sont celles définies dans § **1.**

En supposant $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i$ déjà définis, posons

$$\Phi_i = \sum_{p=1}^{i} f_{n_p}, \tag{1.12}$$

$$E_{i,q} = \underset{x}{E}\,[\,|S_p(\Phi_i, x) - \Phi_i(x)| < 1/i] \quad (p \geqslant q). \tag{1.13}$$

En vertu de la condition (1.03),

$$\lim_{q \to \infty} \operatorname{mes} E_{i,q} = 2\pi, \tag{1.14}$$

donc pour un $q = q(i) > 2$

$$\operatorname{mes} CE_{i,q(i)} < 1/2^i. \tag{1.15}$$

Nous pouvons supposer que $q(i) > q(i-1)$. Choisissons n_{i+1} de façon à avoir

$$\int_0^{2\pi} f_{n_i} dx > q(i) \int_0^{2\pi} f_{n_{i+1}} dx, \tag{1.16}$$

$$\operatorname{mes} \underset{x}{E}\,[\max_{(p)} |S_p(f_{n_{i+1}}, x)| > M] < 1/2^i, \tag{1.17}$$

$$\operatorname{mes} \underset{x}{E}\,[\max_{p > q(i)} |S_p(f_{n_{i+1}}, x)| > \alpha] > \theta. \tag{1.18}$$

La fonction f ainsi définie remplit toutes les conditions demandées. En effet, vu (1.16), on a $f \epsilon L$. Par suite, les formules (1.13), (1.15), (1.16) et (1.17) prouvent (0.3) [1]. Enfin, on tire de (1.13), (1.15), (1.16) et (1.18):

$$\operatorname{mes} Q = \operatorname{mes} \underset{x}{E}[\limsup_{p \to \infty} |S_p(f, x) - f(x)| > 0] > \theta \tag{1.19}$$

et on trouve de plus, vu la formule (8) de la note citée de M. Kolmogoroff, une formule plus forte que (1.19), à savoir:

$$\operatorname{mes} QI > \theta \operatorname{mes} I, \tag{1.20}$$

où I désigne un segment quelconque. Il en résulte en vertu d'un théorème de M. Lebesgue sur les points de densité que

$$\operatorname{mes} Q = 2\pi. \tag{1.21}$$

3. Remarquons que le problème de la construction d'une fonction f dont $\mathfrak{S}[f]$ divergerait presque partout et remplirait *partout* la condition (0.3) est bien plus difficile. En effet, vu un théorème connu de Baire sur les suites partout bornées de fonctions continues, la condition (0.3), vérifiée *partout*, entraîne l'existence d'un ensemble dense de segments Δ tels que

$$|\underset{x \epsilon \Delta}{S_p(f, x)}| \leqslant M(\Delta), \quad p = 1, 2, 3, \dots \tag{1.22}$$

où $M(\Delta)$ désigne une constante qui ne dépend que de Δ. On en déduirait sans difficulté l'existence d'une fonction bornée dont la série de Fourier diverge presque partout. Or, même si la dernière proposition est vraie, elle est certainement très difficile à établir.

On voit donc qu'on est amené à résoudre préalablement le problème de la divergence presque partout des séries de Fourier *de fonctions bornées*, problème qui reste ouvert et qui est sans doute fort difficile.

---

[1]) Soit $f - \Phi_i = \Psi_i$; alors $S_p(f, x) = S_p(\Phi_i, x) + S_p(f_{n_{i+1}}, x) + S_p(\Psi_{i+1}, x)$. Si i est défini par l'inégalité $q(i) \leqslant p < q(i+1)$, la relation (1.16) montre que $\int_0^{2\pi} \Psi_{i+1} dx < 2q^{-1}(i+1) \int_0^{2\pi} f_{n_{i+1}} dx = o(p^{-1})$. Il en résulte que $S_p(\Psi_{i+1}, x)$ tend uniformément vers zéro quand $p \to \infty$. Les relations (1.13), (1.15) et (1.18) prouvent que $S_p(\Phi_i, x) \to f(x)$ et $S_p(f_{n_{i+1}}, x) \neq o(1)$ pour presque tout x.

4. Pour démontrer le théorème 2, nous allons définir une suite de fonctions f_n de façon que

(1.23) $$f_n(x) \geqslant 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = 0,$$

(1.24) *pour chaque n, $\mathfrak{S}[f_n]$ converge partout,*

(1.25) $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \underset{x}{E}\,[\max_{\pi} |S_p(f_n, x)| > M_n] = 2\pi, \quad \lim_{n\to\infty} M_n = \infty,$$

(1.26) $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \underset{x}{E}\,[\max_{(u)} \frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x+t) - f_n(x)|\,dt < \omega(u)] = 2\pi$$

(1.27) *pour chaque n, l'intervalle $(0, 2\pi)$ se décompose en un nombre fini de segments dans lesquels la fonction f_n reste constante.*

Dans ce but, définissons d'abord une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres positifs, convergeant vers zéro et telle que

(1.28) $$\varepsilon_n\,\omega(1/n)\lg n \to \infty.$$

Posons notamment

(1.29) $$f_n = \varepsilon_n\,\omega(1/n)\,\varphi_n(x),$$

où $\varphi_n(x)$ désigne la fonction d'ordre n de M. Kolmogoroff.

Grâce à la formule (8) de la note citée de M. Kolmogoroff, il nous suffit de prouver l'inégalité (1.26); or, elle est presque évidente, car en chaque point $x \in D_n$ où

(1.30) $$D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k + \frac{\varepsilon_n}{n},\ A_{k+1} - \frac{\varepsilon_n}{n}\right) \quad \text{et} \quad A_k = \frac{4\pi k}{2n+1},$$

on a

(1.31) $$\max_{(u)} \frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x+t) - f_n(x)|\,dt \leqslant M\omega(u),$$

où M désigne une constante absolue.

5. Pour achever la démonstration du théorème 2, posons

(1.32) $$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}.$$

Si la suite $\{n_i\}$ croît assez rapidement, la condition (1.23) entraîne l'existence et la sommabilité de la fonction f et les conditions (1.24), (1.25), (1.23) la divergence presque partout de $\mathfrak{S}[f]$; enfin, les conditions (1.26) et (1.27) entraînent presque partout

(1.33) $$\frac{1}{u}\int_0^u |f(x+t) - f(x)|\,dt = O(\omega(u)).$$

Nous laissons au lecteur les détails du calcul.

CHAPITRE II.

1. Posons

(2.01) $$\Delta_k(x, u) = \Delta_k(f, x, u) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+iu).$$

Les propriétés les plus importantes de ces expressions résultent des égalités suivantes

(2.02) $$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} i^s = 0 \quad \text{pour} \quad s = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

(2.03) $$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} i^k = k!$$

En particulier, on en déduit les deux lemmes suivants.

Lemme A.

(2.04) $$\Delta_k(x, u) = \Delta_{k-1}(x+u, u) - \Delta_{k-1}(x, u).$$

Lemme B. *L'égalité*

(2.05) $$f(x+t) = f(x) + t f^{(1)}(x) + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x) + \frac{\omega(x, t)}{k!} t^k,$$

où $|\omega(x, t)| \leqslant M$ pour $|t| \leqslant k\delta$, entraîne pour $|u| \leqslant \delta$ l'inégalité

(2.06) $$|\Delta_k(x, u)| \leqslant M\lambda_k |u|^k,$$

où la constante λ_k est égale à $\dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} i^k.$

2. *Nous dirons que la fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ remplit dans un ensemble E la condition W_k, et nous écrirons $f \epsilon W_k(E)$, si f vérifie pour $x \epsilon E$ la relation* (0.10). Dans la suite, nous ne considérerons que des ensembles E de mesure positive. Enfin, nous désignerons par P_E (ou tout court par P) chaque sous-ensemble de E parfait et de mesure positive.

Lemme 1. *Si $f \epsilon W_k(E)$, il existe un ensemble $P = P_E$ et deux fonctions g et h telles que*

(2.07) $$g + h = f,$$

(2.08) *la fonction g est absolument continue dans tout l'intervalle* (0,1), *sa dérivée $g'(x)$ est continue et appartient à $W_{k-1}(P)$,*

(2.09) $$h \epsilon W_k(P),$$

(2.10) $$h^{(k-1)}(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad x \epsilon P.$$

Démonstration. L'ensemble E étant de mesure positive et la fonction f mesurable, il existe un ensemble $P = P_E$ tel que

(2.11) $$|\omega(x, t)| \leqslant M \qquad \text{pour} \quad x \epsilon P \quad \text{et} \quad |t| \leqslant k\delta,$$

M et δ désignant deux constantes positives.

Nous pouvons admettre aussi que le diamètre de l'ensemble P ne surpasse pas δ. En vertu du lemme B, l'inégalité (2.11) donne

(2.12) $$|\Delta_k(x, u)| \leqslant M \lambda_k |u|^k \qquad \text{pour} \quad x \epsilon P.$$

En supposant que x et $x+u$ appartiennent à P, on obtient en vertu des formules (2.04), (2.05), (2.02) et (2.06):

(2.13) $$\Delta_k(x, u) = \Delta_{k-1}(x+u, u) - \Delta_{k-1}(x, u) = \\ = \{f^{(k-1)}(x+u) - f^{(k-1)}(x)\} u^{k-1} + 2\theta M \lambda_k u^k,$$

où $|\theta| \leqslant 1$. Par conséquent,

(2.14) $$|f^{(k-1)}(x+u) - f^{(k-1)}(x)| \leqslant 3M \lambda_k |u|.$$

Cela prouve que la fonction $f^{(k-1)}$ est absolument continue sur P.

Soit $g^{(k-1)}(x)$ la fonction coïncidant avec $f^{(k-1)}(x)$ dans P et linéaire dans les segments contigus à P. Soit g son intégrale indéfinie d'ordre $k-1$. En posant $h = f - g$, on trouve les fonctions g et h demandées.

3. Reprenons la fonction h du numéro précédent. Les formules (2.02) et (2.10) donnent pour $x \epsilon P$ et $|u| < \delta$

(2.15) $$|\Delta_{k-1}(x, u)| = |\Delta_{k-1}(h, x, u)| \leqslant M \lambda_k |u|^k,$$

où le nombre M n'est pas nécessairement le même qu'auparavant. D'autre part, en tenant compte du lemme A,

(2.16) $$\Delta_{k-1}(x, u) = \Delta_{k-2}(x+u, u) - \Delta_{k-2}(x, u),$$

de sorte que, si les points x et $x+u$ appartiennent à P, on peut exprimer $\Delta_{k-2}(x+u, u)$ et $\Delta_{k-2}(x, u)$ par les valeurs de h tirées de la formule (2.05), écrite respectivement pour x et $x+u$. Il en résulte que

(2.17) $$\{h^{(k-2)}(x+u) - h^{(k-2)}(x)\} u^{k-2} + 2\theta M \lambda_k u^k = \Delta_{k-1}(h, x, u), \quad |\theta| \leqslant 1.$$

On conclut des formules (2.17) et (2.15) que

(2.18) $$|h^{(k-2)}(x+u) - h^{(k-2)}(x)| \leqslant 3M \lambda_k u^2.$$

En posant dans cette inégalité $y = x+u$, on obtient pour chaque couple (x, y) de points appartenant à P

(2.19) $$|h^{(k-2)}(y) - h^{(k-2)}(x)| \leqslant 3M \lambda_k |y-x|^2.$$

Soit $h_1^{(k-2)}(x)$ la fonction coïncidant avec $h^{(k-2)}(x)$ dans P et linéaire dans les intervalles contigus à P. Soit $h_1(x)$ son intégrale indéfinie d'ordre $k-2$. Dans chaque point de densité de l'ensemble P, on a $h_1^{(k-2)}(x) \epsilon W_2$, donc, à plus forte raison, $h_1(x) \epsilon W_k$ et $h_1'(x) \epsilon W_{k-1}$ (en supposant $k \geqslant 3$). En d'autres termes, il existe un ensemble $P_1 = P_{P_E} = P_P$ tel que $h_1'(x) \epsilon W_{k-1}(P_1)$. D'autre part, $h_1^{(k-2)}(x) = h^{(k-2)}(x)$ et $h^{(k-1)}(x) = 0$ pour $x \epsilon P_1$. En combinant ce résultat avec celui du lemme 1 (et en changeant les notations), on trouve le

Lemme 2. *Si $f \epsilon W_k$, $k \geqslant 3$, il existe un ensemble $P = P_E$ et deux fonctions g et h telles que*

(2.20) $$g + h = f,$$

(2.21) *la fonction g est absolument continue dans tout l'intervalle* (0,1), *sa dérivée est continue et satisfait à la condition $g'(x) \epsilon W_{k-1}(P)$,*

(2.22) $$h \epsilon W_k(P),$$

(2.23) $$h^{(k-2)}(x) = h^{(k-1)}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \epsilon P.$$

4. On arrive par une induction facile au

Lemme 3. *Si $f \in W_k(E)$, il existe un ensemble $P = P_E$ et deux fonctions g et h telles que*

$$g + h = f, \tag{2.24}$$

(2.25) *la fonction g est absolument continue dans tout l'intervalle* $(0,1)$, *sa dérivée $g'(x)$ est continue et $g'(x) \in W_{k-1}(P)$,*

$$h(x+t) = h(x) + \theta M t^k \quad \text{où} \quad |\theta| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \in P \quad \text{et} \quad |t| < \delta. \tag{2.26}$$

5. ***Lemme 4.*** *Dans les conditions du lemme 3, on peut choisir un ensemble $\overline{P} = P_E$ et deux fonctions $\overline{g}$ et $\overline{h}$ de sorte que:*

$$\overline{g} + \overline{h} = f(x), \tag{2.27}$$

$$\overline{h}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \overline{P}, \tag{2.28}$$

$$\overline{h}(x+t) = \theta M t^k \quad \text{où} \quad |\theta| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \in \overline{P} \quad \text{et} \quad |t| < \delta, \tag{2.29}$$

(2.30) *la derivée $\overline{g}'(x)$ soit continue et $\overline{g}'(x) \in W_{k-1}(\overline{P})$.*

Démonstration. Reprenons la fonction h du paragraphe précédent. Comme le lemme est banal pour $k=1$ [1]), nous nous bornerons au cas $k > 1$. Soit $\omega(x)$ un polynôme défini de façon à avoir:

$$\omega(0) = 0, \qquad \omega(1) = 1, \tag{2.31}$$

$$\omega'(0) = \omega'(1) = 0. \tag{2.32}$$

Supposons, comme toujours, que le diamètre de l'ensemble P ne surpasse pas δ et soient b et a respectivement la borne supérieure et inférieure de P. Nous allons définir une fonction $r(x)$ comme il suit:

$$r(x) = h(x) \quad \text{pour} \quad x \in P, \tag{2.33}$$

(2.34) *si* $\Delta = (x_i, x_i + \delta_i)$ *est un segment contigu à* P *et* $0 \leqslant t \leqslant \delta_i$, *alors* $r(x_i + t) = h(x_i) + (h(x_i + \delta_i) - h(x_i))\, \omega\left(\dfrac{t}{\delta_i}\right)$,

$$r = h(a) \quad \text{pour} \quad x \leqslant a \qquad \text{et} \qquad r = h(b) \quad \text{pour} \quad x \geqslant b. \tag{2.35}$$

[1]) Voir le § 8 de ce chapitre.

Cette fonction est évidemment continue en même temps que sa dérivée dans tout l'intervalle $(0,1)$. En effet, pour $x \in P$ on a $r'(x) = 0$; d'autre part, en désignant par M' le maximum de la fonction $|\omega'(x)|$ dans l'intervalle $(0,1)$, on obtient

$$\max_{x \in \Delta} |r'(x)| \leqslant M' M \delta^{k-1}. \tag{2.36}$$

Il en résulte encore que la fonction $r'(x)$ vérifie la condition W_{k-1} dans chaque point de densité de l'ensemble P. La fonction $\overline{h} = h - r$ vérifie donc presque partout dans P la condition W_k et s'annule dans P. Pour achever la démonstration, il suffit de poser $\overline{g} = g + r$ et de désigner par $\overline{P}$ un sous-ensemble convenable de P.

6. Nous pouvons maintenant démontrer la première partie du théorème 3. Pour $k=1$, la proposition est vraie; cela résulte d'un théorème bien connu de M. Denjoy [1]).

Admettons qu'elle est encore vraie pour $k-1$ et passons à l'établir pour k. En vertu du lemme 4, on a en effet,

$$f = \overline{g} + \overline{h},$$

où les fonctions $\overline{g}$ et $\overline{h}$ remplissent les conditions (2.28), (2.29) et (2.30). La proposition étant vraie pour $k-1$, la fonction $\overline{g}'(x)$ admet presque partout dans P une dérivée d'ordre $k-1$ au sens de de la Vallée Poussin; la fonction g admet donc à plus forte raison une dérivée analogue d'ordre k. Reste à prouver que la fonction $\overline{h}$ admet une dérivée d'ordre k au sens de de la Vallée Poussin. Or, c'est évident pour chaque point de densité de l'ensemble P [2]).

7. En utilisant les résultats du § précédent, nous pouvons supposer que la fonction f admet presque partout dans P une dérivée d'ordre k au sens de de la Vallée Poussin. *Il en résulte que la formule* (2.30) *du lemme 4 peut être remplacée par la suivante*:

$$g'(x+t) = g'(x) + g^{(2)}(x)\, t + \ldots + \frac{g^{(k)}(x)}{(k-1)!} t^{k-1} + o(t^{k-1}). \tag{2.37}$$

[1]) Voir p. ex. Saks 1, p. 172.

[2]) La démonstration que nous avons donnée prouve l'existence de $f_{(k)}(x)$ presque partout dans E, même si l'on a la relation (0.10) seulement pour $t \to +0$ (ou $t \to -0$). Le résultat subsiste pour les fonctions non mesurables.

8. En appliquant les résultats obtenus, nous allons prouver par recurrence la seconde partie du théorème 3.

Soit d'abord $k=1$.

Comme fonction mesurable, la fonction $f'(x)$ est continue sur un ensemble $P=P_E$; nous pouvons même supposer que l'on a *uniformément* dans P

(2.38) $$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=f'(x).$$

Soit $g'(x)$ une fonction continue dans tout l'intervalle considéré et coïncidant avec $f'(x)$ dans P.

Cela posé, la fonction

(2.39) $$h=f-g$$

remplit uniformément dans P la condition

(2.40) $$\lim_{t\to 0}\frac{h(x+t)-h(x)}{t}=0.$$

En particulier, la dernière formule entraîne pour les segments $\Delta=(x_i, x_i+\delta_i)$ contigus à P

(2.41) $$\max_{x,y\in\Delta}|h(x)-h(y)|=o(|\Delta|)=o(\delta_i).$$

Définissons la fonction $r(x)$ par les formules (2.31)—(2.35).

La fonction r et sa dérivée r' sont continues dans tout l'intervalle (0,1). Cela résulte du fait que r' s'annule dans P et que l'on a dans les segments $\Delta=(x_i, x_i+\delta_i)$ contigus à P

(2.42) $$\max_{x\in\Delta}|r'(x)|\leqslant M'M\,|h(x_i+\delta_i)-h(x_i)|\,\delta^{-1}=o(1).$$

La fonction $s=h-r$ s'annule dans P et

(2.43) $$\max_{x\in\Delta}|s(x)|\leqslant\max_{x\in\Delta}|h(x)-h(x_i)|+\max_{x\in\Delta}|r(x)-r(x_i)|\leqslant M|\Delta|.$$

En désignant la fonction $g+r$ par g et la fonction s par h, on obtient le théorème pour $k=1$.

9. Supposons le théorème démontré pour $k=n-1$. Afin de l'établir pour $k=n$, choisissons un ensemble $P=P_E$ et deux fonctions g et h de façon à avoir les formules (2.27), (2.28), (2.29) et (2.37).

Nous admettons que le diamètre de l'ensemble P ne surpasse pas δ. En vertu de (2.29), on a alors pour les segments contigus à P

(2.44) $$\max_{x\in\Delta\subset CP}|h(x)|\leqslant M|\Delta|^k \text{ [1]}.$$

D'autre part, le théorème étant supposé vrai pour $k=n-1$, il existe un sous-ensemble Q parfait et de mesure positive de l'ensemble P et deux fonctions $r'(x)$ et $s'(x)$ telles que:

(2.45) $$g'(x)=r'(x)+s'(x),$$

(2.46) $$r'(x)=g'(x)\quad \textit{pour}\quad x\in Q,$$

(2.47) *la fonction* r' *et ses* $n-1$ *premières dérivées sont continues*,

(2.48) *on a* $\max_{x\in\Delta}|s'(x)|\leqslant M|\Delta|^{n-1}$ *pour chaque segment* Δ *contigu à* Q.

Les intégrales r et s des fonctions r' et s' remplissent les conditions suivantes:

(2.49) la fonction r admet dans tout l'intervalle (0,1) n dérivées continues,

(2.50) on a $s(x+t)=s(x)+o(t^n)$ pour presque tout $x\in Q$.

Soient:

(2.51) $R\subset Q$ un ensemble parfait de mesure positive et tel que la formule (2.50) s'y trouve remplie *uniformément*;

$\omega(x)$ un polynôme défini de façon que l'on ait

(2.52) $$\omega(0)=0\qquad \omega(1)=1,$$

(2.53) $$\omega^{(i)}(0)=\omega^{(i)}(1)=0\quad\text{pour}\quad i=1,2,\ldots,n;$$

$p(x)$ une fonction définie par les trois conditions suivantes:

(2.54) $$p(x)=s(x)\quad\text{pour}\quad x\in R,$$

(2.55) $\Delta=(x_i, x_i+\delta_i)$ désignant un segment contigu à R et $0\leqslant t\leqslant\delta$,

on a $\quad p(x_i+t)=s(x_i)+(s(x_i+\delta_i)-s(x_i))\,\omega\left(\dfrac{t}{\delta_i}\right)$,

(2.56) $p(x)=s(a)$ pour $x\leqslant a$ et $p(x)=s(b)$ pour $x\geqslant b$, où (a, b) désigne le plus petit segment contenant R;

[1]) CA désigne le complément de l'ensemble A.

soit enfin

$$M^{(l)} = \max|\omega^{(l)}(x)| \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2.57}$$

En s'appuyant sur la formule évidente

$$\max_{x \in \Delta \subset Cn} p^{(l)}(x)| \leqslant M^{(l)} |s(x_i + \delta_i) - s(x_i)| \, \delta^{-l} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{2.58}$$

on prouve par recurrence que la fonction p admet dans tout l'intervalle (0,1) n dérivées continues. Il en résulte que la fonction $q = s - p$ vérifie l'inégalité

$$\max_{x \in \Delta \subset CR} |q(x)| \leqslant M\, |\Delta|^n. \tag{2.59}$$

La fonction h s'annulant dans P, puisque $R \subset Q \subset P$, la formule (2.24) donne

$$\max_{x \in \Delta \subset CR} |h(x)| \leqslant M\, |\Delta|^n. \tag{2.60}$$

En désignant par P, g, h respectivement l'ensemble R, la fonction $r+p$ et la somme $h+q$, on obtient le théorème pour $k=n$, ce qui achève la démonstration.

10. Nous allons tirer du théorème démontré une conséquence immédiate, à savoir [1]):

Si la fonction f admet dans un ensemble E de mesure positive une dérivée d'ordre k au sens de de la Vallée Poussin, on a pour chaque $i < k$ presque partout dans E:

$$f^{(i)}(x+t) = f^{(i)}(x) + t f^{(i+1)}(x) + \ldots + \left(\frac{f^{(k)}(x)}{(k-i)!} + \varepsilon_t\right) t^{k-i} \tag{2.61}$$

où $\lim_{t \to 0} {}_a\, \varepsilon_t = 0$ [2]).

La démonstration résulte des formules (0.13)—(0.17). En particulier, en prenant $i = k-1$, on obtient (0.11).

---

[1]) Au sujet des applications de ce théorème dans la théorie des séries trigonométriques, voir Marcinkiewicz et Zygmund **1**.

[2]) En général, la fonction ε_t n'existe pas pour certains t.

CHAPITRE III.

1. Comme nous l'avons remarqué dans l'introduction, le théorème 4 peut être regardé à la fois comme une généralisation et comme une conséquence d'une proposition de M. Lusin. Cette dernière a attiré par son importance l'attention de plusieurs mathématiciens qui l'ont généralisé aux fonctions $f \epsilon L$ [1]).

C'est en nous basant sur le résultat de M. Lusin, que nous allons démontrer le théorème 4.

Lemme 1. *Si la fonction $h(x)$ de période 2π et s'annulant dans un ensemble parfait P remplit dans les segments $\Delta = (x_i - 3\delta_i, x_i + 3\delta_i)$ contigus à P la condition* (0.17), *on a presque partout dans P:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{h(x+t)}{t^{k+1}}\right| dt < \infty \qquad k \geqslant 1. \tag{3.01}$$

Démonstration [2]). Soit $h^*(x)$ la fonction définie dans les segments $(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$ par la formule

$$h^*(x) = 3\,|h(x_i + 3(x - x_i))| \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.02}$$

et s'annulant en dehors de ces intervalles.

Considérons l'intégrale double

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(x)\, h^*(t)}{|t-x|^{k+1}}\, dt\, dx, \tag{3.03}$$

où $\varphi(x)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble P.

Or, comme $h^*(t) = 0$ en dehors des intervalles $(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(x)\, h^*(t)}{|t-x|^{k+1}}\, dt\, dx = \sum_{(i)} \int_{x_i - \delta_i}^{x_i + \delta_i} h^*(t)\, dt \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(x)\, dx}{|t-x|^{k+1}}. \tag{3.04}$$

---

[1]) cf. Privaloff **1**, Plessner **2**; une démonstration purement métrique a été donnée par Besicovitch **1,2**.

[2]) La méthode de cette démonstration a été déjà utilisée chez Marcinkiewicz **1**.

D'autre part, $\varphi(x)=0$ dans les segments Δ. Il en résulte pour $t\,\epsilon\,(x_l-\delta_l, x_l+\delta_l)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(x)\,dx}{|t-x|^{k+1}}\leqslant\frac{2}{k}\,\delta_l^{-k}. \tag{3.05}$$

En portant cette évaluation dans (3.04), on en tire

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(x)\,h^*(t)}{|t-x|^{k+1}}\,dt\,dx\leqslant\sum_{(l)}{}'\frac{2}{k}\int_{x_l-\delta_l}^{x_l+\delta_l}3M\cdot\delta_l^k\cdot\delta_l^{-k}\,dt\leqslant \tag{3.06}$$

$$\leqslant\frac{6M}{k}\int_{-\pi}^{\pi}dt=\frac{12\,\pi M}{k}.$$

D'après le théorème bien connu de M. Fubini, on a pour presque tout x

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,\frac{h^*(t)}{|t-x|^{k+1}}\,dt<\infty. \tag{3.07}$$

Cela revient, pour $x\,\epsilon\,P$, à

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h^*(t)}{|t-x|^{k+1}}\,dt<\infty. \tag{3.08}$$

L'inégalité (3.08) entraîne la formule (3.01) dans chaque point de densité de l'ensemble P.

2. Soient g et h des fonctions définies de façon à satisfaire aux conditions (0.13)—(0.16). La fonction g admettant k dérivées continues, on démontre en intégrant par parties que l'existence de l'intégrale (0.18) équivaut à celle de l'intégrale (0.20).

En vertu du théorème de M. Lusin, celle-ci existe presque partout. D'autre part, d'après (0.16), (0.14) et le lemme démontré, on a presque partout dans P

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{h(t)}{(x-t)^{k+1}}\right|dt<\infty; \tag{3.09}$$

à plus forte raison l'intégrale (0.18) de la fonction h existe presque partout dans P. Il en résulte que l'intégrale (0.18) existe presque partout dans un ensemble $P=P_G$, donc presque partout dans E.

3. Nous allons rappeler quelques définitions concernant la sommabilité de séries. Soit donnée une série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu. \tag{3.10}$$

On pose

$$s_n^{(0)}=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu \qquad s_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu^{(k-1)} \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{3.11}$$

$$C_n^{(0)}=1 \qquad C_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}C_\nu^{(k-1)} \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{3.12}$$

On dit que la série (3.10) est *sommable par la méthode* (C,k) vers la somme s, si l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n^{(k)}}{C_n^{(k)}}=s. \tag{3.13}$$

On vérifie facilement la relation

$$s_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\,C_{n-\nu}^{(k)}. \tag{3.14}$$

En particulier, si la série (3.10) est une série de Fourier-Lebesgue, la formule (3.14) donne

$$\sigma_n^{(k)}(x)=\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_n^{(k)}(t)\,dt, \tag{3.15}$$

où $s_n^{(k)}(x)$ désigne l'expression (3.11) formée pour ladite série de Fourier et

$$K_n^{(k)}(t)=1/2+\frac{1}{C_n^{(k)}}\sum_{\nu=1}^{n}C_{n-\nu}^{(k)}\cos\nu t. \tag{3.16}$$

4. On a le

Lemme 2. *Les expressions $K_n^{(k)}(t)$ vérifient les inégalités*

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}K_n^{(k)}(t)\right|\leqslant M\,|t|^{-k-1} \qquad (n=1,2,3,\ldots), \tag{3.17}$$

où M est une constante indépendante de n et de t.

Ce lemme se trouve démontré, bien que non formulé explicitement, dans le livre de M. Zygmund, **1**, p. 259. On y trouve une inégalité générale pour

$$\left|\frac{d^r}{dx^r} K_n^{(\alpha)}(x)\right|, \tag{3.18}$$

quels que soient r et α. En y substituant $r=\alpha=k$ et en supposant que $n|t|\geqslant 1$, on obtient immédiatement l'inégalité (3.17). Celle-ci est donc vraie, pourvu que $|t|\geqslant 1/n$.

En ce qui concerne le cas $|t|\leqslant 1/n$, il suffit de remarquer que, pour tout r et α,

$$\frac{d^r}{dx^r} K_n^{\alpha}(x) = O(n^{r+1}) \tag{3.19}$$

uniformément en x [1]). Pour $|t|\leqslant 1/n$, l'inégalité (3.17) est une conséquence de (3.19).

L'inégalité (3.17) est donc vraie pour tout $0\leqslant t\leqslant \pi$.

5. Pour prouver le théorème 5, posons $f=g+h$, les fonctions g et h remplissant les conditions (0.13)—(0.16).

La fonction $g^{(k)}(x)$ étant continue dans tout l'intervalle $(0,2\pi)$, la série $\mathfrak{S}^{(k)}[g]=\mathfrak{S}[g^{(k)}]$ converge $(C, 1)$ partout.

Comme $\mathfrak{S}^{(k)}[f]=\mathfrak{S}^{(k)}[g]+\mathfrak{S}^{(k)}[h]$, il ne reste qu'à établir la sommabilité (C, k) de la série $\mathfrak{S}^{(k)}[h]$ presque partout dans P, pour en conclure la sommabilité (C, k) de la série $\mathfrak{S}^{(k)}[f]$ presque partout dans E.

La convergence presque partout de $\mathfrak{S}^{(k)}[h]$ dans P résulte facilement des formules (3.01) et (3.18).

6. On appelle la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{3.20}$$

série conjuguée à

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{3.21}$$

En appliquant le théorème 4, on prouve d'une façon analogue le

[1]) Zygmund, **1**, p. 259.

Théorème 5^{bis}. *Si la fonction f admet dans un ensemble E une dérivée d'ordre k au sens de de la Vallée Poussin, la série conjuguée à $\mathfrak{S}^{(k)}[f]$ est sommable (C, k) presque partout dans E.*

Cette proposition résulte aussi immédiatement du théorème 5 et d'un théorème général sur la sommabilité des séries conjuguées [1]).

CHAPITRE IV.

1. On dit que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{4.01}$$

est *sommable par le procédé de Poisson* vers la somme s, si l'on a

$$\lim_{r\to 1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu = s. \tag{4.02}$$

En particulier, pour les séries de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.03}$$

la sommabilité par la méthode de Poisson dans un point x revient à l'existence de la limite

$$\lim_{r\to 1} U(f, r, x) = \lim_{r\to 1} U(r, x) = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\theta) P(r,\theta)\, d\theta \tag{4.04}$$

où

$$P(r,\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2\dfrac{\theta}{2}}. \tag{4.05}$$

Posons:

$$P^*(r,\theta)=\frac{2(1-r)}{(1-r)^2+\theta^2}, \tag{4.06}$$

$$U^*(f,r,x)=U^*(r,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta)\, P^*(r,\theta)\, d\theta. \tag{4.07}$$

Un calcul facile donne

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{d}{d\theta}P(r,\theta)-\frac{d}{d\theta}P^*(r,\theta)\right| d\theta < M, \tag{4.08}$$

où M ne dépend pas de r.

[1]) Marcinkiewicz et Zygmund, **1**.

L'inégalité (4.08) prouve que la formule

$$\lim_{r\to 1} |U^*(f, r, x)| = \infty \tag{4.09}$$

entraîne

$$\lim_{r\to 1} |U(f, r, x)| = \infty. \tag{4.12}$$

2. Soient $I=(a, b)$ un segment, p un nombre entier et $\delta<1$ un nombre positif. Posons:

$$t_i = a + i\frac{b-a}{p} \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, p), \tag{4.11}$$

$$S(I, p, \delta) = \left(a,\ a+\frac{\delta}{2p}(b-a)\right) + \tag{4.12}$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left(t_i-\frac{\delta}{2p}(b-a),\ t_i+\frac{\delta}{2p}(b-a)\right) + \left(b-\frac{\delta}{2p}(b-a),\ b\right),$$

$$R(I, p, \delta) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(t_i+\frac{\delta}{2p}(b-a),\ t_{i+1}-\frac{\delta}{2p}(b-a)\right). \tag{4.13}$$

Il nous sera utile de définir les opérations $S(I, p, \delta)$ et $R(I, p, \delta)$ aussi pour des systèmes P de segments disjoints:

$$S(P, p, \delta) = \sum_{I\in P} S(I, p, \delta), \tag{4.14}$$

$$R(P, p, \delta) = \sum_{I\in P} R(I, p, \delta). \tag{4.15}$$

En supposant l'intervalle $I_0=(-\pi, \pi)$ et deux suites $\{p_i\}$, $\{\delta_i\}$ définies, nous allons définir par récurrence les ensembles S_n et R_n:

$$S_1 = S(I_0, p_1, \delta_1), \qquad R_1 = R(I_0, p_1, \delta_1), \tag{4.16}$$

et en général

$$S_k = S(R_{k-1}, p_k, \delta_k), \qquad R_k = R(R_{k-1}, p_k, \delta_k). \tag{4.17}$$

Il nous sera commode de regarder les segments des ensembles R_n comme fermés.

Il est évident que

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots \tag{4.18}$$

L'ensemble

$$R = \prod_{i=1}^{\infty} R_i \tag{4.19}$$

est donc parfait et, d'après sa définition,

$$\operatorname{mes} R = 2\pi \prod_{i=1}^{\infty}(1-\delta_i). \tag{4.20}$$

D'autre part,

$$S_n \cdot S_m = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq m, \tag{4.21}$$

$$S \cdot R = 0, \tag{4.22}$$

où

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n. \tag{4.23}$$

Convenons encore d'appeler *normal* un segment I de S_n, si aucune de ses extrémités ne coïncide avec l'extrémité d'un segment quelconque de l'ensemble R_{n-1}. Enfin, disons qu'un segment I de S_n est *extrême*, s'il n'est pas normal.

3. En supposant les suites $\{p_i\}$ et $\{\delta_i\}$ définies, nous allons construire une fonction f qui remplit les conditions du théorème 6.

Soit (a, b) un segment normal de S_n. Posons dans les trois intervalles:

$$\Delta^{(1)} = (a,\ a+\lambda_n^2), \qquad \Delta^{(2)} = \left(\frac{a+b}{2}-\frac{\lambda_n^2}{2},\ \frac{a+b}{2}+\frac{\lambda_n^2}{2}\right), \tag{4.24}$$
$$\Delta^{(3)} = (b-\lambda_n^2,\ b),$$

où $\lambda_n = (b-a)$, respectivement:

$$f_n(x) = \delta_n\lambda_n^{-2}, \qquad f_n(x) = -2\delta_n\lambda_n^{-2}, \qquad f_n(x) = \delta_n\lambda_n^{-2}. \tag{4.25}$$

En dehors des segments normaux de S_n, nous poserons $f_n=0$.

En vertu de la formule (4.21), la fonction

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{4.26}$$

est ainsi partout définie.

Cette fonction s'annule dans R et est sommable dans chaque segment contigu à R, c'est à dire dans chaque segment de S.

Pour prouver qu'elle est intégrable au sens large de Denjoy, il suffit de prouver[1]) que l'on a dans les segments Δ de S:

$$\int_{\Delta_l} f\,dx = 0, \tag{4.27}$$

$$\left|\int_{\Delta_l} f\,dx\right| = \max_{(\alpha,\beta)\subset\Delta_l}\left|\int_\alpha^\beta f\,dx\right| = o(1). \tag{4.28}$$

Or, ces deux formules sont évidentes d'après (4.24) et (4.25).

4. Nous allons préciser les définitions des suites $\{p_l\}$ et $\{\delta_l\}$. Les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ étant définis, on peut former les ensembles correspondants R_k et S_k pour $k=1, 2, \ldots, n$. Désignons par λ_n et ν_n respectivement la longueur d'un segment normal de S_n et d'un segment de R_n. Posons

$$\delta_{n+1} = \nu_n \tag{4.29}$$

et choisissons p_{n+1} de façon que

$$\nu_n > \nu_{n+1}. \tag{4.30}$$

En supposant par exemple $p_1=3$ et $\delta_1=1/3$, les suites $\{p_l\}$ et $\{\delta_l\}$ se trouvent définies et, vu (4.20), (4.29) et (4.30),

$$\operatorname{mes} R > 0. \tag{4.31}$$

5. Soient: $I=(a, b)$ un segment quelconque de R_n, ν_n sa longueur, x un point de l'intervalle $(a+\nu_n/3, b-\nu_n/3)$, $r_n = 1-\nu_n/3$ et

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \qquad \Psi_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x). \tag{4.32}$$

Considérons l'expression

$$U^*(f, r_n, x) = U^*(\Phi_n, r_n, x) + U^*(\Psi_n, r_n, x). \tag{4.33}$$

Comme

$$U^*(\Psi_n, r_n, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x+\theta)\,P^*(r_n, \theta)\,d\theta = \tag{4.34}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\theta} \Psi_n(x+t)\,dt\; P^*(r_n, \theta)\Big|_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\theta} \Psi_n(x+t)\,dt\right\} dP^*(r_n, \theta),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x+t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(t)\,dt = 0 \tag{4.35}$$

[1]) Voir Saks **1**, pp. 205—206.

et comme la variation totale de $P^*(r, \theta)$ dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ ne surpasse pas $4/(1-r)$, on trouve

$$|U^*(\Psi_n, r_n, x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\theta} \Psi_n(x+t)\,dt\right|\cdot|d\,P^*(r_n, \theta)| \leqslant \tag{4.36}$$

$$\leqslant \frac{4}{1-r_n}\max_{-\pi\le\theta\le\pi}\left|\int_{-\pi}^{\theta}\Psi_n(x+t)\,dt\right| \leqslant 12\,\nu_n^{-1}\max_{-\pi\le\alpha\le\beta\le\pi}\left|\int_\alpha^\beta \Psi_n(x+t)dt)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 12\,\nu_n^{-1}\max_{(\alpha,\beta)}\left|\int_\alpha^\beta \Psi_n(t)\,dt\right| \leqslant 12\,\nu_n^{-1}\cdot 2\,\delta_{n+1} = 24.$$

D'autre part,

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P^*(r, \theta) = 4\,(1-r)\,\frac{3\,\theta^2-(1-r)^2}{((1-r)^2+\theta^2)^3}. \tag{4.37}$$

La dernière expression est positive pour $|\theta| > (1-r)/\sqrt{3}$ et, à plus forte raison, pour $|\theta|>1-r$; en particulier, si $r=r_n=1-\nu_n/3$, elle est positive pour $|\theta|>\nu_n/3$.

Donc, si l'intervalle $(\theta-h, \theta+h)$ est disjoint avec $(-\nu_n/3, \nu_n/3)$ on obtient l'inégalité

$$P^*(r_n, \theta+h) - 2P^*(r_n, \theta) + P^*(r_n, \theta-h) \geqq 0. \tag{4.38}$$

La dernière formule donne pour chaque segment $(\alpha, \beta)\,\epsilon\,S_k$ où $k=1, 2, \ldots, n$:

$$\int_{\alpha-x}^{\beta-x} \Phi_n(x+\theta)\,P^*(r_n, \theta)\,d\theta = \int_\alpha^\beta \Phi_n(\theta)\,P^*(r_n, \theta-x)\,d\theta = \tag{4.39}$$

$$= \Phi_n(\alpha)\left\{\int_\alpha^{\alpha+\lambda_n^2}\left(P^*(r_n, \theta-x) - 2P^*\left(r_n, \theta-x+\frac{\lambda_n}{2}-\frac{\lambda_n^2}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + P^*(r_n, \theta-x+\lambda_n-\lambda_n^2)\,d\theta\right.\right\} \geqq 0.$$

Le point x appartenant à $(a, b)\,\epsilon\,R_n$, il existe un segment *normal* $(u, v)\,\epsilon\,S_n$ contigu à (a, b). Soit p. ex. $u<x$; alors, selon (4.39),

$$U^*(\Phi_n, r_n, x) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_{u-x}^{v-x} f_n(x+\theta)\,P(r_n, \theta)\,d\theta = \tag{4.40}$$

$$= \delta_n\,\lambda_n^{-2}\int_{u-x}^{v-x}(P^*(r_n, \theta) - 2P^*(r_n, \theta+\lambda_n/2-\lambda_n^2/2) + P^*(r_n, \theta+\lambda_n-\lambda_n^2)) \geqq$$

$$\geqq \delta_n\lambda_n^{-2}\lambda_n^2 \min_{u-x\le\theta\le v-x}(P^*(r_n, \theta) - 2P^*(r_n, \theta+\lambda_n/2-\lambda_n^2/2) + P^*(r_n, \theta+\lambda_n-\lambda_n^2)) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{4}\,\delta_n(\lambda_n-\lambda_n^2)^2 \min_{u-x\le\theta\le x-v}\frac{d^2}{d\theta^2}P^*(r_n, \theta) \geqq \frac{1}{8}\,\delta_n\,\lambda_n^2\,\min\,\frac{4}{3}\,\nu_n\,\frac{3\theta^2-(\nu_n/3)^2}{[(\nu_n/3)^2+\theta^2]^3}.$$

Comme $\nu_n/3 \leqslant v - x \leqslant \theta \leqslant u - x \leqslant 2\nu_n$, il en résulte que

$$U^*(\Phi_n, r_n, x) \geqslant \frac{1}{6}\,\delta_n\,\lambda_n^2\,\frac{2\,\theta^2}{(\nu_n^2+4\nu_n^2)^3} \geqq \frac{1}{6}\,\delta_n\,\lambda_n^2\,\frac{2(\nu_n/3)^2}{5^3\,\nu_n^6} \geqslant \tag{4.41}$$

$$\geqslant 15^{-3}\,\delta_n\,\lambda_n^2\,\nu_n^{-4} \geqslant 15^{-3}\,\delta_n^3\,\nu_n^{-1} \geqslant 15^{-3}\,\delta_n^{-1}.$$

Les formules (4.35) et (4.41) donnent

$$U^*(f, r_n, x) \geqq 15^{-3}\,\delta_n^{-1} - 24. \tag{4.42}$$

Soit

$$R_n^* = \sum_{(a,b)\epsilon R_n} (a + \nu_n/3,\ b - \nu_n/3), \qquad R^* = \limsup R_n^*. \tag{4.43}$$

Or, comme $R = \lim\limits_{k\to\infty} (R_k^* + R_{k+1}^* + R_{k+2}^* + R_{k+3}^* + \ldots)$, on a

$$\text{mes } E^* \geqq \lim_{k\to\infty} \text{mes } R_k^* \geqq 1/3\,R > 0 \;{}^{1)}. \tag{4.44}$$

D'autre part, si $x \subset R^*$, la formule (4.42) donne

$$\limsup_{r\to 1} |U^*(f, r, x)| = \infty \tag{4.45}$$

et d'après (4.10)

$$\limsup_{r\to 1} |U(f, r, x)| = \infty. \tag{4.46}$$

Le théorème 6 se trouve ainsi démontré.

6. Nous dirons que la *limite supérieure approximative* de la fonction $F(u)$ est *infinie dans le point* u_0, et nous écrirons $\overline{\lim}_{a\,u\to u_0} F(u) = \infty$, si $F(u) \to \infty$ pour u tendant vers u_0 le long d'un ensemble E dont u_0 est un point de densité supérieure positive.

Notons que *partout dans* R^*

$$\overline{\lim}_{a\,r\to 1} |U(f, r, x)| = \infty. \tag{4.47}$$

---

[1]) En réalité on a mes R^* = mes R.

7. Considérons la fonction $U(f, r, x) = U(r, x)$, harmonique dans le cercle-unité. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que $\lim_{a\,r\to 1} U(r, x)$ n'existe pas pour x appartenant à un ensemble R^* de mesure positive. Cette proposition peut être généralisée comme il suit:

La limite approximative

$$\lim_{\substack{a\\(r,\theta)\to(1,x)\\|\theta-x|\leq 1-r}} U(r, \theta)$$

n'existe en aucun point de R^*.

Cela veut dire que l'ensemble plan Q des points (r, θ) contenus dans le domaine défini par l'inégalité $|\theta - x| \leqslant 1 - r$ et tels que la limite $\lim U(r, \theta)$ existe pour $(r, \theta) \to (1, x)$, $(r, \theta) \epsilon Q$, admet le point $(1, x)$, où $x \epsilon R^*$, comme un point de densité inférieure nulle.

8. On vérifie par un calcul direct que, presque partout dans R,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt \tag{4.48}$$

n'existe pas, même si l'on considère cette limite comme une limite approximative.

9. Remarquons que l'existence, dans un ensemble de mesure positive, de la dérivée ordinaire de l'intégrale indéfinie de la fonction $f \epsilon D$ entraîne l'existence de l'intégrale (0.21). Cela résulte du théorème 4.

En effet, soient: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et E l'ensemble des points dans lequels la dérivée ordinaire $F'(x)$ existe. En vertu du théorème 4, l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{F(x+t) - 2F(x) + F(x-t)}{t^2}\,dt \tag{4.49}$$

existe presque partout dans E.

En intégrant par parties, on en déduit l'existence de l'intégrale (0.21), ce qui prouve la première partie du théorème 7.

10. Pour prouver que l'existence de l'intégrale (0.21) entraîne celle de la dérivée ordinaire de l'intégrale indéfinie de la fonction f, nous allons établir deux lemmes.

Lemme 1. *Si la fonction $f \epsilon D$ remplit dans un point x la condition*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\, dt \right| \leqslant M, \tag{4.50}$$

son intégrale indéfinie $F(x)$ vérifie dans ce point l'inégalité

$$\limsup_{t \to 0} \left| \frac{F(x+t)-2F(x)+F(x-t)}{t} \right| \leqslant 2M. \tag{4.51}$$

Démonstration. Soit η un nombre positif quelconque. Choisissons un δ pour que l'on ait

$$\left| \int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\, dt \right| \leqslant M+\eta \quad \text{pour } \varepsilon<\delta. \tag{4.52}$$

Il en résulte pour $0<\alpha<\beta<\delta$

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\, dt \right| \leqslant 2M+2\eta. \tag{4.53}$$

Soit $h<\delta$. Alors

$$F(x+h)-2F(x)+F(x-h)=\int_0^h \{f(x+t)-f(x-t)\}\, dt= \tag{4.54}$$

$$=\int_0^u \{f(x+t)-f(x-t)\}\, dt+\int_u^h \{f(x+t)-f(x-t)\}\, dt=$$

$$=h\int_\xi^h \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\, dt+\int_0^u \{f(x+t)-f(x-t)\}\, dt.$$

Le nombre u étant arbitraire, il en résulte en vertu de (4.53) que

$$\left| \frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h} \right| \leqslant 2M+2\eta, \tag{4.55}$$

d'où l'on déduit (4.51).

11. ***Lemme 2***[1]. *Si, dans chaque point d'un ensemble E, la fonction mesurable $g(x)$ admet une dérivée approximative et remplit la condition*

$$|g(x+t)-2g(x)+g(x-t)|=O(t), \tag{4.56}$$

alors elle y admet presque partout la dérivée ordinaire $g'(x)$.

Démonstration. Soit P un sous-ensemble de E de mesure positive et choisi de façon que l'on ait

$$|g(x+t)-2g(x)+g(x-t)| \leqslant M|t| \quad \text{pour} \quad x \epsilon P \quad \text{et} \quad |t|<\delta, \tag{4.57}$$

où M désigne une constante. Soit x un point de densité de l'ensemble P. Supposons $x=0$, $g(0)=\left(\frac{d}{dx}\right)_a g(0)=0$ et désignons par G un sous-ensemble de P admettant au point 0 une densité égale à 1 et tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}=0. \qquad (x \epsilon G). \tag{4.58}$$

Si $x \epsilon G$, $|x|<\eta<\delta$ et η est choisi conformément à ε, on a $|g(x)| \leqslant \varepsilon |x|$ et la densité moyenne de G dans le segment $(0, x)$ surpasse $1-\varepsilon/3$. Il en résulte qu'il existe un point $y \epsilon G$ tel que $(1-\varepsilon)|x| \leqslant |y| \leqslant |x|$ et $\frac{x+y}{2} \epsilon G$.

Le point y étant choisi, on a

$$\left| g(x)-2g\left(\frac{x+y}{2}\right)+g(y) \right| \leqslant \varepsilon M |x| \tag{4.59}$$

et comme y et $\frac{x+y}{2}$ appartiennent à G, on tire de (4.59)

$$|g(x)| \leqslant \varepsilon(M+3)|x|, \tag{4.60}$$

donc $g(x)=o(x)$, ce qui prouve l'existence de la dérivée ordinaire de g dans chaque point de densité de l'ensemble P, donc aussi presque partout dans E.

12. En rapprochant le résultat du § précédent de celui du lemme 1, on obtient immédiatement la seconde partie du théorème 7.

[1]) Ce lemme est un cas particulier d'un lemme démontré par Marcinkiewicz et Zygmund, 1. Nous en reproduisons ici la démonstration pour la commodité du lecteur.

13. Nous terminons ce chapitre par *l'exemple d'une fonction* $f \epsilon D$ *dont la série de Fourier converge partout* $(C, 1)$ *sans que l'intégrale* (0.21) *existe dans un ensemble de mesure positive.*

Posons $I_0 = (-\pi, \pi)$. Désignons par S_1 l'intervalle concentrique avec I_0, mais de longueur π, et posons $R_1 = I_0 - S_1$. D'une façon générale, désignons par S_n le système des segments concentriques avec les segments de R_{n-1}, mais 2^n fois plus courts, et soit $R_n = R_{n-1} - S_n$.

Les ensembles R_n et S_n étant définis, nous allons construire la fonction f. Soit $(a, b) \epsilon S_n$, $n \geqq 3$. Posons:

$$\nu_n = (b - a), \qquad \lambda_n = \nu_n^3, \tag{4.61}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2} - \lambda_n + t\right) = 2^{-n} \lambda_n^{-1} t \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \lambda_n, \tag{4.62}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2} + \lambda_n - t\right) = 2^{-n} \lambda_n^{-1} t \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \lambda_n, \tag{4.63}$$

et $f = 0$ en dehors des segments $\left(\frac{a+b}{2} - \lambda_n, \ \frac{a+b}{2} + \lambda_n\right)$ où $(a, b) \epsilon S_n$, $n = 3, 4, 5, \ldots$.

On vérifie que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{dt}{(t-x)^2} \tag{4.64}$$

existe dans chaque point $x \epsilon R$. En effet,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{dt}{(t-x)^2} = \sum_{n=3}^{\infty} \int_{S_n} f(t) \frac{dt}{(t-x)^2} \leqslant \tag{4.65}$$

$$\leqslant \sum 2^{n-1} \cdot 2^{-n} \cdot (\nu_n/3)^{-2} \cdot 2 \cdot \nu_n^3 = \sum 9 \nu_n \leqslant 9 \sum 2^{-n} < \infty.$$

D'après la formule (3.33), la série $\mathfrak{S}^{(1)}[f]$ converge $(C, 1)$ partout dans R, donc aussi partout dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$. La fonction f étant une fonction absolument continue généralisée [1]), sa dérivée approximative f' est intégrable D et on a $f = \int_{-\pi}^{x} f'(x)\, dx$, d'où l'on déduit $\mathfrak{S}^{(1)}[f] = \mathfrak{S}[f']$. Un simple calcul prouve que la dérivée ordinaire $f' = \left(\frac{d}{dx}\right) f$ n'existe dans aucun point $x \epsilon R$.

La fonction f vérifie donc les conditions demandées.

[1]) Voir par exemple, Saks, **1**, pp. 158—160.

Travaux cités.

Besicovitch A. **1.** Sur la nature des fonctions à carré sommable et des ensembles mesurables, Fund. Math., IV (1923) 172—196. **2.** On a general metric property of summable functions, Journal of the London Math. Soc. 1 (1926), 120—128.

Kaczmarz S. **1.** Integrale vom Dinischen Typus, Studia Mathematica, 3 (1931), 189—199.

Kolmogoroff A. **1.** Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, Fund. Math. IV (1923), 324—328.

Lusin N. **1.** Intégrale et série trigonométrique (en russe), Moscou, 1915, 1—242.

Marcinkiewicz J. **1.** On the convergence of Fourier series, Journal of the London Math. Soc. 10 (1935), 264—268.

Marcinkiewicz J. and Zygmund A. **1.** On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, Fund. Math., 26 (1936) 1—43.

Mazurkiewicz S. **1.** Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} dt$, Studia Math., 3 (1931), 114—118.

Plessner A. **1.** Über das Verhalten analytischer Funktionen auf dem Rande des Definitionsbereiches, Journal für Mathematik, 158 (1927), 219—227. **2.** Zur Theorie der konjugierten Reihen, Mitt. des Math. Seminar d. Univ. Giessen, 1923, 1—36.

Privaloff J. **1.** L'intégrale de Cauchy (en russe), Saratoff, 1918 1—94.

Saks S. **1.** Théorie de l'intégrale, Monogr. Matem. II, Warszawa 1933.

Titchmarsh E. C., **1.** The convergence of certain integrals, Proc. of the London Math. Soc., 24 (1925), 347—358.

de la Vallée Poussin. Ch. J., **1.** Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle Bull. de l'Acad. Royale de Belgique, 1908, 193—254.

Zygmund A., **1.** Trigonometrical Series, Monogr. Matem. V, Warszawa 1935. **2.** Sur quelques problèmes de la théorie des séries trigonométriques (en polonais), Mathesis Polska, 7 (1932), 49—58. **3.** Some points in the theory of trigonometrical and power series, Trans. of the American Math. Soc., 36 (1934), 586—616. **4.** Sur un théorème de M. Gronwall, Bull. de l'Acad. Polonaise, 1925, 207—217.

Wilno, 1. 8. 1935.