sance $2^{\aleph_\alpha}$. On pourrait donc regarder les opérations de la première catégorie — à un certain point de vue — comme „plus faibles" que celles de la seconde; aux opérations „plus faibles" de Hausdorff en dégré β appartiennent p. ex. les opérations $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{S}_{\beta+1}$, $\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}$, et aux „plus fortes" les opérations $\boldsymbol{S}_{\beta+1}$, $\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}$, $\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}\boldsymbol{S}_{\beta+1}$, puis (comme il résulte de l'analyse de la démonstration du th. 69°) les opérations $\underline{\boldsymbol{L}}_\beta$ et $\overline{\boldsymbol{L}}_\beta$, mentionnées p. 280, ensuite — dans le cas de $\beta=0$ — les opérations $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^*$ de Souslin et beaucoup d'autres. Il serait intéressant de soumettre cette classification des opérations de Hausdorff à une étude plus approfondie, du moins pour $\beta=0$.

Sur les transformations continues biunivoques.

Par

W. Sierpiński et E. Szpilrajn (Warszawa).

§ 1. *Théorème.* *Pour chaque couple X, Y d'espaces métriques de même puissance il existe un ensemble $Z \subset X \times Y$ tel que les espaces X et Y sont des images biunivoques et continues de l'ensemble Z.*

Désignons par f une transformation biunivoque de l'espace X en espace Y et par Z l'image de la fonction f, c. à d. l'ensemble de tous les couples $(x, f(x))$, où $x \in X$.

Or, les espaces X et Y sont des projections biunivoques de l'ensemble Z. En d'autres mots: $\varphi(p)=x$ et $\psi(p)=y$ désignant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point $p=(x, y) \in Z$, les fonctions φ et ψ sont continues; en outre f étant une fonction biunivoque, elles transforment d'une façon biunivoque l'ensemble Z en X et Y, c. q. f. d.

Remarque. Dans le cas où les espaces X et Y sont *séparables*, on peut remplacer dans l'énoncé du théorème l'ensemble $Z \subset X \times Y$ par *un ensemble Z de nombres irrationnels*. Cela résulte immédiatement du fait que chaque espace métrique séparable (donc en particulier l'espace $X \times Y$) est image biunivoque et continue d'un ensemble de nombres irrationnels [1]).

§ 2. Soit *M un espace métrique indénombrable, séparable et complet.* L'espace M contenant un ensemble homéomorphe à celui des nombres irrationnels [2]), il résulte du § 1 que *pour chaque couple X, Y de sous-ensembles de M de même puissance, il existe un ensemble Z contenu dans M et tel que X et Y sont des images biunivoques et continues de Z.*

[1]) Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 226, corollaire.

[2]) Cf. p. ex. Kuratowski, l. c., p. 229, corollaire 2.

Or le problème s'impose: existe-t-il un espace M (métrique, séparable et non complet, en particulier un ensemble linéaire), pour lequel cette proposition est en défaut?

A l'aide de l'hypothèse du continu on peut donner *une réponse positive* à cette question[1]).

Soit L un ensemble indénombrable, situé dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, ne possédant aucun sous-ensemble indénombrable non-dense. Soit S un ensemble indénombrable situé dans l'intervalle $1 \leqslant x \leqslant 2$ et ne possédant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle. L'existence de tels ensembles résulte comme on sait, de l'hypothèse du continu[2]), dont il résulte aussi qu'ils sont de la même puissance.

Nous allons démontrer que l'ensemble $M=L+S$ possède la propriété en question: il n'existe aucun sous-ensemble Z de M tel que les ensembles L et S soient des images continues et biunivoques de Z. Supposons, par contre, qu'un tel ensemble Z existe. Il existerait par conséquent deux fonctions continues et biunivoques f et g telles que $f(Z)=L$ et $g(Z)=S$. Chaque image continue de LZ étant de mesure nulle[3]), et, d'autre part, l'ensemble S ne contenant aucun ensemble indénombrable de mesure nulle, l'ensemble $g(LZ) \subset S$ serait au plus dénombrable. Par conséquent l'ensemble LZ serait également au plus dénombrable. D'une façon analogue, chaque image continue de l'ensemble SZ étant toujours de première catégorie[4]), et l'ensemble L ne contenant aucun ensemble indénombrable de première catégorie, l'ensemble SZ serait au plus dénombrable. Il serait donc de même de $Z=LZ+SZ$, ce qui est impossible.

§ 3. Le théorème du § 1 peut être énoncé aussi comme il suit:

Théorème. *Chaque fonction biunivoque f qui transforme un espace métrique X en espace métrique Y est une superposition de deux fonctions biunivoques: $f(x)=\varphi_2(\varphi_1(x))$, où φ_2 et φ_1^{-1}* [5]) *sont deux fonctions biunivoques et continues, définies sur un ensemble $Z \subset X \times Y$.*

En conservant les notations du § 1, il suffit de désigner par φ_1 la fonction inverse à φ et par φ_2 la fonction ψ. En d'autres termes: on n'a qu'à poser $\varphi_1(x)=(x, f(x))$ pour tout $x \in X$ et $\varphi_2(p)=f(x)$ pour chaque point $p=(x, f(x))$, où $x \in X$.

---

[1]) Cette réponse résulte également (sans l'hypothèse du continu) d'un théorème (non publié) de M. A. Lindenbaum.

[2]) Cf. p. ex. W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne 4, Warszawa-Lwów 1934, pp. 36 et 80.

[3]) Sierpiński, l. c., p. 39.

[4]) Sierpiński, l. c., p. 85.

[5]) $F(p)$ étant une fonction biunivoque définie sur un ensemble E, $F^{-1}(p)$ désigne sa fonction inverse (définie sur l'ensemble $F(E)$). $F(x)$ étant une fonction continue biunivoque, définie sur un ensemble linéaire E, sa fonction inverse peut être d'une nature très compliquée (p. e. non mesurable).

Remarque. La remarque du § 1 s'applique également au théorème qui précède.

Corollaire. *Lorsqu'une propriété (P) d'ensembles linéaires est invariante à la fois par rapport aux transformations continues biunivoques et aux transformations inverses à celles-ci, elle est invariante aussi par rapport à toutes les transformations biunivoques.*

§ 4. Le problème se pose: X et Y étant deux espaces de même puissance, existe-t-il un espace Z qui est en même temps une image continue et biunivoque de X et de Y? Ou bien — ce qui revient au même — peut-on changer l'ordre des fonctions φ_1 et φ_2 dans l'énoncé du théorème du § 3?

La réponse est *négative*. Soient X et Y deux espaces compacts de même puissance, mais non homéomorphes (p. ex. X = intervalle fermé, Y = somme de deux intervalles fermés disjoints). Or, une fonction continue biunivoque, définie sur un ensemble compact étant une homéomorphie, l'image commune continue et biunivoque de X et de Y devrait être homéomorphe simultanément à X et à Y, ce qui est impossible.

§ 5. Le théorème du § 1 peut être généralisé facilement à une suite dénombrable d'ensembles:

Théorème. *Pour chaque suite infinie d'espaces métriques $X_0, X_1, X_2, \ldots$ de même puissance, il existe un ensemble $Z \subset X_0 \times X_1 \times \times X_2 \times \ldots$ dont tout X_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ est une image biunivoque et continue.*

Il suffit, pour la démonstration, de considérer une suite de transformations biunivoques: $f_n(x)$ de X_0 en X_n $(n=1, 2, \ldots)$ et de désigner par Z l'ensemble des points $(x, f_1(x), f_2(x), \ldots)$ pour $x \in X_0$. Les fonctions $\varphi_n(p)=x_n$ définies pour chaque point $p=(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in Z$ transforment alors d'une façon continue et biunivoque l'ensemble Z en ensembles X_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Remarques. Dans le cas où les espaces $X_0, X_1, X_2, \ldots$ sont séparables, on peut remplacer l'ensemble $Z \subset X_0 \times X_1 \times X_2 \times \ldots$ par *un ensemble Z de nombres irrationnels* (cf. la Remarque du § 1). En particulier, *pour chaque classe dénombrable* $\mathbf{K}$ *d'ensembles linéaires de même puissance, il existe un ensemble linéaire Z dont chaque ensemble appartenant à* $\mathbf{K}$ *est une image biunivoque et continue.*

Or, nous ne savons pas *si le théorème analogue subsiste dans le cas* $\aleph_0 < \overline{\overline{\mathsf{K}}} \leqslant \mathfrak{c}$. En particulier, nous ne savons pas résoudre ce problème dans le cas spécial où $\mathsf{K} =$ classe des ensembles indénombrables analytiques [1]). Rappelons que le problème analogue pour la classe des ensembles indénombrables mesurables (B) est facile à résoudre: chaque ensemble indénombrable mesurable (B) est image continue et biunivoque de l'ensemble Z composé de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ et de tous les nombres entiers [2]).

---

[1]) Problème de M. Sierpiński, Fund. Math. 26 (1936), p. 334.

[2]) Voir W. Sierpiński, *Sur les images biunivoques et continues dans un sens*, Fund. Math. 26 (1936), p. 49.