définissant les types ordinaux pairs comme types de la forme $\lambda+2n$ où λ est un type d'ordre sans dernier élément et où n est un entier $\geqslant 0$ [1]).

3. Soit t^* le point de $\mathcal{C}$ tel que M_{t^*} s'obtienne de M_t en supprimant le dernier élément (s'il existe, sinon nous posons $t^*=t$). On voit facilement que t^* est une fonction de Baire de t.

$\mathfrak{Z}$ est défini par les conditions:

$$\mathfrak{Z}^0=A, \quad \mathfrak{Z}^{t,y}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{Z}^{t(n),y(n)} \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}-\mathfrak{Z}^{t^*,y}$$

suivant que $\bar{t}$ est pair ou impair.

L'opération $R_t(\mathfrak{B})$ correspondante est définie comme dans l'exemple 2 en remplaçant $\prod \mathfrak{B}^{t(n),y(n)}$ par $\bar{\mathcal{C}}-\mathfrak{B}^{t^*,y(n)}$. On montre qu'elle est borelienne et que — tout comme auparavant — $\mathfrak{Z}$ est de classe 3 ambigüe.

4. Soit [2])

$$\mathfrak{Z}^0=A, \quad \mathfrak{Z}^{t,y}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{Z}^{t^*,y(n)} \quad \text{pour } \bar{t} \text{ impair},$$

$$x \in \mathfrak{Z}^{t,y} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{y}_{(2n+1)}<\bar{t})\,(x \in \mathfrak{Z}^{y(2n+1),y(2n)}), \quad \text{pour } 0<\bar{t} \text{ pair } <\Omega.$$

Ici l'opération $R_t(\mathfrak{B})$ peut être définie comme suit:

$$\{(x,y) \in R_t(\mathfrak{B})\} \equiv \{(t=0)\,(x,y \in A) + (\bar{t} \text{ impair}) \prod_n (x \in \mathfrak{B}^{t^*,y(n)}) +$$
$$+ (\bar{t}>0 \text{ pair}) \sum_n (\bar{y}_{(2n+1)}+1 \leqslant \bar{t})\,(x \in \mathfrak{B}^{y(2n+1),y(2n)})\}.$$

L'opération R est analytique, car l'ensemble $\underset{xy}{E}(\bar{x}+1\leqslant\bar{y})$ est analytique [3]).

Remarque. La différence essentielle entre l'exemple 4 et les précédents est que l'ensemble $\mathfrak{Z}^t$ ne dépend que de $\bar{t}$ (et non de t). De sorte que, en posant $A_\alpha=\mathfrak{Z}^t$ où t est un nombre quelconque tel que $\bar{t}=\alpha$, on *définit* une suite transfinie d'ensembles précisément de classe α.

Ajoutons que pour l'ensemble $\mathfrak{Z}$ de l'ex. 2, les ensembles $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha, \ldots$ donnés par les conditions (5)—(6) sont aussi boreliens de classes $\geqslant\alpha$. On a évidemment

$$\mathfrak{A}_\alpha=\underset{txy}{E}(\bar{t}\leqslant\alpha)\,(t,x,y \in \mathfrak{Z}).$$

[1]) Ceci est un cas particulier des problèmes de la forme suivante: étant donné un ensemble A de nombres ordinaux $<\Omega$ (ou plus généralement, de types ordinaux dénombrables), quelle est la classe borelienne ou projective de l'ensemble des t tels que $\bar{t} \in A$? Je considère ce problème dans une note sur la géométrisation de la théorie des types d'ordre dénombrable, qui paraîtra bientôt.

[2]) Cf ma note des C. R. Paris t. 176 (1923), p. 229 et *Topologie* I p. 175.

[3]) Cf. renvoi [3]) p. 272 de la note présente.

Sur les classes d'ensembles closes par rapport aux opérations de Hausdorff.

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

La note présente constitue un supplément à mon ouvrage „*Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*" [1]). Je me propose d'étendre ici quelques résultats acquis dans cet ouvrage à certaines catégories d'opérations que je n'y ai pas étudiées. Je vais faire usage des notions et des symboles introduits dans mon ouvrage précité, ainsi que des théorèmes qui y ont été établis; en indiquant les définitions et les théorèmes de cet ouvrage, j'en vais munir les numéros du signe ⊙ (p. ex. „th. 44 ⊙").

M. F. Hausdorff considère dans son manuel connu de la Théorie des Ensembles [2]) une vaste catégorie d'opérations, qu'il appelle „*δs-Funktionen*" et qui, tout comme les opérations envisagées dans mon ouvrage cité, font correspondre des classes d'ensembles aux classes d'ensembles. Beaucoup de ces opérations jouent un rôle important dans la Théorie des Ensembles et ses applications. En généralisant cette notion, on parvient à celle d'*opérations de Hausdorff en degré β* (β parcourant tous les nombres ordinaux), dont la classe sera designée ici par $\mathfrak{H}_\beta$; les opérations que M. Hausdorff appelle „δs-Funktionen" constituent la classe $\mathfrak{H}_0$.

Il est commode de diviser la définition de la classe $\mathfrak{H}_\beta$ en deux parties. D'abord, je ferai correspondre à chaque classe Φ dont les éléments sont des suites de nombres ordinaux une opération $O_{(\Phi)}$ effectuée sur les classes d'ensembles K et qui sera déterminée de la manière suivante:

[1]) Fundam. Math. XVI, p. 181—304.

[2]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 89.

Définition 1. *$\boldsymbol{O}_{(\Phi)}(\boldsymbol{K})$ est la classe de tous les ensembles X de la forme*

$$X=\sum_{\varphi\epsilon\Phi}\prod_{\xi<\tau(\varphi)}X_{\varphi_\xi} \quad \text{où} \quad X_{\varphi_\xi}\epsilon\boldsymbol{K} \quad \text{pour} \quad \xi<\tau(\varphi) \text{ et } \varphi\epsilon\Phi,$$

$\tau(\varphi)$ étant le type de la suite φ de nombres ordinaux et Φ une classe arbitraire de telles suites φ.

Ceci fait, il est facile de définir la classe $\mathfrak{H}_\beta$ elle même:

Définition 2. *$\mathfrak{H}_\beta$ est la classe de toutes les opérations $\boldsymbol{F}$ de la forme*

$$\boldsymbol{F}\overset{\circ}{=}\boldsymbol{O}_{(\Phi)}$$

où Φ est une classe arbitraire non nulle de suites φ du type ω_β composées de nombres ordinaux $\varphi_\xi<\omega_\beta$.

On peut établir les proprietés suivantes des classes $\mathfrak{H}_\beta$:

Théorème 1. a) $\mathfrak{H}_\beta\subset\mathfrak{A}_{\beta+1}$, *donc* $\mathfrak{H}_\beta\subset\mathfrak{M}$;

b) *si* $\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$, *on a* $\boldsymbol{I}\overset{\circ}{\subset}\boldsymbol{F}$;

c) *si* $\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$, *on a* $\boldsymbol{F}^*\epsilon\mathfrak{H}_\beta$;

d) *si* $\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$ *et* $\boldsymbol{G}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$, *on a* $\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$;

e) *si* $\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$, *on a* $\boldsymbol{F}(0)=0$ *et* $\boldsymbol{F}(\{A\})=\{A\}$;

f) $\boldsymbol{I}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$ *et* $\boldsymbol{S}_{\beta+1}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$;

g) $\overset{\circ}{\sum\limits_{\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{H}_\beta}}\boldsymbol{F}\overset{\circ}{=}\boldsymbol{R}_{\beta+1}$;

h) *si* $\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$, *on a* $\overline{\overline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})}}\leqslant(\overline{\overline{\boldsymbol{K}}})^{\aleph_\beta}$.

Démonstration. a) En vertu des dét. 1, 2 et 5a°, on conclut facilement que, pour une opération arbitraire $\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$ et pour une classe arbitraire $\boldsymbol{K}$ d'ensembles, on a la formule:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})=\sum_{X\subset\boldsymbol{K}\text{ et }\overline{\overline{X}}\leqslant\aleph_\beta}\boldsymbol{F}(X)=\sum_{X\epsilon\boldsymbol{U}_{\beta+1}(\boldsymbol{K})}\boldsymbol{F}(X),$$

d'où résulte, conformément au lem. 15c°, $\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{A}_{\beta+1}$. Par conséquent $\mathfrak{H}_\beta\subset\mathfrak{A}_{\beta+1}$ et a fortiori, d'après le lem. 16a°, $\mathfrak{H}_\beta\subset\mathfrak{M}$, c. q. f. d.

b) Soit $\boldsymbol{F}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$; on en déduit, en vertu de la déf. 2, $\boldsymbol{F}\overset{\circ}{=}\boldsymbol{O}_{(\Phi)}$ où Φ est une classe arbitraire $\neq0$, composée de suites φ du type ω_β et dont les termes φ_ξ sont $<\omega_\beta$. Considérons une classe quelconque d'ensembles $\boldsymbol{K}$; posons pour un ensemble arbitraire X de cette classe $X_\xi=X$ où $\xi<\omega_\beta$. Nous aurons alors évidemment $X=\sum\limits_{\varphi\epsilon\Phi}\prod\limits_{\xi<\omega_\beta}X_{\varphi_\xi}$, d'où il résulte conformément à la déf. 1 que $X\epsilon\boldsymbol{O}_{(\Phi)}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})$. Nous avons donc $\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})$ pour chaque classe $\boldsymbol{K}$; à l'aide des déf. 8b° et 13°, on en déduit aussitôt la formule cherchée: $\boldsymbol{I}\overset{\circ}{\subset}\boldsymbol{F}$.

La démonstration des propositions c) et d) a été donnée par M. Sierpiński pour le cas $\beta=0$ [1]). Or, le raisonnement de M. Sierpiński peut être appliqué au cas général sans modifications essentielles.

Remarquons que, pour établir la proposition d), il faut avoir recours à une fonction (de deux variables) φ, qui remplisse les conditions suivantes: (1) à tout nombre ordinal ζ correspond un seul nombre ξ et un seul nombre η tels que $\varphi(\xi,\eta)=\zeta$; (2) pour que $\varphi(\xi,\eta)<\omega_\beta$, il faut et il suffit que $\xi<\omega_\beta$ et $\eta<\omega_\beta$. On obtient une telle fonction, en posant p. ex.: $\varphi(\xi,\eta)=2^\xi\cdot(2\eta+1)-1$, quand $\xi<\omega$ et $\eta<\omega$, et $\varphi(\xi,\eta)=2^\xi\cdot(2\eta+1)$ dans les autres cas.

e) résulte immédiatement des déf. 1 et 2.

f) Considérons une classe Φ_1 dont le seul élément soit une suite déterminée φ à termes constants $<\omega_\beta$ (p. ex. une suite φ telle que $\varphi_\xi=0$ pour $\xi<\omega_\beta$) et une classe Φ_2 composée de toutes les suites φ analogues (c. à d. des suites φ satisfaisant à la condition: $\varphi_\xi=\eta$ pour $\xi<\omega_\beta$ où η est un nombre arbitraire $<\omega_\beta$).

En vertu des déf. 13°, 20° et de la déf. 1, on montre facilement que $\boldsymbol{O}_{(\Phi_1)}\overset{\circ}{=}\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{O}_{(\Phi_2)}\overset{\circ}{=}\boldsymbol{S}_{\beta+1}$, d'où, conformément à la déf. 2, $\boldsymbol{I}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$ et $\boldsymbol{S}_{\beta+1}\epsilon\mathfrak{H}_\beta$, c. q. f. d.

g) En s'appuyant sur les déf. 5a° et 18° et sur le th. 44°, on déduit aisément (même sans faire intervenir l'axiome du choix) que, pour une classe arbitraire d'ensembles $\boldsymbol{K}$ et pour un ensemble arbitraire X, les deux conditions suivantes sont équivalentes: (1) il existe une classe Φ composée de suites du type ω_α à termes $<\omega_\beta$ et telle que $X=\sum\limits_{\varphi\epsilon\Phi}\prod\limits_{\xi<\omega_\beta}X_{\varphi_\xi}$ où $X_{\varphi_\xi}\epsilon\boldsymbol{K}$ pour $\xi<\omega_\beta$ et $\varphi\epsilon\Phi$;

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur les opérations de M. Hausdorff*, Fundam Math. XV, pp. 199—211, surtout p. 201 et 209.

(2) il existe une classe $L \in U_{\beta+1}(K)$ telle que $X \in SS^*(L)$. A l'aide des déf. 1, 2 et 21⊚, on en déduit l'équivalence des formules: $X \in \sum_{F \in \mathfrak{H}_\beta} F(K)$ et $X \in R_{\beta+1}(K)$; suivant les déf. 8^{a}⊚ et 9^{b}⊚ on obtient donc: $\left[\overset{\circ}{\sum_{F \in \mathfrak{H}_\beta}} F\right](K) = R_{\beta+1}(K)$ pour une classe arbitraire K et finalement $\overset{\circ}{\sum_{F \in \mathfrak{H}_\beta}} F \doteq R_{\beta+1}$, c. q. f. d.

h) Soit Ψ la classe de toutes les suites du type ω_β à termes G_ξ appartenant à une classe donnée K. D'après les déf. 1 et 2, on peut transformer la classe Ψ d'une façon univoque en une classe arbitraire de la forme $F(K)$ où $F \in \mathfrak{H}_\beta$; la classe $F(K)$ est donc l'image de la classe Ψ (donnée par une certaine fonction H), d'où on conclut à l'aide du lem. 11^{a}⊚ (donc, indirectement, à l'aide de l'axiome du choix) que $\overline{\overline{F(K)}} \leqslant \overline{\overline{\Psi}}$. D'autre part, suivant la définition de l'exponentiation des nombres cardinaux, on a $\overline{\overline{\Psi}} = (\overline{\overline{K}})^{\aleph_\beta}$. Ces deux formules donnent aussitôt l'inégalité cherchée $\overline{\overline{F(K)}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_\beta}$.

Outre les opérations I et $S_{\beta+1}$, figurant dans le th. 1^{f}, on peut citer d'autres opérations appartenant à la classe $\mathfrak{H}_\beta$: tels sont par exemple $S^*_{\beta+1}$, $S_{\beta+1} S^*_{\beta+1}$, $S_{\beta+1} S^*_{\beta+1}$ etc.; cela résulte immédiatement du th. $1^{c,d}$. A la classe $\mathfrak{H}_\beta$ appartiennent aussi les opérations $\underline{L}_\beta$ et $\overline{L}_\beta$, définies comme il suit:

$\underline{L}_\beta(K)$ (resp. $\overline{L}_\beta(K)$) est la classe de tous les ensembles X de la forme $X = \underline{\lim}_{\xi<\omega_\beta} X_\xi$ (resp. $X = \overline{\lim}_{\xi<\omega_\beta} X_\xi$) où $X_\xi \in K$ pour $\xi < \omega_\beta$.

Comme exemples d'opérations appartenant à la classe $\mathfrak{H}_0$ peuvent servir aussi: l'opération A de Souslin et son opération double A^* [1]).

Quant aux autres proprietés des classes $\mathfrak{H}_\beta$, on peut déduire facilement du th. 1^{g} l'inclusion: $\overset{\circ}{\sum_{F \in \mathfrak{H}_\beta}} F \overset{\circ}{\subset} S_{\alpha+1} S^*_{\beta+1}$ où $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_\beta}$. On a

[1]) Cf. p. ex. F. Hausdorff, op. cit., pp. 90—93.

ensuite $\overline{\overline{\mathfrak{H}}}_\beta \leqslant 2^{2^{\aleph_\beta}}$. Il serait intéressant de reconnaître si le théorème suivant, démontré par M. Sierpiński pour le cas $\beta=0$ [1]), se laisse étendre aux nombres ordinaux arbitraires:

Si $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}_\beta$ et $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} \leqslant 2^{\aleph_\beta}$, il existe une opération $F \in \mathfrak{H}_\beta$ telle que $\overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{G}}} G \overset{\circ}{\subset} F$.

Les problémes fondamentaux qui vont nous intéresser dans la suite sont du type suivant: la puissance de l'ensemble universel *1* étant connue, combien y a-t-il de classes composées de sous-ensembles de l'ensemble *1* et closes par rapport aux opérations de Hausdorff (ainsi que, dans certains cas, par rapport à d'autres opérations connues)?

Voici quelques résultats dans cet ordre d'idées:

Théorème 2. *Si $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ et $F \doteq \overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{G}}} G$ où $\mathfrak{G} \subset \sum_{\xi<p(\alpha)} \mathfrak{H}_\xi$ (donc en particulier, si $F \in \mathfrak{H}_\beta$ et $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$), on a $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que, selon le lem. 4^{c}⊚, la formule: $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ donne: $\beta < p(\alpha)$. Il en résulte que l'hypothèse: $F \in \mathfrak{H}_\beta$ et $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, formulée entre parenthèses, se réduit à la condition plus générale: $F \doteq \overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{G}}} G$ où $\mathfrak{G} \subset \sum_{\xi<p(\alpha)} \mathfrak{H}_\xi$, de sorte qu'on n'a pas à l'envisager séparément [2]).

Conformément aux th. 1^{g} et 56^{b}⊚, il résulte de l'hypothèse que $F \overset{\circ}{\subset} \overset{\circ}{\sum_{\xi<p(\alpha)}} R_{\xi+1} \overset{\circ}{\subset} R_{p(\alpha)}$, d'où, suivant le th. 21^{a}⊚, $\mathcal{Cl}(R_{p(\alpha)}) \subset \mathcal{Cl}(F)$. Comme, selon le th. 64⊚, $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(R_{p(\alpha)})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$, l'inclusion obtenue donne: $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} \geqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. D'autre part, l'inégalité inverse: $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ présente un cas particulier du th. 32⊚. On parvient donc finalement à la formule: $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$, c. q. f. d.

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur une propriété des opérations de M. Hausdorff*, Fundam. Math. XVI, pp. 1—6.

[2]) Cette remarque s'applique aussi aux théorèmes qui seront établis dans la suite.

En admettant l'hypothèse supplémentaire sur la puissance de la classe $\mathfrak{G}$, à savoir que $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} \leqslant \aleph_\alpha$, on peut préciser le théorème démontré exactement dans le même sens, dans lequel on a réussi à préciser le th. fondamental XI$^{b\circledcirc}$ par le th. 67$^{\circledcirc}$. Nous allons établir dans ce but trois lemmes qui suivent:

Lemme 3. *Si* $F \in \mathfrak{A}_\beta$ *où* $cf(\beta)=\beta$ *et si* K *est une classe d'ensembles de puissance* $\geqslant 2$ *assujettie à la condition:* $\overline{\overline{F(X)}} \leqslant (\overline{\overline{X}})^{\aleph_\beta}$ *pour toute classe* $X \in V(K)$, *il existe une classe* L *vérifiant les formules:*

$$L \in V(K)\cdot\mathcal{C}\ell(F), \quad V(K)\cdot\mathcal{C}\ell(F) \subset V(L) \quad \textit{et} \quad \overline{\overline{L}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_\beta}.$$

Démonstration ne diffère guère de celle du th. 31$^{\circledcirc}$ (dont le lemme qui vient d'être énoncé présente une forme plus précise).

Lemme 4. *Si* $\overline{\overline{K}}=\aleph_\alpha$ *et* $F \stackrel{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum\limits_{G\in\mathfrak{G}}} G$ *où* $\mathfrak{G} \subset \sum\limits_{\xi<p(\alpha)} \mathfrak{H}_\xi$ *et* $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} \leqslant \aleph_\alpha$ *(donc en particulier, si* $F \in \mathfrak{H}_\beta$ *et* $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$*), il existe une classe* L *vérifiant les formules:*

$$L \in V(K)\cdot\mathcal{C}\ell(F) \quad \textit{et} \quad \overline{\overline{L}}=\aleph_\alpha.$$

Démonstration est analogue à celle du lem. 65$^{\circledcirc}$. On établit d'abord les trois formules suivantes:

(1) $$F \in \mathfrak{A}_{p(\alpha)};$$

(2) $$cf(p(\alpha)) = p(\alpha);$$

(3) $$\overline{\overline{F(X)}} \leqslant (\overline{\overline{X}})^{\aleph_{p(\alpha)}} \quad \textit{pour toute classe} \quad X \in V(K).$$

La formule (1) résulte aussitôt du th. 1^{a} d'après le lem. 16$^{b,e\circledcirc}$; la formule (2) nous est connue d'après le lem. 4$^{b\circledcirc}$. Pour obtenir (3), remarquons que, suivant la déf. 9$^{b\circledcirc}$, $F(X) = \sum\limits_{G\in\mathfrak{G}} G(X)$, d'où $\overline{\overline{F(X)}} \leqslant \sum\limits_{G\in\mathfrak{G}} \overline{\overline{G(X)}}$; en vertu du th. 1^{h} et conformément à la déf. 4 et à l'inégalité: $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} \leqslant \aleph_\alpha$, contenue dans l'hypothèse, on en tire $\overline{\overline{F(X)}} \leqslant (\overline{\overline{X}})^{\aleph_{p(\alpha)}}\cdot\aleph_\alpha$. Comme $\overline{\overline{K}}=\aleph_\alpha$, on a conformément au lem. 5$^{h,c\circledcirc}$ $(\overline{\overline{X}})^{\aleph_{p(\alpha)}} \geqslant \aleph_\alpha^{\aleph_{p(\alpha)}} \geqslant \aleph_\alpha$ pour $X \in V(K)$, d'où $(\overline{\overline{X}})^{\aleph_{p(\alpha)}}\cdot\aleph_\alpha = (\overline{\overline{X}})^{\aleph_{p(\alpha)}}$; on parvient ainsi à l'inégalité (3).

Posons maintenant dans le lem. 3: $\beta = p(\alpha)$. En vertu des formules (1)—(3), l'hypothèse de ce lemme est remplie; or, d'après le lem. 6$^{a\circledcirc}$, on en déduit sans difficulté l'existence d'une classe L vérifiant les formules:

$$L \in V(K)\cdot\mathcal{C}\ell(F) \quad \text{et} \quad \overline{\overline{L}} = \aleph_\alpha, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Lemme 5. *Si* $F \stackrel{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum\limits_{G\in\mathfrak{G}}} G$ *où* $\mathfrak{G} \subset \sum\limits_{\xi<\beta} \mathfrak{H}_\xi$ *(donc en particulier, si* $F \in \mathfrak{H}_\gamma$ *et* $\gamma < \beta$*),* $K \in \mathcal{C}\ell(T \stackrel{\circ}{+} S_\beta)$, $L \in \mathcal{C}\ell(F)$ *et* $M = K + L + \underset{X+Y}{E}[X \in K \text{ et } Y \in L]$, *on a* $M \in \mathcal{C}\ell(F)$.

Démonstration est analogue à celle du lem. 66$^{\circledcirc}$. Au lieu de la classe $N \in U_\beta(M) - \{0\}$, on a à considérer une suite du type $\omega_\xi < \omega_\beta$ d'ensembles X_η tels que $X_\eta \in M$ pour $\eta < \omega_\xi$; on démontre que, pour toute classe Φ de suites φ du type ω_ξ composées de nombres ordinaux $\varphi_\eta < \omega_\xi$, on a $\sum\limits_{\varphi\in\Phi} \prod\limits_{\eta<\omega_\xi} X_{\varphi_\eta} \in M$. A l'aide des déf. 1 et 16$^{\circledcirc}$, on en conclut que $M \in \mathcal{C}\ell(O_{(\Phi)})$. D'après la déf. 2, on a donc: $M \in \mathcal{C}\ell(G)$ pour toute opération $G \in \mathfrak{H}_\xi$ où $\xi < \beta$; conformément à l'hypothèse du lemme, on en déduit suivant le th. 21$^{c\circledcirc}$ que $M \in \prod\limits_{G\in\mathfrak{G}} \mathcal{C}\ell(G) = \mathcal{C}\ell\Big(\overset{\circ}{\sum\limits_{G\in\mathfrak{G}}} G\Big)$, d'où il résulte finalement que $M \in \mathcal{C}\ell(F)$, c. q. f. d.

Les lem. 4 et 5 constituent respectivement des généralisations des lem. 65$^{\circledcirc}$ et 66$^{\circledcirc}$; de même, les remarques qui ont été faites pages 258 et 270—271 de mon ouvrage cité au début s'appliquent — mutatis mutandis — à ces lemmes. En particulier, l'analyse de la démonstration donnée pour le lem. 5 en fait ressortir le lemme suivant:

Soit $K \dot{+} L = K + L + \underset{X+Y}{E}[X \in K \text{ et } Y \in L]$ *pour des classes arbitraires d'ensembles* K *et* L. *Si on a alors* $F = \overset{\circ}{\sum\limits_{G\in\mathfrak{G}}} G$ *où* $\mathfrak{G} \subset \sum\limits_{\xi<\beta} \mathfrak{H}_\xi$ *(donc en particulier, si* $F \in \mathfrak{H}_\gamma$ *et* $\gamma < \beta$*), on a aussi*

$$F(K \dot{+} L) \subset TS_\beta(K) \dot{+} F(L).$$

Théorème 6. *Si* $\overline{\overline{1}}=\aleph_\alpha=\overline{\overline{\boldsymbol{K}}}$ *(où* $\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{U}(1)$*) et si* $\boldsymbol{F}\overset{\circ}{=}\overset{\circ}{\sum\limits_{G\in\mathfrak{G}}}G$ *où* $\mathfrak{G}\subset\sum\limits_{\xi<p(\alpha)}\mathfrak{H}_\xi$ *et* $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}\leqslant\aleph_\alpha$ *(donc en particulier, si* $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{H}_\beta$ *et* $\aleph_\alpha=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$*), on a* $\overline{\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration ne diffère de celle du th. 67° qu'en un seul point, à savoir en l'emploi des lem. 4 et 5 au lieu des lem. 65° et 66°.

En tenant compte de la puissance des classes $\mathfrak{H}_\xi$ (cf. la remarque p. 281), on montre aisément que l'inégalité: $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}\leqslant\aleph_\alpha$, figurant dans l'énoncé du lem. 4 et du th. 6, est toujours verifiée, si $\mathfrak{G}\subset\sum\limits_{\xi<\beta}\mathfrak{H}_\xi$ et $2^{2^{\aleph_\beta}}\leqslant\aleph_\alpha$.

Les th. 2 et 6 ont des applications intéressantes au cas où *1* est l'ensemble de tous les nombres réels et $\boldsymbol{K}$ la classe de tous les intervalles:

Corollaire 7. a) *Si 1 est l'ensemble de tous les nombres réels (ou, plus généralement, un ensemble arbitraire de puissance* $2^{\aleph_0}$*) et si* $\boldsymbol{F}\overset{\circ}{=}\overset{\circ}{\sum\limits_{G\in\mathfrak{G}}}G$ *où* $\mathfrak{G}\subset\mathfrak{H}_0$ *(donc en particulier, si* $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{H}_0$*), on a* $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}=2^{2^{\aleph_0}}$;

b) *si, de plus,* $\boldsymbol{K}$ *est la classe de tous les intervalles de nombres réels (ou, plus généralement, une classe arbitraire de puissance* $2^{\aleph_0}$ *contenue dans* $\boldsymbol{U}(1)$*) et* $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}\leqslant 2^{\aleph_0}$, *on a* $\overline{\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}=2^{2^{\aleph_0}}$

Pour la démonstration, il suffit de poser $\aleph_\alpha=2^{\aleph_0}$ dans les th. 2 et 6 et de remarquer que, selon le lem. 4c°, on a alors $0<p(\alpha)$.

Le th. 6 et le cor. 7b présentent respectivement des généralisations assez notables du th. 67° et du cor. 68b°. Envisageons le cas particulier du cor. 7b où la classe $\mathfrak{G}$ ne contient que deux opérations, c. à d. l'opération $\boldsymbol{A}$ de Souslin et son opération double $\boldsymbol{A}^*$. On sait bien que ces opérations sont d'une portée très considérable: les classes d'ensembles qui contiennent tous les intervalles et sont closes par rapport à ces deux opérations sont tellement vastes que même la plus petite d'elles, c. à d. la classe $\Pi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{Cl}(\boldsymbol{A}\overset{\circ}{+}\boldsymbol{A}^*))$,

n'a pas été encore suffisamment étudiée; néanmoins le cor. 7b montre que la famille de toutes ces classes est de la puissance la plus grande possible, à savoir $2^{2^{\aleph_0}}$.

Je renonce à envisager ici d'une façon plus détaillée les classes d'ensembles qui sont closes simultanément par rapport aux opérations de Hausdorff et à telles ou autres opérations envisagées dans mon ouvrage précité. On remarquera seulement que — l'hypothèse du th. 2 ou bien celle du cor. 7a étant remplies — outre la famille $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})$, toutes les familles de la forme $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{H}\overset{\circ}{+}\boldsymbol{F})$ où $\boldsymbol{H}$ est une quelconque des opérations: $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}^*$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{S}_\gamma$, $\boldsymbol{S}_\gamma^*$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}^*$ sont de la puissance $2^{2^{\aleph_\alpha}}$ où $2^{2^{\aleph_0}}$

Quant au th. 6, resp. au cor. 7b, l'état des choses est tout à fait différent. Il est impossible d'y remplacer $\boldsymbol{F}$ par $\boldsymbol{H}\overset{\circ}{+}\boldsymbol{F}$ où $\boldsymbol{H}$ soit une des opérations: $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}^*$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{S}_\gamma$ et $\boldsymbol{S}_\gamma^*$ (avec $\gamma>p(\alpha)$), car — les classes d'ensembles $\boldsymbol{K}$ et les classes d'opérations $\mathfrak{G}$ étant convenablement choisies — la famille $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{Cl}(\boldsymbol{H}\overset{\circ}{+}\boldsymbol{F})$ peut contenir moins que $2^{2^{\aleph_\alpha}}$, resp. que $2^{2^{\aleph_0}}$, éléments et même ne contenir qu'un seul élément. C'est aussi ce fait qui interdit de supprimer dans l'hypothèse l'inégalité: $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}\leqslant\aleph_\alpha$, resp. $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}\leqslant 2^{\aleph_0}$. Par contre, on ignore s'il est possible de remplacer dans les thèses du th. 6 et du cor. 7b — sans en modifier les hypothèses — la famille $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})$ par l'une des familles: $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{C}\overset{\circ}{+}\boldsymbol{F})$, $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{D}\overset{\circ}{+}\boldsymbol{F})$ et $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{D}^*\overset{\circ}{+}\boldsymbol{F})$. On ne sait nonplus, si le th. 6 (resp. le cor. 7b) s'étend à toutes les opérations $\boldsymbol{F}$ semi-additives au degré $\beta\leqslant p(\alpha)$ (resp. au degré 0), intrinsèques (c'est-à-dire remplissant la condition: $\boldsymbol{F}\overset{\circ}{\subset}\boldsymbol{TS}$) et telles que l'on ait $\overline{\overline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})}}\leqslant(\overline{\overline{\boldsymbol{X}}})^{\aleph_\beta}$ (resp. $\overline{\overline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})}}\leqslant(\overline{\overline{\boldsymbol{X}}})^{\aleph_0}$) pour une classe arbitraire d'ensembles $\boldsymbol{X}$. On s'apperçoit aisément que ce dernier problème comporterait une solution positive, si le lem. 5 (ou le lem. 66°) se laisserait transformer d'une manière à le rendre applicable à toute opération $\boldsymbol{F}$ de ce genre; cependant une telle transformation paraît difficile, étant donné que ce lemme est strictement lié aux propriétés spécifiques des opérations de Hausdorff.

Dans l'étude des classes closes par rapport aux opérations de Hausdorff, nous nous sommes bornés jusqu'ici au cas particulier où le degré de ces opérations était $<p(\alpha)$, $\aleph_\alpha$ désignant, comme d'ordinaire, la puissance de l'ensemble universel *1*. Nous allons

envisager maintenant le cas général. Outre certaines bornes, d'ailleurs de nature assez triviale, que nous allons établir pour la puissance des familles du type $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})$, nous n'obtiendrons qu'un résultat purement négatif: nous montrerons notamment que dans le cas général, et en particulier s'il s'agit des opérations du dégré $\geqslant p(\alpha)$, il n'est pas vrai que toutes les familles considérées ont la même puissance (résultat opposé à celui du th. 2).

Théorème 8. *Si* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$ *et* $\boldsymbol{F}\doteq\sum_{\boldsymbol{G}\in\mathfrak{G}}\boldsymbol{G}$ *où* $\mathfrak{G}\subset\sum_{0\leq\xi}\mathfrak{H}_\xi$ *(donc en particulier, si* $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{H}_\beta$*), on a* $2^{\aleph_\alpha}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. Conformément aux th. 1[g] et 55[d⊙], il résulte de l'hypothèse que

(1) $$\boldsymbol{F}\mathring{\subset}\mathring{\sum_{0\leq\xi}}\boldsymbol{R}_{\xi+1}\mathring{\subset}\mathring{\sum_{0\leq\xi}}\boldsymbol{S}^*\,\boldsymbol{S}_{\xi+1}.$$

D'autre part, on a les inclusions connues: $\boldsymbol{S}^*\mathring{\subset}\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{S}_{\xi+1}\mathring{\subset}\boldsymbol{S}$ (th. 51[b⊙], lem. 19[b,c⊙]). A l'aide du lem. 14[b⊙] et de la déf. 12[a⊙], on en conclut d'après le th. 36[a⊙] que

(2) $$\boldsymbol{S}^*\,\boldsymbol{S}_{\xi+1}\mathring{\subset}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}_{\xi+1}\mathring{\subset}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}\quad \textit{pour tout nombre ordinal } \xi.$$

A l'aide du lem. 13[⊙], on déduit aussitôt de (1) et (2) que $\boldsymbol{F}\mathring{\subset}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}$ et on en tire suivant le th. 49[⊙] la formule à démontrer.

Théorème 9. *Soit* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$*. On a alors:*

[a]) *pour chaque nombre* β*, il existe une opération* $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{H}_\beta$ *telle que* $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

[b]) *si* $\beta\geqslant cf(\alpha)$*, il existe une opération* $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{H}_\beta$ *telle que* $2^{\aleph_\alpha}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

[c]) *si* $\beta\geqslant\alpha$ *ou bien si l'hypothèse H* [1]) *est remplie et* $\beta\geqslant p(\alpha)$*, il existe une opération* $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{H}_\beta$ *telle que* $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}=2^{\aleph_\alpha}$.

[1]) Cf. mon ouvrage précité, p. 193.

Démonstration. [a]) consitue une conséquence immédiate du th. 1[f] et du th. 32[⊙] (ou VIII[⊙]).

[b]) et [c]). Posons:

(1) $$\boldsymbol{F}\doteq\boldsymbol{S}_{\beta+1}\,\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}.$$

On en conclut facilement à l'aide du th. 1[c, d, f] que

(2) $$\boldsymbol{F}\in\mathfrak{H}_\beta.$$

En posant dans le th. 24[d⊙]: $\boldsymbol{F}\doteq\boldsymbol{S}_{\beta=1}$ et $\boldsymbol{G}\doteq\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}$, on obtient conformément au th. 50[a, b⊙] et au lem. 19[j⊙]: $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_{\beta+1}\boldsymbol{S}^*_{\beta+1})=\mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_{\beta+1}\mathring{+}\boldsymbol{S}^*_{\beta+1})$, d'où en vertu de (1)

(3) $$\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})=\mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_{\beta+1}\mathring{+}\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}).$$

Si $\beta\geqslant cf(\alpha)$, on a $\beta+1>cf(\alpha)$ et par conséquent — selon le th. 69[⊙] — $2^{\aleph_\alpha}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_{\beta+1}\mathring{+}\boldsymbol{S}^*_{\beta+1})}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$; on en déduit conformément à (3) que

(4) $$\textit{si}\quad \beta\geqslant cf(\alpha),\quad \textit{on a}\quad 2^{\aleph_\alpha}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

D'une façon analogue, on conclut d'après le th. XII[d⊙] que

(5) $$\textit{si l'hypothèse H est remplie et } \beta\geqslant p(\alpha),\ \textit{on a}\ \overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}=2^{\aleph_\alpha}.$$

Si enfin $\beta\geqslant\alpha$, on a $\beta+1>\alpha$ et $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha<\aleph_{\beta+1}$, d'où, conformément au th. 51[d⊙], $\boldsymbol{S}_{\beta+1}\doteq\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}\doteq\boldsymbol{S}^*$. En vertu du th. VI[⊙], on obtient donc: $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_{\beta+1}\mathring{+}\boldsymbol{S}^*_{\beta+1})}}=2^{\aleph_\alpha}$; il en résulte d'après (3) que

(6) $$\textit{si}\quad \beta\geqslant\alpha,\quad \textit{on a}\quad \overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}=2^{\aleph_\alpha}.$$

En vertu de (2) et (4)—(6), l'opération $\boldsymbol{F}\doteq\boldsymbol{S}_{\beta+1}\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}$ satisfait donc aux conditions de [b]) et [c]). Le théorème est ainsi démontré entièrement.

En tenant compte du th. 9, on peut distinguer parmi les opérations $\boldsymbol{F}$ de la classe $\mathfrak{H}_\beta$ deux catégories d'opérations: celles de la première catégorie vérifient la formule $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$ où $\aleph_\alpha=\overline{\overline{I}}$, quel que soit le rapport entre les nombres α et β, tandis que pour celles de la seconde catégorie la famille $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{F})$ est dans certaines conditions de puissance $2^{2^{\aleph_\alpha}}$ (selon le th. 2) et dans des autres de puissance $2^{\aleph_\alpha}$. On pourrait donc regarder les opérations de la première catégorie — à un certain point de vue — comme „plus faibles" que celles de la seconde; aux opérations „plus faibles" de Hausdorff en dégré β appartiennent p. ex. les opérations $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{S}_{\beta+1}$, $\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}$, et aux „plus fortes" les opérations $\boldsymbol{S}_{\beta+1}$, $\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}$, $\boldsymbol{S}^*_{\beta+1}\boldsymbol{S}_{\beta+1}$, puis (comme il résulte de l'analyse de la démonstration du th. 69°) les opérations $\underline{\boldsymbol{L}}_\beta$ et $\overline{\boldsymbol{L}}_\beta$, mentionnées p. 280, ensuite — dans le cas de $\beta=0$ — les opérations $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^*$ de Souslin et beaucoup d'autres. Il serait intéressant de soumettre cette classification des opérations de Hausdorff à une étude plus approfondie, du moins pour $\beta=0$.

Sur les transformations continues biunivoques.

Par

W. Sierpiński et E. Szpilrajn (Warszawa).

§ 1. ***Théorème.*** *Pour chaque couple X, Y d'espaces métriques de même puissance il existe un ensemble $Z \subset X \times Y$ tel que les espaces X et Y sont des images biunivoques et continues de l'ensemble Z.*

Désignons par f une transformation biunivoque de l'espace X en espace Y et par Z l'image de la fonction f, c. à d. l'ensemble de tous les couples $(x, f(x))$, où $x \epsilon X$.

Or, les espaces X et Y sont des projections biunivoques de l'ensemble Z. En d'autres mots: $\varphi(p)=x$ et $\psi(p)=y$ désignant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point $p=(x, y)\epsilon Z$, les fonctions φ et ψ sont continues; en outre f étant une fonction biunivoque, elles transforment d'une façon biunivoque l'ensemble Z en X et Y, c. q. f. d.

Remarque. Dans le cas où les espaces X et Y sont *séparables*, on peut remplacer dans l'énoncé du théorème l'ensemble $Z \subset X \times Y$ par *un ensemble Z de nombres irrationnels*. Cela résulte immédiatement du fait que chaque espace métrique séparable (donc en particulier l'espace $X \times Y$) est image biunivoque et continue d'un ensemble de nombres irrationnels [1]).

§ 2. Soit *M un espace métrique indénombrable, séparable et complet.* L'espace M contenant un ensemble homéomorphe à celui des nombres irrationnels [2]), il résulte du § 1 que *pour chaque couple X, Y de sous-ensembles de M de même puissance, il existe un ensemble Z contenu dans M et tel que X et Y sont des images biunivoques et continues de Z.*

---

[1]) Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 226, corollaire.

[2]) Cf. p. ex. Kuratowski, l. c., p. 229, corollaire 2.