Andererseits, ist eine Funktion von beschränkter Variation $\bar{y}(t)$ gegeben, so stellt das Integral

$$F(\xi)=\int_a^b \xi(t)\cdot d\bar{y}(t)$$

ein lineares Funktional in C_X dar. Es ist

$$|F(\xi)|=\left|\int_a^b \xi(t)\cdot d\bar{y}(t)\right| \leqslant \|\xi\| \operatorname*{Var}_a^b \bar{y}(t) \qquad \text{und} \qquad \|F\| \leqslant \operatorname*{Var}_a^b \bar{y}(t).$$

Wird $\bar{y}(t)$ so gewählt (vgl. § 5 d), dass ihre Variation möglichst klein sei, so wird $\|F\|=\operatorname*{Var}_a^b \bar{y}(t)$.

Institut für Mathematik und Mechanik
der Leningrad Bubnow's Staatsuniversität.

Les ensembles projectifs et l'induction transfinie[1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Je me propose de démontrer dans cette note que l'application de l'induction transfinie dans le domaine des ensembles projectifs ne conduit pas — dans des hypothèses très générales — en dehors de ce domaine. En particulier, on en déduira que la „surface de M. Lebesgue", dont la nature était jusqu'à présent inconnue, est un ensemble projectif[2]).

Ce résultat, rapproché de ceux obtenus antérieurement avec M. Tarski[3]), met mieux en évidence — comme il me semble — le rôle fondamental de la notion d'ensemble projectif dans l'étude des ensembles (fonctions etc.) effectivement définissables.

1. Considérons d'abord, avec M. Lebesgue, *le type d'ordre d'un élément de l'ensemble non dense $\mathcal{C}$ de Cantor*[4]). Imaginons à ce but tous les nombres rationnels rangés en une suite bien déterminée

(1) $$r_1, r_2, r_3, \dots$$

et étant donné un élément t de l'ensemble de Cantor:

$$t=\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{9}+\frac{c_3}{27}+\dots \quad \text{où} \quad c_i=0 \text{ ou } 2,$$

---

[1]) Présenté à la Soc. Pol. de Math., Section de Varsovie, le 7. II. 1936.

[2]) Une esquisse de la démonstration se trouve dans ma note des C. R. Paris, t. 202, p. 1239. Le problème de la projectivité de la surface de M. Lebesgue a été posé par M. Lusin, qui s'en est occupé à plusieurs reprises (voir par ex. ses *Ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 298 ss.).

[3]) Fund. Math. 17 (1931), pp. 240—272. Cf. ma *Topologie* I (1933), § 34.

[4]) Journal de Math. 1905 (chap. VIII).

envisageons l'ensemble M_t composé des nombres r_i tels que $c_i=2$. L'ensemble M_t considéré comme ensemble ordonné (selon la grandeur des nombres rationnels), son type d'ordre est nommé le type d'ordre du nombre t; il sera désigné par $\bar{t}$.

D'après un théorème classique de Cantor, à chaque type d'ordre dénombrable τ correspond un ensemble de nombres rationnels ayant le type τ. Il existe par conséquent un nombre t (et, en général, une infinité indénombrable de tels nombres) tel que $\bar{t}=\tau$. En particulier, si $\tau=0$, on a $t=0$.

Surtout importants sont les nombres t tels que $\bar{t}$ est le type d'un ensemble *bien ordonné* (en symboles $\bar{t}<\Omega$). Pour ce genre de nombres on peut se servir des définitions par induction transfinie: on fait correspondre à chaque t tel que $\bar{t}<\Omega$ un ensemble F_t (ou un point, une fonction etc.) en admettant que, pour $\bar{t}=0$, F_t coïncide avec un ensemble donné et que, pour $\bar{t}>0$, F_t s'obtient des ensembles F_u avec $\bar{u}<\bar{t}$ à l'aide d'une opération bien déterminée. Telle est, en particulier, la définition (due à M. Lebesgue) d'un ensemble „universel" [1]) pour les ensembles boreliens: pour $\bar{t}<\Omega$, F_t est un ensemble (plan) universel pour les ensembles boreliens de classe $\bar{t}$, défini par l'induction transfinie.

Le problème dont nous allons nous occuper est de reconnaître la nature de l'ensemble $\underset{xt}{E}\, x\in F_t$. Dans le cas particulier cité tout-à-l'heure, c'est un ensemble — comme nous allons voir — projectif (à 3 dimensions).

2. Nous introduirons d'abord quelques notations auxiliaires. $\mathcal{X}$ désignera l'espace donné (composé d'éléments tout-à-fait arbitraires), $\mathcal{C}\times\mathcal{X}$ le produit cartésien de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor et de l'espace $\mathcal{X}$, c. à d. l'ensemble des couples (t, x) avec $t\in\mathcal{C}$ et $x\in\mathcal{X}$. Les sous-ensembles de l'ensemble „plan" $\mathcal{C}\times\mathcal{X}$ seront désignés par des majuscules gothiques. Pour $\mathfrak{Z}\subset\mathcal{C}\times\mathcal{X}$, posons

$$\mathfrak{Z}^t=\underset{x}{E}\,(t,x)\in\mathfrak{Z}.$$

C'est bien l'intersection de $\mathfrak{Z}$ avec la parallèle à l'axe $\mathcal{X}$ à abscisse t.

[1]) Un ensemble plan est dit universel par rapport à une famille d'ensembles linéaires, si parmi ses sections verticales se présentent tous les ensembles de cette famille.

Théorème 1. *Soit $R_t(\mathfrak{B})$ une opération qui fait correspondre à chaque $t\in\mathcal{C}$ et à chaque $\mathfrak{B}\subset\mathcal{C}\times\mathcal{X}$ un ensemble $R_t(\mathfrak{B})\subset\mathcal{X}$ qui ne dépend que des points de $\mathfrak{B}$ à abscisse de type $<\bar{t}$; c. à d. qu'on a*

$$R_t(\mathfrak{B})=R_t[\mathfrak{B}\cdot\underset{ux}{E}(\bar{u}<\bar{t})]. \tag{2}$$

Il existe alors un et un seul ensemble $\mathfrak{Z}\subset\mathcal{C}\times\mathcal{X}$ tel que

$$\mathfrak{Z}^t=R_t(\mathfrak{Z}) \quad \textit{pour} \quad \bar{t}<\Omega \tag{3}$$

$$\mathfrak{Z}^t=0 \quad \textit{pour les autres } t. \tag{4}$$

Démonstration. Considérons la suite transfinie des ensembles $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_\alpha, \dots$ $(\alpha<\Omega)$ définie par induction comme suit:

$$\mathfrak{A}_0=\underset{tx}{E}(\bar{t}=0)\,[x\in R_0(0)] \tag{5}$$

$$\mathfrak{A}_\alpha=\sum_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta+\underset{tx}{E}(\bar{t}=\alpha)\,[x\in R_t(\sum_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta)]. \tag{6}$$

On constate facilement par induction que

$$\mathfrak{A}_{\bar{t}}^t=R_t(\sum_{\beta<\bar{t}}\mathfrak{A}_\beta)=R_t(\mathfrak{A}_{\bar{t}}),$$

cette dernière égalité étant une conséquence de (2), et que

$$\mathfrak{A}_\alpha^t=\mathfrak{A}_{\bar{t}}^t=R_t(\mathfrak{A}_\alpha) \quad \text{pour} \quad \bar{t}\leqslant\alpha \tag{7}$$

$$\mathfrak{A}_\alpha^t=0 \quad \text{pour les autres } t. \tag{8}$$

Posons $\mathfrak{Z}=\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1+\dots+\mathfrak{A}_\alpha+\dots$ Il s'agit de prouver la formule (3). Or cette formule résulte des identités

$$\mathfrak{Z}^t=\mathfrak{A}_{\bar{t}}^t=R_t(\sum_{\beta<\bar{t}}\mathfrak{A}_\beta)$$

et

$$R_t(\mathfrak{Z})=R_t[\mathfrak{Z}\cdot\underset{ux}{E}(\bar{u}<\bar{t})]=R_t(\sum_{\beta<\bar{t}}\mathfrak{A}_\beta).$$

3. Le théorème 1 nous apprend que les formules (3) et (4) présentent une définition implicite de l'ensemble $\mathfrak{Z}$. Nous avons prouvé, d'autre part, que $\mathfrak{Z}=\sum_{\alpha<\Omega}\mathfrak{A}_\alpha$ où $\mathfrak{A}_\alpha$ est défini par les conditions (5) et (6). Or d'après (7) et (8) $\mathfrak{A}_\alpha$ peut être défini aussi comme l'ensemble qui substitué à $\mathfrak{Z}$ remplit les conditions (3) et (4) en remplaçant l'inégalité $\bar{t}<\Omega$ par $\bar{t}\leqslant\alpha$. Cela conduit à la définition **explicite** suivante de $\mathfrak{Z}$: l'ensemble $\mathfrak{Z}$ se compose des points v, x tels que $\bar{v}<\Omega$ et qu'il existe un ensemble plan $\mathfrak{B}$ satisfaisant aux conditions:

1^0 pour $\bar{t}\leqslant\bar{v}$, on a $\mathfrak{B}^t=R_t(\mathfrak{B})$

2 $(v, x)\epsilon\mathfrak{B}$.

De plus, on peut restreindre la variabilité de $\mathfrak{B}$ à la famille des ensembles $\mathfrak{A}_\alpha$ (ou bien à une famille plus vaste). Or, soit Γ un ensemble (à 3 dimensions) universel par rapport à la famille des ensemble $\mathfrak{A}_\alpha$: cela veut dire que, Γ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{X}$ et à chaque α correspond un $z\epsilon\mathcal{C}$ tel que $\mathfrak{A}_\alpha=\Gamma^z$. La définition de $\mathfrak{Z}$ s'énonce par conséquent comme suit: $\mathfrak{Z}$ est l'ensemble des points v, x tels que $\bar{v}<\Omega$ et qu'il existe un $z\epsilon\mathcal{C}$ tel que:

1^0 pour $\bar{t}\leqslant\bar{v}$, on a $\Gamma^{z,t}=R_t(\Gamma^z)$

2^0 $(z, v, x)\epsilon\Gamma$.

En symboles logiques[1]):

$$\{(v, x)\epsilon\mathfrak{Z}\}\equiv(\bar{v}<\Omega)\cdot\sum_z\prod_t[(\bar{t}\leqslant\bar{v})\rightarrow(\Gamma^{z,t}=R_t(\Gamma^z))][(z, v, x)\epsilon\Gamma].$$

En nous appuyant sur cette équivalence, nous allons résoudre dans le N⁰ suivant le problème de la projectivité de l'ensemble $\mathfrak{Z}$.

Remarque. $\mathfrak{A}_\alpha$ étant défini d'une façon **univoque** par les formules (7) et (8), la condition pour que v, x appartienne à $\mathfrak{Z}$ (où $\bar{v}<\Omega$) peut être énoncée aussi de cette façon: quel que soit l'ensemble plan $\mathfrak{B}$ satisfaisant à la condition 1^0, la condition 2^0 se trouve remplie. Cela conduit à l'équivalence suivante:

$$\{(v, x)\epsilon\mathfrak{Z}\}\equiv(\bar{v}<\Omega)\cdot\prod_z\{[\prod_t(\bar{t}\leqslant\bar{v})\rightarrow(\Gamma^{z,t}=R_t(\Gamma^z))]\rightarrow[(z, v, x)\epsilon\Gamma]\}.$$

4. L'ensemble $\underset{v}{E}(\bar{v}<\Omega)$ étant le complémentaire d'un ensemble analytique[2]) et l'ensemble $\underset{tv}{E}(\bar{t}\leqslant\bar{v})$ étant analytique[3]),

[1]) Cf. *Topologie* I, § 1.

[2]) voir p. ex. *Topologie* I, p. 257.

[3]) Ibid. p. 258 (théor. de M. Lusin).

le problème de la projectivité de l'ensemble $\mathfrak{Z}$ se réduit à celui de l'ensemble $\underset{zt}{E}[\Gamma^{z,t}=R_t(\Gamma^z)]$. Celui-ci se réduit à son tour à la projectivité des ensembles Γ et $\underset{ztx}{E}[x\epsilon R_t(\Gamma^z)]$, en vertu de l'équivalence évidente

$$(9)\qquad \{A=B\}\equiv\prod_x[(x\epsilon A)(x\epsilon B)+(x\, non\, \epsilon A)(x\, non\, \epsilon B)].$$

Or, appelons l'opération R *projective de classe* P_n (resp. C_n) lorsque, quel que soit l'ensemble $\Delta\subset\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{X}$ de classe P_n (resp. C_n)[1]), l'ensemble $\underset{ztx}{E}[x\epsilon R_t(\Delta^z)]$ appartient à cette classe[2]).

Théorème 2. *L'opération R du théor. 1 étant projective de classe $n\geqslant1$, l'ensemble $\mathfrak{Z}$ est de classe projective ambigüe $n+2$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\mathfrak{B}$ étant supposé de classe P_n (ou C_n), il en est de même de l'ensemble $\underset{tx}{E}[x\epsilon R_t(\mathfrak{B})]$. En effet, définissons Δ par les formules: $\Delta^0=\mathfrak{B}$, $\Delta^z=0$ pour $z\neq0$. L'ensemble Δ étant de classe P_n (ou C_n), il en est de même de l'ensemble $\underset{ztx}{E}[x\epsilon R_t(\Delta^z)]$, donc de $\underset{tx}{E}[x\epsilon R_t(\Delta^0)]=\underset{tx}{E}[x\epsilon R_t(\mathfrak{B})]$.

Ceci établi, nous allons démontrer que les ensembles $\mathfrak{A}_\alpha$ définis par les formules (5) et (6) sont de classe P_n (ou C_n).

En raisonnant par induction, on n'a qu'à prouver que l'ensemble $\underset{tx}{E}(\bar{t}=\alpha)[x\epsilon R_t(\sum_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta)]$ est de classe P_n (ou C_n). Or cela résulte du fait que cet ensemble est la partie commune de deux ensembles: 1^0 de l'ensemble $\underset{tx}{E}[x\epsilon R_t(\sum_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta)]$, qui est de classe P_n

[1]) Nous appelons les ensembles boreliens ensembles projectifs de classe 0 (ou ensembles P_0 et C_0). La n-ième classe projective se compose des ensembles P_n et C_n: les ensembles P_n sont les projections des ensembles C_{n-1} et les C_n sont les complémentaires des P_n.

[2]) D'une façon générale, étant donnée une fonction propositionnelle de plusieurs variables $\varphi(x, y, ..., X, Y, ...)$ où $x, y, ...$ sont des points et $X, Y, ...$ sont des sous-ensembles des espaces considérés, elle est dite de classe K (borelienne ou projective), lorsque, quels que soient les ensembles „plans" (c. à d. contenus dans le produit de $\mathcal{C}$ par l'espace considéré) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, ...$ de classe K, l'ensemble $\underset{zt...xy...}{E}\varphi(x, y, ..., \mathfrak{A}^z, \mathfrak{B}^t, ...)$ est de classe K.

(ou C_n), puisque $\sum_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta$ est de telle classe, et 2° du produit cartésien $\underset{t}{E}(\bar{t}=\alpha)\times\mathcal{N}$, qui est un ensemble borelien, puisque l'ensemble $\underset{t}{E}(\bar{t}=\alpha)$ en est un [1]).

Les ensembles $\mathfrak{A}_\alpha$ étant de classe P_n (resp. C_n), il existe un ensemble universel Γ par rapport à leur famille également de classe P_n (resp. C_n) [2]). Par conséquent l'ensemble $\underset{ztx}{E}[x\in R_t(\Gamma^z)]$ est encore de classe P_n (resp. C_n). Il en résulte en vertu de (9) que l'ensemble $\underset{zt}{E}[\Gamma^{z,t}=R_t(\Gamma^z)]$ est de classe C_{n+1} et il en est encore de même des ensembles

$$\underset{ztvx}{E}\,[(\bar{t}\leqslant\bar{v})\rightarrow(\Gamma^{z,t}=R_t(\Gamma^z))]\;[z,v,x)\in\Gamma]$$

et

$$\underset{zvx}{E}\prod_t[(\bar{t}\leqslant\bar{v})\rightarrow(\Gamma^{z,t}=R_t(\Gamma^z))]\;[(z,v,x)\in\Gamma].$$

La projection de ce dernier ensemble, ainsi que l'ensemble $\mathfrak{Z}$, est donc de classe P_{n+2}. D'une façon analogue, en appliquant la formule énoncée dans la *remarque* du N° 3, on prouve que $\mathfrak{Z}$ est de classe C_{n+2}.

5. *Exemples.* 1. Soit A un ensemble borelien plan $(\subset\mathcal{C}\times\mathcal{N})$ universel par rapport à la famille des ensembles fermés et des ensembles ouverts (linéaires). Soit $t^{(n)}$ l'élément de l'ensemble $\mathcal{C}$ défini comme suit (pour les notations voir N° 1): s'il existe dans M_t un $r_k\geqslant r_n$, l'ensemble $M_{t^{(n)}}$ se compose des r_i tels que $r_i<r_n$ et $r_i\in M_t$; dans le cas contraire $t^{(n)}=0$. Pour $t=\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{9}+\ldots$, posons

$$t_{(n)}=\frac{c_{1\cdot2^n}}{3}+\frac{c_{3\cdot2^n}}{9}+\frac{c_{5\cdot2^n}}{27}+\ldots$$

Nous avons considéré la forme suivante de la définition de l'ensemble $\mathfrak{Z}$ de M. Lebesgue [3]) (dans l'espace $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{N}$):

$$\mathfrak{Z}^0=A,\qquad \mathfrak{Z}^{t,y}=\operatorname{Lim\,sup}\mathfrak{Z}^{t^{(n)},y_{(n)}}\qquad\text{pour}\quad 0<\bar{t}<\Omega\qquad\text{et}\qquad y\in\mathcal{C}$$

et $\mathfrak{Z}^t=0$ pour les autres t.

[1]) Cf. par ex. *Topologie* I, p. 170.

[2]) Ibid. p. 241.

[3]) dans la note citée des C. R. Comme l'a remarqué M. J. v. Neumann, l'évaluation de la classe de l'ensemble $\mathfrak{Z}$, effectuée dans cette note, pourrait être abaissée: M. v. Neumann prouve que $\mathfrak{Z}$ est de classe 2 (au lieu de 3), plus précisément que $\mathfrak{Z}$ est une différence de deux ensembles analytiques.

Il serait intéressant de reconnaître si une méthode analogue à la méthode de M. v. Neumann serait applicable à l'ensemble $\mathfrak{Z}$ tel qu'il sera défini dans l'exemple 3. Voir une note de M. v. Neumann et moi qui paraîtra dans les Annals of Math.

Dans ce cas la fonction $R_t(\mathfrak{B})$ est définie comme suit: $\mathfrak{B}$ étant un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{N}$, $R_t(\mathfrak{B})$ est l'ensemble plan $(\subset\mathcal{C}\times\mathcal{N})$ défini par la condition

$$[R_t(\mathfrak{B})]^y=\operatorname*{Lim\,sup}_{n=\infty}\mathfrak{B}^{t^{(n)},y_{(n)}}\qquad\text{pour}\quad t\neq0\quad\text{et}\quad R_0(\mathfrak{B})=A.$$

Evidemment l'opération $R_t(\mathfrak{B})=\underset{xy}{E}[x\in\operatorname*{Lim\,sup}_{n=\infty}\mathfrak{B}^{t^{(n)},y_{(n)}}]$, satisfait à l'égalité (2). Par conséquent, pour démontrer que l'ensemble $\mathfrak{Z}$ est projectif, il suffit de prouver que cette opération est projective. Or, on voit facilement qu'elle est projective de classe 0 (borelienne).

On a, en effet, Δ étant un sous-ensemble de $\mathcal{C}^3\times\mathcal{N}$ et $t\neq0$,

$$\{(x,y)\in R_t(\Delta^z)\}\equiv x\in\operatorname{Lim\,sup}\Delta^{z,t^{(n)},y_{(n)}}\equiv\prod_n\sum_k x\in\Delta^{z,t^{(n+k)},y_{(n+k)}}\equiv$$
$$\equiv\prod_n\sum_k(x,z,t^{(n+k)},y_{(n+k)})\in\Delta.$$

La fonction $y_{(n)}$ étant continue, $t^{(n)}$ étant une fonction de Baire et Δ étant supposé borelien, l'ensemble $\underset{xzty}{E}[(x,y)\in R_t(\Delta^z)]$ est un ensemble de Borel.

2. Définissons à présent la fonction $R_t(\mathfrak{B})$ de la façon suivante (en conservant le sens des autres notations de l'exemple précédent et en posant $\mathcal{N}=\mathcal{C}$): $R_0(\mathfrak{B})=A=$ ensemble universel par rapport aux ensembles ouverts,

$$[R_t(\mathfrak{B})]^y=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}^{t^{(n)},y_{(n)}}\quad\text{ou}\quad\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}^{t^{(n)},y_{(n)}}$$

suivant que $\bar{t}$ est pair ou impair.

L'ensemble $\mathfrak{Z}$, dont la définition se déduit de celle de la fonction $R_t(\mathfrak{B})$, est un ensemble à 3 dimensions tel que, pour chaque $\bar{t}<\Omega$, $\mathfrak{Z}^t$ est un ensemble borelien de classe $G_{\bar{t}}$ universel par rapport à la famille des ensembles linéaires de classe $G_{\bar{t}}$ [1]). Sa projectivité résulte de celle de l'opération R, qui est — comme dans l'exemple précédent — borelienne. La démonstration en est tout-à-fait analogue: la seule prémisse supplémentaire est que l'ensemble des t tels que $\bar{t}$ soit pair est borelien. Or ceci se démontre facilement en

[1]) C. à d. des ensembles ouverts, ou G_δ, $G_{\delta\sigma}$ etc. Cf. *Topologie* I, p. 173.

définissant les types ordinaux pairs comme types de la forme $\lambda+2n$ où λ est un type d'ordre sans dernier élément et où n est un entier $\geqslant 0$ [1]).

3. Soit t^* le point de $\mathcal{C}$ tel que M_{t^*} s'obtienne de M_t en supprimant le dernier élément (s'il existe, sinon nous posons $t^*=t$). On voit facilement que t^* est une fonction de Baire de t.

$\mathfrak{Z}$ est défini par les conditions:

$$\mathfrak{Z}^0=A, \quad \mathfrak{Z}^{t,y}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{Z}^{t(n),y(n)} \quad \text{ou} \quad \mathcal{X}-\mathfrak{Z}^{t^*,y}$$

suivant que $\bar{t}$ est pair ou impair.

L'opération $R_t(\mathfrak{B})$ correspondante est définie comme dans l'exemple 2 en remplaçant $\prod \mathfrak{B}^{t(n),y(n)}$ par $\mathcal{X}-\mathfrak{B}^{t^*,y(n)}$. On montre qu'elle est borelienne et que — tout comme auparavant — $\mathfrak{Z}$ est de classe 3 ambigüe.

4. Soit [2])

$$\mathfrak{Z}^0=A, \quad \mathfrak{Z}^{t,y}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{Z}^{t^*,y(n)} \quad \text{pour } \bar{t} \text{ impair},$$

$$x\,\epsilon\,\mathfrak{Z}^{t,y}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{y}_{(2n+1)}<\bar{t})\,(x\,\epsilon\,\mathfrak{Z}^{y(2n+1),y(2n)}), \quad \text{pour } 0<\bar{t} \text{ pair } <\Omega.$$

Ici l'opération $R_t(\mathfrak{B})$ peut être définie comme suit:

$$\{(x,y)\,\epsilon\,R_t(\mathfrak{B})\}\equiv\{(t=0)\,(x,y\,\epsilon\,A)+(\bar{t}\text{ impair})\prod_n(x\,\epsilon\,\mathfrak{B}^{t^*,y(n)})+$$
$$+(\bar{t}>0\text{ pair})\sum_n(\bar{y}_{(2n+1)}+1\leqslant\bar{t})\,(x\,\epsilon\,\mathfrak{B}^{y(2n+1),y(2n)})\}.$$

L'opération R est analytique, car l'ensemble $\underset{xy}{E}(\bar{x}+1\leqslant\bar{y})$ est analytique [3]).

Remarque. La différence essentielle entre l'exemple 4 et les précédents est que l'ensemble $\mathfrak{Z}^t$ ne dépend que de $\bar{t}$ (et non de t). De sorte que, en posant $A_\alpha=\mathfrak{Z}^t$ où t est un nombre quelconque tel que $\bar{t}=\alpha$, on *définit* une suite transfinie d'ensembles précisément de classe α.

Ajoutons que pour l'ensemble $\mathfrak{Z}$ de l'ex. 2, les ensembles $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha, \ldots$ donnés par les conditions (5)—(6) sont aussi boreliens de classes $\geqslant\alpha$. On a évidemment

$$\mathfrak{A}_\alpha=\underset{txy}{E}(\bar{t}\leqslant\alpha)\,(t,x,y\,\epsilon\,\mathfrak{Z}).$$

---

[1]) Ceci est un cas particulier des problèmes de la forme suivante: étant donné un ensemble A de nombres ordinaux $<\Omega$ (ou plus généralement, de types ordinaux dénombrables), quelle est la classe borelienne ou projective de l'ensemble des t tels que $\bar{t}\,\epsilon\,A$? Je considère ce problème dans une note sur la géométrisation de la théorie des types d'ordre dénombrable, qui paraîtra bientôt.

[2]) Cf ma note des C. R. Paris t. 176 (1923), p. 229 et *Topologie* I p. 175.

[3]) Cf. renvoi [3]) p. 272 de la note présente.

Sur les classes d'ensembles closes par rapport aux opérations de Hausdorff.

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

La note présente constitue un supplément à mon ouvrage „*Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*" [1]). Je me propose d'étendre ici quelques résultats acquis dans cet ouvrage à certaines catégories d'opérations que je n'y ai pas étudiées. Je vais faire usage des notions et des symboles introduits dans mon ouvrage précité, ainsi que des théorèmes qui y ont été établis; en indiquant les définitions et les théorèmes de cet ouvrage, j'en vais munir les numéros du signe ° (p. ex. „th. 44 °").

M. F. Hausdorff considère dans son manuel connu de la Théorie des Ensembles [2]) une vaste catégorie d'opérations, qu'il appelle „*δs-Funktionen*" et qui, tout comme les opérations envisagées dans mon ouvrage cité, font correspondre des classes d'ensembles aux classes d'ensembles. Beaucoup de ces opérations jouent un rôle important dans la Théorie des Ensembles et ses applications. En généralisant cette notion, on parvient à celle d'*opérations de Hausdorff en degré* β (β parcourant tous les nombres ordinaux), dont la classe sera designée ici par $\mathfrak{H}_\beta$; les opérations que M. Hausdorff appelle „δs-Funktionen" constituent la classe $\mathfrak{H}_0$.

Il est commode de diviser la définition de la classe $\mathfrak{H}_\beta$ en deux parties. D'abord, je ferai correspondre à chaque classe Φ dont les éléments sont des suites de nombres ordinaux une opération $O_{(\Phi)}$ effectuée sur les classes d'ensembles K et qui sera déterminée de la manière suivante:

---

[1]) Fundam. Math. XVI, p. 181—304.

[2]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 89.