Sur la puissance de la totalité des fonctions d'ensemble additives et continues.

Par

Irène Egoroff (Leningrad).

M. Sierpiński[1]) a posé le problème suivant: *Quelle est la puissance de la classe de toutes les fonctions d'ensemble additives et continues?* MM. G. Fichtenholz et L. Kantorovitch[2]) ont démontré le théorème:

La puissance de la totalité de toutes les fonctionnelles linéaires $f(x)=\int_E x(t)\,\Phi(dE)$, *où* $\Phi(e)$ *est une fonction d'ensemble additive et bornée, est* $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$.

La démonstration de ce théorème s'appuyait essentiellement sur la notion de *noyau indépendant*, définie comme il suit: un noyau indépendant est une famille $\mathcal{E}=\{e\}$ de sous-ensembles mesurables e de l'intervalle (0,1), telle que quels que soient les $p+q$ ensembles $e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}$ de la famille $\mathcal{E}$, l'ensemble-produit $e_1\cdot e_2\cdot\ldots\cdot e_p\cdot Ce_{p+1}\cdot\ldots\cdot Ce_{p+1}$ est non vide.

Comme l'ont montré MM. Fichtenholz et Kantorovitch[3]), il *existe un noyau indépendant contenant* $2^{2^{\aleph_0}}$ *ensembles.*

En se basant sur ces résultats, on peut démontrer que la puissance de la totalité des fonctions d'ensemble additives et continues est $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$.

[1]) W. Sierpiński, *Sur les fonctions d'ensemble additives et continues*, Fundam. Math. **3** (1922), pp. 240—246, en particulier p. 240, problème 3).

[2]) G. Fichtenholz et L. Kantorovitch, *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Mathematica **5** (1934), pp. 69—98.

[3]) l. c., p. 80, lemme II.

Définition. *Un noyau indépendant* (*) *est une famille d'ensembles mesurables* $e\subset(a,b)$ *telle que, quels que soient les* $p+q$ *ensembles* $e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}$, *l'ensemble-produit* $e_1\cdot e_2\cdot\ldots\cdot e_p\cdot Ce_{p+1}\cdot\ldots\cdot Ce_{p+q}$ *est partout dense dans l'intervalle* (a, b).

Lemme I. *Il existe un noyau indépendant* (*) $\mathcal{E}^*=\{e_u^*\}$ *composé de* $2^{2^{\aleph_0}}$ *ensembles.*

Démonstration. Soit E un ensemble formé d'une suite dénombrable d'ensembles parfaits de Cantor

(1) $$E=C+\sum_{i_1} C^{i_1}+\sum_{i_1,i_2} C^{i_1 i_2}+\ldots$$

où C désigne l'ensemble de Cantor dans (a, b) et $i_1, i_2, \dots$ prennent toutes les valeurs naturelles, chaque indice i_k ajouté comportant de nouveaux ensembles de Cantor dans tous les intervalles contigus à chaque ensemble précédent. Pour que ces ensembles soient disjoints deux à deux, on retranchera de chacun d'eux ses deux points extrêmes.

Construisons sur chaque ensemble $C^{i_1\ldots i_k}$ un noyau indépendant $\{e_u^{i_1\ldots i_k}\}$ et formons pour E le noyau indépendant $\{e_u^*\}$, en posant $e_u^*=\sum_{i_1,\ldots,i_k} e_u^{i_1\ldots i_k}$. Alors $\mathcal{E}^*=\{e_u^*\}$ est un noyau indépendant (*).

En effet, quels que soient deux points ξ_1, ξ_2 de (a, b), un certain ensemble de Cantor sera contenu, à partir d'un indice suffisamment grand dans (1), dans l'intervalle (ξ_1, ξ_2). Donc, pour tout système $e_1, e_2, \dots, e_{p+q}$ formé d'ensembles de la famille $\mathcal{E}^*$, l'ensemble-produit $e_1\cdot e_2\cdot\ldots\cdot Ce_{p+1}\cdot\ldots\cdot Ce_{p+q}$ admettera des points communs avec (ξ_1, ξ_2), c. q. f. d.

A plus forte raison, chacun des ensembles e_u^* est dense dans l'intervalle (a, b).

Evidemment, lorsque

(2) $$|f(x)|\leqslant K\overline{\int_a^b}|x(t)|\,dt$$

(où $\overline{\int_a^b}$ désigne l'intégrale par excès de Riemann-Darboux), la fonction $\Phi(e)=f(x_e)$ est continue, c. à d. tend vers 0 avec le diamètre de e.

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme I, § 3, de l'ouvrage cité[2]) donne le

Lemme II. *Soit $\mathcal{E}^*=\{e_u^*\}$ un noyau indépendant* (*). *Faisons correspondre aux ensembles e_u^* d'une manière quelconque les nombres réels k_e, bornés dans leur ensemble,*

$$|k_e| \leqslant K\cdot(b-a).$$

Il existe alors une fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans M [4]), *satisfaisant à la condition* (2) *et telle que l'on ait*

$$(3)\qquad f(x_e)=k_e\ ^{5)}\qquad \textit{pour chaque}\quad e_u^* \subset \mathcal{E}^*.$$

Considérons l'espace linéaire G des éléments

$$x=x(t)=c_1 x_{e_1}(t)+\ldots+c_p x_{e_p}(t)-c_{p+1}x_{e_{p+1}}(t)-\ldots-c_{p+q}x_{e_{p+q}}(t)$$

où $e_i \subset \mathcal{E}^*$ et $c_i \geqslant 0$. Posons pour $x \in G$:

$$(4)\qquad f(x)=c_1 k_{e_1}+\ldots+c_p k_{e_p}-c_{p+1}k_{e_{p+1}}-\ldots-c_{p+q}k_{e_{p+q}}.$$

Cette fonctionnelle est additive et vérifie la condition (3). De plus, $f(x)$ satisfait à la condition (2). Chaque e_u^* étant dense dans (a, b), on a $\overline{\int_a^b} x_e(t)\,dt=b-a$ et la condition (2) est satisfaite pour chaque $e \in \mathcal{E}^*$.

Comme $|x(t)|$ atteint sa valeur maximum $c_1+\ldots+c_{p+q}$ sur l'ensemble-produit $e_1\cdot e_2\cdot\ldots\cdot e_p\cdot Ce_{p+1}\cdot\ldots\cdot Ce_{p+q}$, dense dans (a, b), il vient

$$(5)\qquad \overline{\int_a^b}|x(t)|\,dt=(c_1+\ldots+c_{p+q})\cdot(b-a).$$

Il résulte de (4) que $|f(x)| \leqslant K\cdot(b-a)\cdot(c_1+\ldots+c_{p+q})$, de sorte que la condition (2) est en vertu de (5) satisfaite également pour tout $x \in G$.

D'après le théorème de M. Banach [6]), on peut prolonger $f(x)$ sur l'espace M tout entier de manière à avoir $|f(x)| \leqslant K\cdot\overline{\int_a^b}|x(t)|\,dt$ pour tout $x \in M$.

---

[4]) M désigne l'espace des fonctions bornées (l. c., p. 67).

[5]) x_e désigne la fonction égale à 1 dans l'ensemble e, et à -1 dans le complémentaire de e (l. c., p. 72).

[6]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne, Warszawa 1932, pp. 27—28, Théorème 1. Pour appliquer ce théorème au cas considéré, on n'a qu'à poser $p(x)=K\overline{\int_a^b}|x(t)|\,dt$.

Théorème. *La puissance de la totalité des fonctions d'ensemble additives et continues est $2^{2^{\aleph_0}}$.*

En effet, il s'en suit du lemme II et de l'existence d'un noyau indépendant (*) formé de $2^{\aleph_0}$ ensembles que la puissance de la totalité des fonctionnelles linéaires $f(x)=\int_E x(t)\,\Phi(dE)$ assujetties à la condition (2) est égale à $2^{2^{\aleph_0}}$. Par conséquent, $\Phi(e)$ étant une fonction d'ensemble additive et continue, la puissance de la totalité de telles fonctions d'ensemble est également $2^{2^{\aleph_0}}$, c. q. f. d.

Leningrad, le 25. VI. 1935.