Über die Menge der differenzierbaren Funktionen.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Sei R_1 die Menge der reellen Zahlen, I das abgeschlossene Intervall $<0,1>$. Den Raum der reellen in I stetigen Funktionen bezeichnen wir [1]) mit R_1^I. Sei Γ die Menge der in I differenzierbaren $f \epsilon R_1^I$. Man kann leicht zeigen, dass Γ in R_1^I eine CA-Menge (analytisches Komplement) bildet; dies folgt z. B. aus der Formel [2]):

$$(1)\qquad \begin{aligned} f \epsilon \Gamma \equiv \prod_x \prod_p \sum_q \prod_{y_1} \prod_{y_2} \Big\{ \Big[0 < |y_1 - x| < \frac{1}{q} > |y_2 - x| > 0 \Big] \rightarrow \\ \rightarrow \Big[\Big| \frac{f(y_1) - f(x)}{y_1 - x} - \frac{f(y_2) - f(x)}{y_2 - x} \Big| < \frac{1}{p} \Big] \Big\}, \end{aligned}$$

wo $x \epsilon I$, p, q natürliche Zahlen und y_1, y_2 rationale Zahlen aus I bedeuten.

Nun hat Banach die Frage gestellt, ob die durch die Formel (1) gegebene Abschätzung der projektiven Klasse von Γ exakt ist (und nicht etwa Γ eine analytische Menge, und somit auch eine Borelsche Menge ist). Ich werde zeigen, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Satz. *Die Menge Γ der in I differenzierbaren Funktionen ist im Raume R_1^I aller in I stetiger Funktionen ein analytisches Komplement, aber keine analytische Menge.*

---

[1]) vgl. C. Kuratowski: *Topologie I,* Monografje Matematyczne (1933), p. 199.

[2]) Kuratowski-Tarski: Fund. Math. XVII, p. 240—248; Kuratowski, ibid. p. 149—272.

Wir beweisen folgenden:

Hilfssatz: *Sei $M \subset I$ eine perfekte nulldimensionnale Menge, $N \subset M$ eine analytische Menge. Es existiert eine Funktion $F(x, t)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a_1) *$F(x, t)$ ist stetig für $x \epsilon I$, $t \epsilon M$,*

(a_2) $[t_1 \neq t_2] \rightarrow [F(0, t_1) \neq F(0, t_2)]$,

(a_3) *wenn $t \epsilon M - N$, so ist $F(x, t)$ in jedem Punkte von I nach x differenzierbar,*

(a_4) *wenn $t \epsilon N$, so ist $F(x, t)$ in mindestens einem Punkte von I nach x nicht differenzierbar.*

Beweis: Sei $J = <\alpha, \beta>$ ein abgeschlossenes Teilintervall von I. Wir setzen:

$$(2)\qquad \varphi(x, J) = \frac{16(x-\alpha)^2(\beta - x)^2}{(\beta - \alpha)^3} \qquad \text{für} \quad x \epsilon J,$$

$$(3)\qquad \varphi(x, J) = 0 \qquad \text{für} \quad x \epsilon I - J.$$

Die Funktion $\varphi(x, J)$ ist in I stetig differenzierbar und es gilt:

$$(4)\qquad \operatorname{Max} |\varphi(x, J)| = \operatorname{Max} \varphi(x, J) = \varphi\Big(\frac{\alpha + \beta}{2}, J\Big) = \beta - \alpha = \delta(J),$$

$$(5)\qquad \varphi(0, J) = 0.$$

Die Formel

$$(6)\qquad q = 2^{n_1 - 1} + 2^{n_1 + n_2 - 1} + \ldots + 2^{n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1}$$

bestimmt eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen. Auf Grund dieser Zuordnung werden wir, insbesondere bei der Betrachtung determinierender Systeme, die Indizesfolge $n_1, n_2, \ldots, n_k$ durch $[q]$ bezeichnen.

Der analytischen Menge N ordnen wir ein determinierendes System $\{N_{n_1 n_2 \ldots n_k}\} = \{N_{[q]}\}$ derart zu, dass $N_{[q]} \subset M$ und dass $N_{[q]}$ in M zugleich offen und abgeschlossenen ist.

Bezeichnen wir mit $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_k}(t) = \lambda_{[q]}(t)$ die charakteristische Funktion von $N_{[q]}$, d. h. die durch die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{aligned} \lambda_{[q]}(t) &= 1 \qquad \text{für} \quad t \epsilon N_{[q]} \\ \lambda_{[q]}(t) &= 0 \qquad \text{für} \quad t \epsilon M - N_{[q]} \end{aligned}$$

gegebene Funktion, so ist dieselbe stetig in M.

Jetzt bestimmen wir Systeme von abgeschlossenen Intervallen $\{J_{n_1\dots n_k}\}=\{J_{[q]}\}$, $\{K_{n_1\dots n_k}\}=\{K_{[q]}\}$ und $\{K^{(i)}_{n_1\dots n_k}\}=\{K^{(i)}_{[q]}\}$ $(i=1,2)$ in folgender Weise:

(8) $$J_{n_1}\subset I, \qquad J_{n_1\dots n_k n_{k+1}}\subset K^{(1)}_{n_1\dots n_k},$$

(9) $$J_{n_1\dots n_k}\cdot J_{n_1\dots n'_k}=0 \qquad \text{für} \quad n_k\neq n'_k,$$

(10) $K^{(1)}_{[q]}$ bezeichnet die linke, $K^{(2)}_{[q]}$ die rechte Hälfte von $K_{[q]}$,

(11) $K_{[q]}$ ist konzentrisch mit $J_{[q]}$,

(12) $$\delta(K_{[q]})=\frac{1}{2^q}\,\delta(J_{[q]}).$$

Sei:

(13) $$\varphi_{n_1\dots n_k}(x)=\varphi_{[q]}(x)=\varphi(x,K^{(2)}_{[q]}) \qquad \text{für} \quad x\in I,$$

(14) $$F(x,t)=t+\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_{[q]}(t)\,\varphi_{[q]}(x) \qquad \text{für} \quad x\in I \quad \text{und} \quad t\in M.$$

Wegen (8), (4) und (12) wird die Reihe (14) durch $t+\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^q$ majoriert, ist also gleichmässig konvergent. Da $\lambda_{[q]}(t)$ für $t\in M$ und $\varphi_{[q]}(x)$ für $x\in I$ stetig sind, so ist (a_1) bewiesen. Wegen (5) ist $F(0,t)=t$, woraus (a_2) unmittelbar folgt.

Sei $t\in M-N$, $x_0\in I$; wir setzen:

(15) $$F_p(x,t)=t+\sum_{q=1}^{p}\lambda_{[q]}(t)\,\varphi_{[q]}(x).$$

Wegen (9) existiert für jedes k höchstens ein einziges $J_{n_1,\dots,n_k}$, welches x_0 enthält. Zwei Fälle sind somit möglich. Entweder existiert ein q' derart, dass $x_0\,non\in J_{[q]}$ für $q\geqq q'$, oder es gibt eine unendliche Folge $m_1,m_2,\dots$, derart, dass $x_0\in J_{m_1m_2\dots m_k}$, dagegen $x_0\,non\in J_{n_1n_2\dots n_k}$, wenn das System $n_1,n_2,\dots,n_k$ von $m_1,m_2,\dots,m_k$ verschieden ist.

Wegen $t\in M-N$ ist aber $t\,non\in\prod_{k=1}^{\infty}N_{m_1\dots m_k}$, also existiert ein k' derart, dass $t\,non\in N_{m_1\dots m_k}$ für $k\geqq k'$ und somit $\lambda_{m_1\dots m_k}(t)=0$ gilt. In beiden Fällen existiert also ein q'' derart, dass aus

(16) $$q\geqq q''$$

mindestens eine der beiden Relationen:

(17) $$x_0\,non\in J_{[q]},$$

(18) $$\lambda_{[q]}(t)=0$$

folgt. Sei jetzt

(19) $$h\neq 0 \qquad \text{und} \qquad x_0+h\in I.$$

Aus (17) folgt $\varphi_{[q]}(x_0)=0$. Nun sind zwei Fälle möglich: $x_0+h\in K^{(2)}_{[q]}$ oder $x_0+h\,non\in K^{(2)}_{[q]}$. Wenn $x_0+h\in K^{(2)}_{[q]}$, so ist wegen (4), (11), (12), (17):

(20) $$|h|\geqq\tfrac{1}{2}\,\delta(J_{[q]})-\delta(K^{(2)}_{[q]})=(2^q-1)\,\delta(K^{(2)}_{[q]})\geqq 2^{q-1}\,\varphi_{[q]}(x_0+h),$$

also

(21) $$\left|\frac{\varphi_{[q]}(x_0+h)-\varphi_{[q]}(x_0)}{h}\right|\leqq\frac{1}{2^{q-1}}.$$

Wenn aber $x_0+h\,non\in K^{(2)}_{[q]}$, so ist $\varphi_{[q]}(x_0+h)=0$ und folglich erst recht (21) erfüllt. Aus (17) folgt also (21) und somit auch

(22) $$\left|\frac{\lambda_{[q]}(t)\,\varphi_{[q]}(x_0+h)-\lambda_{[q]}(t)\,\varphi_{[q]}(x_0)}{h}\right|\leqq\frac{1}{2^{q-1}}.$$

Diese Ungleichung folgt aber auch aus (18). Also folgt (22) aus (16). Somit ist für $p\geqq q''$:

(23) $$\left|\frac{F(x_0+h,t)-F(x_0,t)}{h}-\frac{F_p(x_0+h,t)-F_p(x_0,t)}{h}\right|\leqq\sum_{q=p+1}^{\infty}\frac{1}{2^{q-1}}=\frac{1}{2^{p-1}}$$

und daher, da $F_p(x,t)$ nach x differenzierbar ist,

(24) $$\limsup_{h\to0}\frac{F(x_0+h,t)-F(x_0,t)}{h}\leqq\left[\frac{\partial}{\partial x}F(x,t)\right]_{x=x_0}+\frac{1}{2^{p-1}},$$

(25) $$\limsup_{h\to0}\frac{F(x_0+h,t)-F(x_0,t)}{h}\geqq\left[\frac{\partial}{\partial x}F(x,t)\right]_{x=x_0}-\frac{1}{2^{p-1}},$$

(26) $$\limsup_{h\to0}\frac{F(x_0+h,t)-F(x_0,t)}{h}-\liminf_{h\to0}\frac{F(x_0+h,t)-F(x_0,t)}{h}\leqq\frac{1}{2^{p-2}}.$$

Demnach ist, da p beliebig gross, $F(x,t)$ im Punkte $x=x_0$ nach x differenzierbar. Somit ist (a_3) bewiesen.

Sei jetzt $t \epsilon N$. Es existiert mindestens eine Folge $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots$ derart, dass $t \epsilon \prod_{k=1}^{\infty} N_{l_1 l_2 \ldots l_k}$. Die Menge $\prod_{k=1}^{\infty} K^{(1)}_{l_1 \ldots l_k}$ besteht wegen (8), (10) und (12) aus einem Punkt, welchen wir mit x' bezeichnen. Sei ξ_k der Mittelpunkt, η_k die halbe Länge von $K^{(2)}_{l_1 \ldots l_k}$. Man hat:

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \lim_{k\to\infty} (\xi_k + \eta_k) = x', \tag{27}$$

$$0 < \xi_k - x' < 3\eta_k. \tag{28}$$

$\varphi_{l_1 \ldots l_k}(x)$ verschwindet in $K^{(1)}_{l_1 \ldots l_k}$, also ist

$$\varphi_{l_1 \ldots l_k}(x') = 0 \qquad \text{für} \qquad k = 1, 2 \ldots \tag{29}$$

Ist aber das System $n_1, n_2, \ldots, n_k$ von $l_1, l_2, \ldots, l_k$ verschieden, so liegt wegen (9), (10) und (11) das Intervall $K^{(1)}_{l_1 \ldots l_k}$ und somit x' ausserhalb von $K^{(2)}_{n_1 \ldots n_k}$. Also:

(30) $\varphi_{n_1 \ldots n_k}(x') = 0$ für $k = 1, 2, \ldots$, wenn $n_1, \ldots, n_k$ verschieden von $l_1, \ldots, l_k$.

Man hat wegen (29) und (30)

$$F(x', t) = t. \tag{31}$$

Wegen (8)—(11) liegen alle Intervalle $K^{(2)}_{[q]}$ ausserhalb einander. In $K^{(2)}_{l_1 \ldots l_k}$ sind also alle $\varphi_{[q]}(x)$ bis auf $\varphi_{l_1 \ldots l_k}(x)$ gleich Null. Also (da wegen $t \epsilon N_{l_1 \ldots l_k}$ auch $\lambda_{l_1 \ldots l_k}(t) = 1$ ist):

$$F(\xi_k, t) = t + \varphi_{l_1 \ldots l_k}(\xi_k) = t + 2\eta_k, \tag{32}$$

$$F(\xi_k + \eta_k, t) = t + \varphi_{l_1 \ldots l_k}(\xi_k + \eta_k) = t, \tag{33}$$

$$\frac{F(\xi_k, t) - F(x', t)}{\xi_k - x'} \geqq \frac{2}{3}, \tag{34}$$

$$\frac{F(\xi_k + \eta_k, t) - F(x', t)}{\xi_k + \eta_k - x'} = 0. \tag{35}$$

Aus (27), (34) und (35) folgt, dass $F(x, t)$ für $x = x'$ nicht nach x differenzierbar sein kann. Somit ist (a_4) — und der Hilfssatz — bewiesen.

Der Beweis des Satzes erledigt sich jetzt in wenigen Worten.

Sei Φ_1 die Menge der Funktionen $F(x, t)$ für $t = constans \,\epsilon\, M - N$, Φ_2 die Menge der Funktionen $F(x, t)$ für $t = constans \,\epsilon\, N$, schliesslich $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Dann ist Φ eine kompakte Teilmenge von R^I_1 und wegen $(a_3), (a_4)$

$$\Phi_1 = \Phi\Gamma. \tag{36}$$

Wäre nun Γ analytisch, so wäre auch Φ_1 stets analytisch. Andrerseits ist wegen $(a_1), (a_2)$ Φ mit M und Φ_1 mit $M - N$ homöomorph. Wählt man als N eine nicht Borelsche Teilmenge von M, so ist $M - N$ und daher auch Φ_1 nicht analytisch. Γ ist also keine analytische Menge, w. z. b. w.

Warszawa 18. VII. 1936.