Les ensembles

$$G=\underset{x}{\mathrm{E}}\left[|f|<\frac{\mu}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \Gamma=\underset{x}{\mathrm{E}}\left[|f|>\frac{\mu}{2}\right]$$

sont ouverts, disjoints et on a: $F\subset G$ et $\Phi\subset\Gamma$. Donc R est normal. Le fait que dans l'espace R tout ensemble ouvert est un F_σ se démontre comme tout à l'heure.

Enfin, pour les espaces *bicompacts*, on a l'énoncé suivant:

Pour qu'à tout ensemble fermé F d'un espace de Hausdorff bicompact corresponde une fonction continue $f(x)$ telle que l'on ait

$$F=\underset{x}{\mathrm{E}}[f=0],$$

il faut et il suffit que tout ensemble ouvert de R soit un F_σ.

Sur le plongement des espaces dans les rétractes absolus.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

M. C. Kuratowski a démontré[1]) qu'étant donnée une fonction continue $y=f(x)$ définie dans un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable X, on peut prolonger cette fonction d'une manière continue sur l'espace X tout entier, en ajoutant à l'espace Y (espace des y) un polytope infini[2]) P (satisfaisant en outre à la condition $\dim P\leqslant\dim(X-A)$). Dans cet ordre d'idées, je vais démontrer dans cette Note que dans le cas où l'espace Y est compact, il existe un polytope infini P tel que l'ensemble $Y+P$ est un rétracte absolu. Par conséquent, l'existence du prolongement mentionné est assurée pour tous les A, X et f simultanément.

Lemme. *A_1 et A_2 étant des sous-polyèdres disjoints d'un polyèdre A et L désignant l'intervalle $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, il existe une fonction $f(x,t)$ de la forme $f(x,t)=(x,\theta(x,t))$ qui rétracte le polyèdre $A\times L$[3]) en sous-polyèdre de façon qu'on ait:*

$$f(x_0,t)\equiv(x_0,0) \qquad \textit{pour tout} \quad x_0\in A_1,$$
$$f(x_0,t)\equiv(x_0,t) \qquad \textit{pour tout} \quad x_0\in A_2.$$

---

[1]) Fund. Math. 24 (1935), p. 259.

[2]) Un polytope infini est un ensemble P qui admet une *décomposition simpliciale*, c. à d. une décomposition de la forme $P=\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i$ où Δ_i sont des simplexes géométriques assujettis aux conditions: 1) $\Delta_i\cdot\Delta_j$ est une face (de dimension $\geqslant -1$) de Δ_i et Δ_j; 2) aucun point de P n'est un point d'accumulation d'une suite de points appartenant à des différents termes de la suite $\{\Delta_i\}$. Comp. C. Kuratowski, l. c., p. 258.

[3]) $A\times L$ désigne le produit cartésien des espaces A et L.

Démonstration. Admettons que le polyèdre A est donné sous la forme d'un complexe géométrique[4]) K dont A_1 et A_2 sont des sous-complexes. Pour obtenir la fonction demandée, il suffit de définir $f(x, t_0)$, pour tout $t_0 \epsilon L$, comme une transformation simpliciale[5]) du complexe K en polyèdre $A \times L$ de manière que pour tout sommet x_0 de K l'on ait $f(x_0, t) = (x_0, 0)$, lorsque $x_0 \epsilon A_1$, et $f(x_0, t) = (x_0, t)$, lorsque $x_0 \epsilon A - A_1$.

Théorème 1. Y étant un ensemble compact, il existe un polytope infini P tel que $Y+P$ est un rétracte absolu.

Démonstration. Admettons que Y est un sous-ensemble du cube fondamental Q_ω[6]) de l'espace de Hilbert. Posons $r_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$ pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \epsilon Q_\omega$. L'ensemble $r_n(Y)$ constitue alors un sous-ensemble fermé du polyèdre n-dimensionnel $Q_n = r_n(Q_\omega)$. Faisons correspondre à chaque $n = 1, 2, \dots$ un polyèdre A_n constituant un entourage de $r_n(Y)$ (dans Q_n), de manière que les entourages $T_n = \underset{p \epsilon Q_\omega}{\mathrm{E}} [r_n(p) \epsilon A_n]$ de Y dans Q_ω satisfassent aux conditions:

(1) $\quad T_1 = Q_\omega$ et T_{n+1} est contenu dans l'intérieur de T_n,

(2) $$\prod_{n=1}^{\infty} T_n = Y.$$

En vertu de (1), les polyèdres $r_n(T_{n+1})$ et $r_n(\overline{Q_\omega - T_n}) = \overline{Q_n - A_n}$ sont disjoints. On conclut donc du lemme précédent qu'il existe une fonction $\theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ telle que la fonction $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, 0, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), 0, \dots)$ constitue une rétraction du polyèdre $Q_{n+1} = Q_n \times \left\langle 0, \frac{1}{n+1} \right\rangle$ en un sous-polyèdre et satisfait à la condition:

$f_n(p) = r_n(p)$, lorsque $r_n(p) \epsilon \overline{Q_n - A_n}$ et $f_n(p) = p$, lorsque $r_n(p) \epsilon r_n(T_{n+1})$.

[4]) c. à d. décomposé simplicialement.

[5]) c. à d. une transformation affine dans chacun des simplexes de K.

[6]) Q_ω désigne le sous-ensemble compact de l'espace de Hilbert composé des points $\{x_i\}$ où $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{i}$ pour tout $i = 1, 2, \dots$ D'après le théorème connu d'Urysohn, chaque espace séparable est topologiquement contenu dans Q_ω.

En vertu de (1) et (2), l'ensemble $Q_\omega - Y$ est somme des ensembles compacts $B_n = \overline{T_n - T_{n+1}}$ satisfaisant aux conditions:

(3) $\quad B_n \cdot B_{n+k} = 0$ pour tout $n = 1, 2, \dots$ et $k > 1$.

(4) $\quad B_n \cdot B_{n+1} = T_{n+1} \cdot \overline{Q_\omega - T_{n+1}}$ pour tout $n = 1, 2, \dots$,

(5) $\quad \mathrm{Ls}\, B_n \subset Y$ [7]).

L'égalité (4) entraîne que l'on a pour $p \epsilon B_n \cdot B_{n+1}$:

$$r_n(p) = r_n r_{n+1}(p) \epsilon r_n(T_{n+1})$$

et

$$r_{n+1}(p) = r_{n+1} r_{n+2}(p) \epsilon r_{n+1}(\overline{Q_\omega - T_{n+1}}) = \overline{Q_{n+1} - A_{n+1}}.$$

Il en résulte d'après la définition de f_n et f_{n+1} que $f_n r_{n+1}(p) = r_{n+1}(p)$ et aussi $f_{n+1} r_{n+2}(p) = r_{n+1} r_{n+2}(p) = r_{n+1}(p)$. Ceci montre en vertu de (1), (3) et (5) qu'on obtient une fonction bien définie sur l'ensemble Q_ω tout entier, en posant:

(6) $\quad f(p) = f_n r_{n+1}(p)$, lorsque $p \epsilon B_n$,

(7) $\quad f(p) = p$, lorsque $p \epsilon Y$.

Ainsi définie, la fonction f est d'après (3) et (5) continue dans l'ensemble $Q_\omega - Y$. D'autre part, pour tout point $p = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \epsilon B_n$, on a

$$f(p) = f_n r_{n+1}(p) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, 0, \dots) = \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), 0, \dots),$$

d'où

$$\varrho(p, f(p)) \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}}.$$

En rapprochant cette inégalité de (5) et (7), on conclut que f est continue aussi aux points de Y.

En vertu de (6) et (7), l'ensemble $f(Q_\omega)$ est la somme de Y et des ensembles $f(B_n) = f_n(r_{n+1}(B_n)) \subset B_n$, qui constituent d'après (5) un polytope infini. Pour achever la démonstration du théorème 1, il ne reste donc qu'à prouver que $f(p) = p$ pour tout $p \epsilon f(Q_\omega)$. Or, cela résulte de (7) pour $p \epsilon Y$ et de (6) — d'après la définition de la fonction f_n — pour $p \epsilon f(B_n)$.

[7]) $\mathrm{Ls}\, B_n$ désigne la *limite supérieure* (topologique) de la suite $\{B_n\}$, c. à d. l'ensemble de tous les points d'accumulation des suites de points appartenant à des différents termes de la suite $\{B_n\}$.

La question suivante reste ouverte:

Un espace compact de dimension $<n$ se laisse-t-il plonger toujours dans un rétracte absolu de dimension n?

Théorème 2. *Y étant un ensemble compact, il existe un polytope infini P_n de dimension $\leqslant n$ tel que l'ensemble $Y+P_n$ est compact et péanien*[8] *en dimensions $<n$.*

Démonstration. Soit P un polytope infini tel que $Y+P$ est un rétracte absolu. Envisageons une décomposition simpliciale Λ de P pour laquelle le diamètre des simplexes tend vers 0 et posons P_n égal à la somme de tous les simplexes de Λ de dimensions $\leqslant n$. L'ensemble P_n ainsi défini est évidemment un polytope infini de dimension $\leqslant n$. Il ne reste donc qu'à prouver que $Y+P_n$ est péanien en dimensions $<n$.

$Y+P_n$ étant, bien entendu, localement connexe en toutes les dimensions[8]) dans chaque point $p \epsilon P_n$, il ne reste qu'à prouver que, pour tout $k<n$ et pour toute fonction φ transformant la surface S_k d'une sphère euclidienne $(k+1)$-dimensionnelle H_{k+1} en un sous-ensemble de $Y+P_n$, il existe un prolongement continu sur H_{k+1} avec $\varphi(H_{k+1}) \subset Y+P_n$, et que, dans le cas où $\varphi(S_k)$ est un sous-ensemble d'un entourage suffisamment petit d'un point $p \epsilon Y$, ce prolongement peut être choisi de façon que le diamètre de $\varphi(H_{k+1})$ soit arbitrairement petit.

L'ensemble $Y+P$ étant un rétracte absolu, il existe un prolongement φ avec $\varphi(H_{k+1}) \subset Y+P$ qui remplit toutes les conditions en question, sauf l'inclusion $\varphi(H_{k+1}) \subset Y+P_n$. Pour obtenir le prolongement demandé, on n'a qu'à appliquer le procédé bien connu de M. P. Alexandroff[9]), permettant de remplacer φ par une fonction continue φ_0 dont les valeurs appartiennent à $Y+P_n$ et qui satisfait aux conditions: 1. si $\varphi(p) \subset Y+P_n$, on a $\varphi_0(p)=\varphi(p)$; 2. si $\varphi(p) \epsilon P-P_n$, les deux points $\varphi_0(p)$ et $\varphi(p)$ appartiennent au même simplexe de la décomposition Λ.

Il est enfin à remarquer que le théorème 2 contient comme cas particulier le théorème démontré par M. Eilenberg[10]), d'après lequel chaque espace compact Y se laisse plonger, pour tout $n>0$, dans un continu Y_0 localement connexe, acyclique en dimensions $<n$ [11]) et tel que $\dim(Y_0-Y)=n$.

[8]) Un espace E est dit *localement connexe en dimension* k au point p, lorsqu'à chaque entourage U de p correspond un entourage V de p tel que chaque fonction continue φ transformant la surface S_k d'une sphère euclidienne $(k+1)$-dimensionnelle H_{k+1} en un sous-ensemble de V admet un prolongement continu transformant H_{k+1} en un sous-ensemble de U. L'espace E localement connexe en toutes les dimensions $k<n$ dans chacun de ses points et tel que toute fonction continue φ transformant S_k en un sous-ensemble de E admet un prolongement continu sur la sphère H_{k+1}, s'appelle — d'après M. Kuratowski — *péanien en dimensions* $<n$.

[9]) Voir p. ex. P. Alexandroff, Math. Ann. 106 (1932), p. 170.

[10]) Voir S. Eilenberg, Fund. Math. 24 (1935), p. 65—71.

[11]) Un espace compact E est dit *acyclique en dimension* k, lorsque chaque vrai cycle k-dimensionnel dans E y est homologue à 0. Tout espace compact E qui est péanien en dimensions $<n$ est, bien entendu, acyclique en dimensions $<n$. Ce fait élémentaire, démontré par M. C. Kuratowski, l. c., à l'aide du théorème cité de M. S. Eilenberg, se laisse aussi obtenir immédiatement du fait que E est un rétracte pour tout espace $M \supset E$ tel que $\dim(M-E) \leqslant n$. En effet, chaque vrai cycle $\mathfrak{C}=\{C_i\}$ de E de dimension $<n$ est homologue à 0 dans l'espace qui s'obtient, en ajoutant à E une infinité dénombrable de réalisations géométriques des complexes K_i de dimension $\leqslant n$ dont les frontières sont les cycles C_i. L'existence d'une rétraction de l'ensemble $E+\sum_{i=1}^{\infty} K_i$ en E implique que le vrai cycle $\mathfrak{C}$ est homologue à 0 dans E.