Sur les fonctions absolument continues d'intervalle.

Par

Stefan Kempisty (Wilno).

L'étude des fonctions non additives d'intervalle faite par M. M. Banach[1]), Burkill[2]) et Saks[3]) a permis de déduire plusieurs propriétés des intégrales de Riemann, de Stjeltjes et de Lebesgue, en partant des propriétés des intégrales des fonctions d'intervalles. Nous allons voir que cela a lieu de même pour l'intégrale spéciale de Denjoy. Cette méthode a l'avantage d'être applicable à la théorie de l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables et ne demande pas de construction des suites d'intervalles contigus à un ensemble fermé, introduites par M. Looman[4]) et appliquées ensuite par M. Krzyżański[5]).

En nous bornant aux intervalles dont le paramètre de régularité est au moins égal à 1/2, nous pouvons définir une intégrale qui détermine la fonction primitive de la dérivée régulière[6]), tandis que les opérations de M. Looman et Krzyżański ne donnent que la primitive d'une dérivée au sens fort.

[1]) Sur une classe de fonctions d'ensemble. *Fund. Math.* 6 (1924), p. 170—188.

[2]) Functions of intervals. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 22 (1924), p. 275—310.

[3]) Théorie de l'intégrale. *Monografje Matematyczne.* Warszawa 1933, p. 102—105.

[4]) Sur la totalisation des dérivées des fonctions continues de plusieurs variables indépendantes. *Fund. Math.* 4 (1923), p. 246.

[5]) I. Sur les fonctions absolument continues généralisées de deux variables. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris* 1934, p. 2048. — II. O uogólnionych bezwzględnie ciągłych funkcjach dwóch zmiennych. *Annales Soc. Pol. Math.* Dod. 1935, p. 1.

[6]) Kempisty, Sur la totalisation des fonctions de deux variables. *C. R.* 1934, p. 2060.

Nous donnerons d'abord, dans les §§ 2 et 3, les énoncés des propriétés générales des fonctions d'intervalles: absolument continues et à variation bornées régulièrement. Ces énoncés sont obtenus par l'extension des propriétés établis par M. M. Burkill, Banach et Saks.

Ensuite, dans les §§ 3, 4 et 5, en nous servant de la fonction auxiliaire F_E, nous allons en déduire des propriétés des fonctions régulièrement absolument continues autour d'un ensemble et des fonctions à variation régulière bornée autour d'un ensemble.

L'étude des fonctions absolument continues généralisées (§ 7) et des fonctions à variation bornée généralisée nous permettra de développer une théorie déscriptive et une théorie constructive de l'intégrale spéciale ou la totale complète de Denjoy d'une fonction de point dans l'espace à plusieurs dimensions[1]).

Nous terminerons (§ 10) par les définitions des minorantes et des majorantes au sens de Perron et de Ridder, afin de prouver que l'intégrale régulière spéciale équivaut à l'intégrale régulière de Ridder et embrasse l'intégrale régulière de Perron. En modifiant convenablement les définitions fondamentales, on peut prouver de la même manière que l'intégrale de Perron, définie pour les fonctions de plusieurs variables par M. Saks dans sa „Théorie de l'intégrale", est une intégrale spéciale de Denjoy définie au moyen des intervalles régulières.

1. Intégrales et dérivées d'une fonction d'intervalle.

Désignons par x un point $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ de l'espace cartésien à k dimensions. L'ensemble I de tous les points x tels que $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, pour $i = 1, 2, \dots, k$, sera appelé *intervalle* (fermé) de cette espace. Un intervalle non linéaire est *régulier*, lorsque $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \dots = b_k - a_k$. Le produit $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_k - a_k)$ est la mesure $|I|$ de I. Le rapport $p(I)$ des mesures de l'intervalle I et du plus petit intervalle régulier contenant I est dit *paramètre de régularité* de I. Le plus grand des nombres $b_i - a_i$ est la *norme* $n(I)$ de l'intervalle I.

Convenons de dire qu'un *système* d'intervalles est *élémentaire*, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles non empiétants. L'ensemble des points des intervalles d'un système élémentaire est un

[1]) A. Denjoy, Totalisation des nombres derivées non sommables, *Annales Ec. Norm. Sup.* t. 33 (3), 1916.

ensemble élémentaire. Quand un ensemble élémentaire n'est pas un intervalle, il peut être désigné par la même lettre que le système correspondant. Lorsqu'un ensemble élémentaire est un intervalle, le système correspondant est une division de cet intervalle. La plus grande des normes d'un système S sera appelée *norme de ce système* et sera désignée par $n(S)$. Le plus petit des paramètres de régularités des intervalles de S est le *paramètre* $p(S)$ *de* S. La somme des mesures des intervalles de S est la *mesure* $|S|$ de S.

Considérons une fonction d'intervalle $F(I)$ définie pour tous les intervalles I contenus dans un intervalle R. Nous dirons que $F(I)$ est *continue* dans R, quand elle tend vers zéro avec la norme de I.

Nous allons définir la fonction de S correspondante à $F(I)$, en posant

$$F(S) = F(I_1) + F(I_2) + \dots + F(I_k) \quad \text{pour} \quad S = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}.$$

Une fonction d'intervalle $F(I)$ est additive, lorsque $F(S) = F(I)$, quelle que soit la division S de l'intervalle I. Elle est *non décroissante* ou *non croissante par division*, quand on a respectivement $F(S) \geqslant F(I)$ ou $F(S) \leqslant F(I)$.

M. Burkill a défini l'*intégrale au sens étendu* d'une fonction, en posant

$$(E) \int_R F(I) = \lim_{n(S) \to 0} F(S),$$

où S est une division de l'intervalle R et (E) désigne l'intégrale étendue.

Nous allons nous borner à l'étude des intégrales obtenues au moyen des divisions dont le paramètre de régularité est au moins égal à $1/2$; nous appellerons *intégrale régulière inférieure* la limite inférieure de $F(S)$ pour $p(S) \geqslant 1/2$ et $n(S)$ tendant vers zéro. On définit de la même manière *l'intégrale régulière supérieure*. Une fonction F est intégrable régulièrement, lorsque ces intégrales sont égales et leur valeur commune est l'intégrale de F dans R. Nous désignerons ces intégrales respectivement par:

$$\underline{\int_R} F, \qquad \overline{\int_R} F, \qquad \int_R F.$$

Nous avons pris $1/2$ comme borne inférieure des paramètres de régularité des intervalles considérés, mais ce n'était fait que pour fixer les idées. On pourrait bien remplacer $1/2$ par un autre nombre inférieur à un. Lorsque ce nombre est égal à un, tous les intervalles deviennent réguliers et l'intégrale n'est définie que dans un intervalle dont les cotés $b_i - a_i$ ont des rapports commensurables. Pour éviter cet inconvenient, on pourrait poser dans ce cas

$$\overline{\int_R} F = \liminf_{I \to R} \overline{\int_I} F, \qquad \underline{\int_R} F = \limsup_{I \to R} \underline{\int_I} F,$$

I désignant l'intervalle dont les cotés ont des rapports commensurables.

Les intégrales régulières jouissent des propriétés analogues à celles des intégrales de Burkill.

Th. 1. *Toute fonction régulièrement intégrable dans R_0 l'est dans chaque intervalle R contenu dans R_0 et l'intégrale dans R est une fonction additive dans R_0.*

Th. 2. *La somme de deux fonctions régulièrement intégrables dans R est elle même intégrable régulièrement dans cet intervalle et*

$$\int_R (F_1 + F_2) = \int_R F_1 + \int_R F_2.$$

Th. 3. *$F(I)$ étant une fonction régulièrement intégrable dans R, on peut déterminer un nombre δ_ε de manière qu'on ait*

$$\left| F(S) - \int_S F \right| < \varepsilon,$$

quel que soit dans R le système S satisfaisant aux conditions $p(S) \geqslant 1/2$ et $n(S) < \delta_\varepsilon$.

Il résulte de ce théorème que l'intégrale d'une fonction continue est continue.

La limite du rapport $F(I)/|I|$, pour I tendant vers un point x contenu dans I, s'appelle *dérivée au sens fort* de la fonction F au point x. Lorsque le paramètre de régularité de l'intervalle variable I est au moins égal à $1/2$, cette limite est la *dérivée régulière* $D_x F$. En considérant les limites extrêmes, on définit les dérivées régulières extrêmes $\underline{D}_x F$ et $\overline{D}_x F$. Notre définition diffère de celle de M. Banach[1]), faite au moyen des intervalles réguliers, c'est à dire de paramètre de régularité égal à 1.

[1]) l. c., p. 170.

M. Burkill[1] a défini les dérivées extrêmes $l(x, \varrho)$ et $u(x, \varrho)$ d'une fonction d'intervalle, en se bornant aux intervalles qui tendent vers x de façon qu'on ait $|I| \geqslant \varrho |V_x|$, V_x étant le plus petit intervalle régulier de centre x contenant I.

Dans l'espace à k dimensions, on a évidemment

$$l\left(x, \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leqslant \underline{D}_x F \leqslant \overline{D}_x F \leqslant u\left(x, \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

En suivant un raisonnement de M. Burkill fait pour les dérivées $l(x, \varrho)$ et $u(x, \varrho)$, on peut montrer que $\underline{D}_x F$ est de type lu de Young et $\overline{D}_x F$ est de type ul.

On peut établir les relations suivantes entre les dérivées et les intégrales régulières.

Th. 4. *Lorsque $\underline{D}_x F \geqslant 0$ dans un intervalle R, on a*

$$\overline{\int_R} F \geqslant 0.$$

Il en résulte, pour F additive, $F(R) \geqslant 0$.

Th. 5. *Si, F étant régulièrement intégrable dans R_0, l'intégrale de F s'annule dans tout intervalle R contenu dans R_0, $D_x F$ existe et s'annule presque partout dans R_0.*

En appliquant ce théorème à la différence de $F(R)$ et de son intégrale dans R, on obtient le

Th. 6. *Si F est régulièrement intégrable dans R et $V(R)$ désigne son intégrale dans R, on a, presque partout dans R, les égalités*

$$\underline{D}_x V = \underline{D}_x F, \qquad \overline{D}_x V = \overline{D}_x F.$$

Les deux derniers théorèmes étaient établis par M. Saks pour l'intégrale de Burkill et les dérivées de Banach[2]).

Th. 7. *Si $F(I)$ est une fonction régulièrement intégrable d'intervalle linéaire, l'enemble des points où ses dérivées régulières extrêmes sont finies et inégales est de mesure nulle.*

On le prouve, en suivant le raisonnement dont se sert M. Burkill pour démontrer un théorème analogue sur les dérivées $u(x, \varrho)$ et $l(x, \varrho)$ des fonctions intégrables[3]).

[1]) l. c. p. 296.

[2]) l. c. p. 105—6.

[3]) II. The derivates of functions of intervals. *Fund. Math.* t. V (1924), p. 325.

2. Fonctions absolument continues.

Une fonction d'intervalle est dite *absolument continue* dans R, si à chaque nombre ε positif on peut faire correspondre un nombre δ_ε tel que la condition $|S| < \delta_\varepsilon$ entraîne $|F(S)| < \varepsilon$, quel que soit le système élémentaire S composé d'intervalles contenus dans R. En ajoutant à cette définition la condition supplémentaire $p(S) \geqslant 1/2$, on obtient la définition d'une fonction d'intervalle *régulièrement absolument continue* dans R ou ACr dans R.

En remplaçant successivement l'inegalité $|F(S)| < \varepsilon$ par $F(S) > -\varepsilon$ et $F(S) < \varepsilon$, on obtient les définitions des fonctions absolument régulièrement semicontinues: $IACr$ et $SACr$.

On déduit du théorème 3, § 1 la proposition suivante:

Th. 1. *Si F est une fonction régulièrement intégrable dans R, elle n'est ACr qu'en même temps que son intégrale régulière.*

Th. 2. *Si F est une fonction $IACr$ dans R, on a*

$$\underline{\int_R} F \geqslant \int_R \underline{D}_x F\, dx, \qquad \overline{\int_R} F \geqslant \int_R \overline{D}_x F\, dx.$$

En appliquant ce théorème à la fonction $-F$, on en déduit les égalités

$$\underline{\int_R} F = \int_R \underline{D}_x F\, dx, \qquad \overline{\int_R} F = \int_R \overline{D}_x F\, dx$$

pour toute fonction ACr dans R.

On établit ces théorèmes, en suivant le raisonnement developpé par M. Burkill dans la démonstration du théorème suivant:

Si $F(I)$ est une fonction absolument continues, on a

$$(E)\underline{\int_R} F \leqslant \int_R l(x)\, dx \leqslant \int_R u(x)\, dx \leqslant (E)\overline{\int_R} F,$$

l'égalité ayant lieu dans l'espace linéaire[1]).

Du théorème 2 on déduit immédiatement que

$$\int_R F \geqslant 0,$$

dès que F est $IACr$ et $\underline{D}_x F \geqslant 0$ presque partout dans R.

[1]) l. c. I, p. 301, th. 7. 2 et p. 309, th. 7. 4; $u(x) = \lim_{\varrho \to 0} u(x, \varrho)$, $l(x) = \lim_{\varrho \to 0} l(x, \varrho)$.

Une fonction d'intervalle sera dite *régulièrement singulière* dans R, quand $D_x F=0$ presque partout dans cet intervalle.

Comme toute fonction additive est intégrable, nous déduisons du th. 2 ce

Th. 3. *Toute fonction d'intervalle additive régulièrement singulière et ACr dans R est identiquement nulle.*

Le théorème suivant résulte du même théorème 2:

Th. 4. *Pour qu'une fonction ACr dans R soit presque partout régulièrement dérivable, il faut et il suffit qu'elle soit régulièrement intégrable. De plus*

$$\int_R F = \int_R D_x F\, dx, \qquad \int_R |F| = \int_R |D_x F|\, dx,$$

puisque $|D_x F| = D_x |F|$.

En particulier, lorsque F est additive et ACr, elle est l'intégrale de Lebesgue de sa dérivée. Or nous savons que l'intégrale de Lebesgue est une fonction AC, donc à plus forte raison ACr. Par suite, pour que $F(I)$ soit l'intégrale de Lebesgue d'une fonction $f(x)$, il faut et il suffit qu'elle soit additive, AC et que sa dérivée régulière soit presque partout égale à $f(x)$.

3. Fonctions à variation bornées.

Nous dirons qu'une fonction $F(I)$ est *à variation bornée* ou VR *dans* R, lorsque

$$(E)\overline{\int_R} |F| < \infty.$$

Il est évident qu'une fonction F est VB dès que la fonction de système élémentaire

$$F(S) = F(I_1) + F(I_2) + \ldots + F(I_n) \quad \text{pour } S=\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$$

est bornée, c'est à dire quand F est *à variation bornée au sens strict*, défini par M. Banach et M. Saks [1]). La réciproque a lieu pour les fonctions additives d'intervalle. En effet, la valeur absolue d'une fonction additive d'intervalle F est non décroissante par division, donc l'intégrale supérieure de Burkill de $|F|$ est égale à la borne supérieure de $|F|(S)$.

(¹ Sur une classe..., p. 171, Théorie de l'intégrale, p. 8.

Une fonction sera dite *à variation régulière bornée* ou VBr dans R, lorsque

$$\overline{\int_R} |F| < \infty.$$

On déduit aisément de cette définition les propriétés suivantes des fonctions VBr:

Th. 1. *La somme de deux fonctions VBr dans R est VBr dans cet intervalle.*

Th. 2. *Si F est ACr dans R, elle est VBr dans cet intervalle.*

Th. 3. *Lorsqu'une fonction continue VBr dans R est non croissante par division, elle est régulièrement intégrable.*

Ce dernier théorème a été établi par M. Saks pour les fonctions VB et les intégrales étendues de Burkill [1]).

Th. 4. *Les dérivées extrêmes régulières d'une fonction VBr dans R sont sommables et les intégrales de leurs valeurs absolues vérifient les inégalités suivantes:*

$$\int_R |\underline{D}_x F|\, dx \leqslant \overline{\int_R} |F|\, dx, \qquad \int_R |\overline{D}_x F|\, dx \leqslant \overline{\int_R} |F|\, dx.$$

Ce théorème a été énoncé par M-lle R. C. Young pour les dérivées régulières de $F(S)$ et les intégrales étendues de Burkill [2]).

Comme toute fonction sommable est presque partout finie, le théorème 4 de ce § et le théorème 7 du § 1 nous donnent le résultat suivant pour les intervalles linéaires:

Th. 5. *Si une fonction d'intervalle est en même temps VBr et régulièrement intégrable dans R, elle y est presque partout régulièrement dérivable.*

Dans le cas géneral cela résulte du théorème 6 du § 1, puisqu'*une fonction VBr non décroissante par division est presque partout régulièrement dérivable*, ce qui a été établi par M. Banach pour les fonctions bornées au sens strict sur un réseau [3]).

Posons

$$S(R) = \int_R F - \int_R D_x F\, dx.$$

¹) Théorie de l'intégrale, p. 106.
²) R. C. Young, Functions of Σ... Math. Zeitschr. 29 (1929), p. 187.
³) l. c., p. 177, th. 7.

En vertu du théorème § 1, 6, cette fonction est une fonction d'intervalle singulière régulièrement; nous avons donc le

Th. 6. *L'intégrale régulière d'une fonction VBr peut être représentée comme somme d'une intégrale de Lebesgue et d'une fonction régulièrement singulière.*

En prenant F additive, on obtient la décomposition de M. Lebesgue de $F(R)$[1]. Comme F est dans ce cas une fonction non décroissante par division, elle est intégrable régulièrement et, en vertu du th. 6 du § 1, la fonction

$$T(R) = \int_R |F| - \int_R |D_x F|\, dx$$

est singulière régulièrement.

En appliquant à $F(I)$ le procédé dont se sert M. Banach dans le mémoire cité, on prouve un théorème analogue à un théorème de M. Banach[2]):

Th. 7. *Si une fonction d'intervalle VBr a les dérivées extrêmes finies à un ensemble dénombrable près dans R, elle est ACr dans cet intervalle.*

Lorsqu'elle est de plus intégrable régulièrement, on a:

$$\int_R F = \int_R D_x F\, dx, \qquad \int_R |F| = \int |D_x F|\, dx,$$

en vertu du th. 4, § 2.

En particulier, cela a lieu quand F est additive, VBr et ses dérivées sont partout finies. On arrive ainsi au théorème classique de M. Lebesgue[3]).

4. Intégration autour d'un ensemble.

Soit $F(I)$ une fonction d'intervalle définie dans l'intervalle R. Considérons une fonction *auxiliaire* $F_E(I)$, égale à $F(I)$ quand I contient un point de l'ensemble E et nulle dans le cas contraire.

L'intégrale régulière de la fonction auxiliaire dans R sera appelée *intégrale régulière de F autour de RE*, ce que nous écrirons

$$\int_{RE} F = \int_R F_E.$$

[1]) Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Annales Ec. Norm. Sup.* t. 27 (3), 1910, p. 419, th. 8.

[2]) l. c., p. 179.

[3]) l. c., p. 423.

Soit R_E le plus petit intervalle contenant l'ensemble E. Nous dirons qu'une fonction E est *régulièrement intégrable autour de E*, quand elle est intégrable autour de $R_E E$.

En se servant de l'intégrale de Burkill, on peut définir *l'intégrale de F autour de E.*

D'après cette définition, l'intégrale de F autour de E est la limite de $F(S)$, lorsque tout intervalle de S contient un point de E, est contenu dans R_E et la norme de S tend vers zéro. Quand E est un ensemble fermé, la mesure de S tend vers la mesure de E; donc *l'accroissement d'une fonction $F(x)$ sur un ensemble fermé E* est égal à l'intégrale de $F(I)$ sur E, dès que $F(I)$ est l'accroissement de $F(x)$ dans l'intervalle I[1]).

Il suffit de se rapeller la définition de la fonction auxiliaire F_E pour prouver l'égalité suivante:

Th. 1.

$$\int_{RE} \int_{IE} F = \int_{RE} F.$$

Posons $F^E = F - F_E$.

Th. 2. *Si F est additive, nous avons*

$$\int_{RE} \int_I F^E = 0.$$

Comme $F(I) = \int_{IE} F + \int_I F^E$, toute fonction additive peut être décomposée en deux fonctions dont l'une s'annule dans chaque intervalle ne contenant pas de points de E et l'autre admet une intégrale régulière nulle autour de E[2]).

En appliquant le th. 3, § 1, on établit le

Th. 3. *Lorsque l'intégrale régulière de F s'annule autour de RE, quel que soit l'intervalle R contenu dans R_E, l'intégrale régulière de $|F|$ est nulle autour de E:*

D'où résulte, en vertu de la relation $|F_e| < |F_E|$, la proposition suivante:

[1]) La définition de l'accroissement a été donnée pour les fonctions d'une variable par M. Lebesgue (Leçons sur l'intégration, p. 159) et pour les fonctions de plusieurs variables par M. Krzyżański, l. c. I, p. 2058.

[2]) Ce théorème est analogue au th. 13 du mémoire cité de M. Denjoy, p. 155.

Th. 4. Si l'intégrale régulière s'annule sur RE, quel que soit R dans R_E, elle s'annule dans R_e, quel que soit l'ensemble e contenu dans E.

Les théorèmes 3 et 4 nous donnent immédiatement les deux théorèmes suivants:

Th. 5. Si F est une fonction additive et régulièrement intégrable autour de E, on a

$$\int_{Re}\int_{I} F^E = 0, \qquad \int_{Re}\int_{IE} F = \int_{RE} F,$$

quel que soit l'ensemble e, contenu dans E.

Th. 6. Si F est additive et régulièrement intégrable autour de E, nous avons

$$\overline{\int_{R}}\left|\int_{IE} F\right| = \overline{\int_{RE}}|F|.$$

En effet, $\overline{\int_{R}}\left|\int_{IE} F\right| \leqslant \overline{\int_{RE}}|F|$. D'autre part $|F(I)| \leqslant \left|\int_{IE} F\right| + \left|\int_{I} F^E\right|$. Or, l'intégrale autour de E de $\left|\int_{I} F^E\right|$ est nulle en vertu des théorèmes 2 et 3; par conséquent

$$\overline{\int_{RE}}|F| \leqslant \overline{\int}\left|\int_{IE} F\right|.$$

Th. 7. Pour qu'une fonction additive F soit régulièrement intégrable autour d'un ensemble E, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer un ensemble élémentaire S_ε contenant intérieurement E et un nombre positif δ_ε, tels qu'on ait

$$|F^E(D)| < \varepsilon$$

pour toute division D de S_ε de norme $< \delta_\varepsilon$ et de paramètre $p(E) \geqslant \frac{1}{2}$.

Pour voir que cette condition est *nécessaire*, prenons une division D_ε de R_E telle que

$$\left|F_E(D_\varepsilon) - \int_{R_E} F_E\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit S_ε la partie de D_ε composée de tous les intervalles contenant des points de E. Nous avons donc $F_E(D_\varepsilon) = F(S_\varepsilon)$. Déterminons maintenant δ_ε de manière qu'on ait

$$\left|F_E(D) - \int_{R_E} F_E\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour toute subdivision D de S_ε de norme inférieure à δ_ε et de parametre $\geqslant \frac{1}{2}$. Comme

$$F(S_\varepsilon) = F_E(D) + F^E(D),$$

nous avons donc

$$|F^E(D)| < \varepsilon.$$

Pour voir que notre condition est *suffisante*, il suffit de remarquer qu'on a

$$|F(S_\varepsilon) - F_E(D)| < \varepsilon$$

pour chaque subdivision D de S_ε de norme $< \delta_\varepsilon$ et de paramètre $\geqslant \frac{1}{2}$.

Lorsque $F(I)$ est l'accroissement dans I d'une fonction $F(x)$ définie dans l'espace linéaire, notre condition équivaut à la convergence de la série des oscillations de $F(x)$ dans les intervalles contigus à E, c'est à dire quand „la variation de $F(x)$ autour de E est finie“ suivant l'expression de M. Denjoy [1]).

5. Fonctions absolument continues autour d'un ensemble.

D'après une définition de M. Krzyżański, une fonction $F(I)$ est *absolument continue sur un ensemble* E, lorsque $F(S)$ tend vers zéro en même temps que la mesure du système élémentaire S composé d'intervalles contenant des points de E [2]).

En nous servant de la fonction auxiliaire F_E, nous pouvons dire que cela a lieu lorsque cette fonction est AC dans R_E.

D'une manière analogue, nous dirons qu'une fonction F est *régulièrement absolument continue* ou ACr *autour de* E, lorsque F_E est ACr dans R_E et qu'elle est $IACr$ ($SACr$) autour de E quand F_E est $IACr$ ($SACr$) dans R_E.

Il est aisé de voir que les fonctions ACr autour d'un ensemble jouissent des propriétés suivantes:

[1]) l. c., p. 157.
[2]) l. c. I, p. 2058.

Th. 1. La somme de deux fonctions ACr autour de E est une fonction du même type.

Cela résulte de l'identité $(F+G)_E = F_E + G_E$.

Th. 2. Si F est une fonction ACr autour de E, elle est ACr autour de tout ensemble e contenu dans E, car $|F_e| \leqslant |F_E|$.

En appliquant le th. 2, § 2 à la fonction auxiliaire, nous obtenons le

Th. 3. Si F est une fonction ACr autour d'un ensemble fermé E, on a

$$\underline{\int_{RE}} F = \int_{RE} \underline{D}_x F\, dx, \qquad \overline{\int_{RE}} F = \int_{RE} \overline{D}_x F\, dx,$$

On déduit ces égalités du th. 2, § 2, en remarquant que $\underline{D}_x F_E = \underline{D}_x F$ aux points x de E et $\underline{D}_x F_E = 0$ aux points x de $R - E$.

Th. 4. Pour qu'une fonction F, ACr autour de E, soit régulièrement dérivable presque partout aux points de E, il faut et il suffit qu'elle soit régulièrement intégrable autour de E.

Nous avons dans ce cas les égalités:

$$\int_{RE} F = \int_{RE} D_x F\, dx, \qquad \int_{RE} |F| = \int_{RE} |D_x F|\, dx.$$

Le th. 1 du § 2 nous donne ce

Th. 5. Pour qu'une fonction régulièrement intégrable autour de E soit ACr autour de cet ensemble, il faut et il suffit que son intégrale autour de E soit ACr dans R_E.

Nous dirons qu'une fonction est *régulièrement singulière dans E*, lorsque sa dérivée régulière est nulle en presque tous les points de E.

Th. 6. Toute fonction ACr régulièrement intégrable autour d'un ensemble fermé E est la somme d'une intégrale de Lebesgue et d'une fonction régulièrement singulière dans E et ACr autour de E.

En effet, soit F une fonction ACr et régulièrement intégrable autour de E. Posons $G(I) = F(I) - V(I)$, en désignant, comme plus haut, par $V(I)$ l'intégrale régulière de F autour de IE. Nous avons presque partout dans R_E, en vertu des th. 6, § 1 et du th. 3, $D_x F_E = D_x V$, donc $D_x F = D_x V$ presque partout dans E. De sorte que $D_x G = 0$ presque partout dans E.

Ainsi G est une fonction régulièrement singulière, dans E.

D'autre part, F étant ACr autour de E, nous avons

$$V(I) = \int_{IE} D_x F\, dx.$$

Il est à remarquer que $G(I)$ est ACr autour de E en vertu du th. 1.

Th. 7. Lorsque F est additive et $\underline{D}_x F \geqslant 0$ presque partout dans R, nous avons $F(R) \geqslant 0$ dès que F est $IACr$ autour de l'ensemble des points où $\underline{D}_x F < 0$.

Ce théorème a été établi par M. Krzyżański pour les fonctions IAC[1]). Nous allons le déduire du th. 3. Posons pour cela

$$E = \underset{x}{\mathrm{E}}[\underline{D}_x F < 0].$$

Comme $F(I) \geqslant 0$ dans tout intervalle I ne contenant pas de points de E (d'après le th. 1, § 1), nous avons

$$F(S) \geqslant F_E(S),$$

quel que soit le système élémentaire S. Par suite, en vertu du th. 2, § 2,

$$F(R) \geqslant \underline{\int_R} F_E \geqslant \int_R \underline{D}_x F_E\, dx = 0,$$

puisque E est par hypothèse de mesure nulle.

En appliquant ce théorème à la fonction F, on voit que $F(R) = 0$ *quand F est additive dans R_0 et ACr autour de l'ensemble où $D_x F \neq 0$, dès que cet ensemble est de mesure nulle.*

Th. 8. L'intégrale de F^E est ACr autour de E.

On le déduit du th. 3, § 1, en remarquant que la fonction F^E est ACr autour de E, puisque

$$(F^E)_E = 0.$$

[1]) l. c. II, p. 17.

6. Fonctions à variation bornée autour d'un ensemble.

Nous dirons qu'une fonction F est *à variation bornée autour de* E, lorsque la fonction auxiliaire F_E est VB dans R, c'est à dire lorsque

$$(E)\overline{\int_E}|F|<\infty.$$

Une fonction F est *à variation bornée au sens strict autour de* E, quand F_E est VB au sens strict dans R_E. Cette définition est équivalente à celle de M. Denjoy pour F additive, puisque *la variation totale autour d'un ensemble* E au sens considéré dans son mémoire est égale à l'intégrale supérieure de $|F|$ [1]).

D'après la définition de M. Lusin [2]), une fonction d'une variable réelle est VB, lorsque son oscillation dans l'intervalle I est une fonction VB au sens strict de I. Il en est donc de même de l'accroissement dans l'intervalle I [2]).

D'après une définition de M. Krzyżański, une fonction $F(I)$ est *à variation bornée sur* E, lorsque

$$\sum_{h=1}^{\infty}|F(I_n)|=\infty,$$

quel que soit la suite d'intervalles I_n non empiétants, contenant des points de E et contenus dans R_E [3]). Or, cette notion est plus restreinte que celle d'une fonction VB autour de E.

Nous allons étendre encore cette dernière notion, en introduisant la condition de régularité. Nous dirons que F est *à variation régulière bornée* ou *VBr autour de* E, lorsque F_E est VBr dans R_E, c'est à dire lorsque

$$\overline{\int_E}|F|<\infty.$$

En appliquant à la fonction auxiliaire les théorèmes du § 3, nous obtenons les propositions suivantes:

Th. 1. *Une fonction VBr autour de E est VBr autour de tout ensemble e contenu dans E.*

[1]) Cela a lieu en vertu du th. 6, § 4, puisque la variation totale autour de E est l'intégrale supérieure de la valeur absolue de l'intégrale de F autour de $I\,E$.

[2]) Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy, *C. R.* t. 155 (1912), p. 1476.

[3]) l. c. II, p. 6.

Th. 2. *La somme de deux fonction VBr autour de E est une fonction du même type.*

Th. 3. *Si F est ACr autour de E, elle est VBr autour de cet ensemble.*

Th. 4. *Si F est continue, non négative, non croissante par division et*

$$\overline{\int_E}|F|<\infty,$$

elle est régulièrement intégrable autour de E.

En effet, F_E est dans ce cas continue, non croissante par division et VBr dans R_E.

Th. 5. *Si F est VBr autour d'un ensemble fermé, ses dérivées régulières extrêmes sont sommables sur RE et on a*

$$\int_{RE}|\underline{D}_xF|\,dx\leqslant\overline{\int_{RE}}|F|,\qquad \int_{RE}|\overline{D}_xF|\,dx\leqslant\overline{\int_{RE}}|F|$$

quel que soit R dans R_E.

Th. 6. *Si F est régulièrement intégrable VB et VBr autour de E, elle est régulièrement dérivable presque partout dans E.*

Th. 7. *Toute fonction VBr autour de E et régulièrement intégrable autour de cet ensemble est décomposable en trois fonctions dont la première est l'intégrale de Lebesgue, la deuxième est régulièrement singulière dans R_E et la troisième régulièrement singulière dans E.*

Pour le prouver, il suffit de reproduire la démonstration du th. 6, § 5 et d'appliquer ensuite le th. 6, § 2.

Le th. 6, § 3 nous donne le corollaire suivant:

Th. 8. *Si F est VBr autour d'un ensemble fermé E et possède les dérivées régulières extrêmes finies aux points de E à un ensemble dénombrable près, elle est ACr autour de E. Lorsqu'elle est de plus régulièrement intégrable autour de E, on a*

$$\int_{RE}F=\int_{RE}D_xF\,dx,\qquad \int_{RE}|F|=\int_{RE}|D_xF|\,dx.$$

7. Fonctions absolument continues généralisées.

Convenons de dire que l'intersection RE est une *portion* de l'ensemble E lorsqu'elle contient un point de E à l'intérieur de R.

Nous dirons qu'une fonction d'intervalle $F(I)$ est *régulièrement absolument continue généralisée* ou $ACGr$ dans un intervalle R_0 quand R_0 est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés [1]) autour desquels F est ACr. Cette définition équivaut à la définition suivante: F est $ACGr$ dans R_0, lorsque tout ensemble fermé contient une portion ER sur laquelle F est ACr. On définit de la même manière les fonctions $IACGr$ et $SACGr$. Une fonction est Ir dans R_0, lorsque tout ensemble fermé contenu dans R_0 contient une portion autour de laquelle F est intégrable régulièrement. Les fonctions ACG définies par M. Krzyżański sont a fortiori $ACGr$ et Ir [2]). F est $I'r$ dans R_0, lorsque $R_0 = \Sigma E_n$ et F est régulièrement intégrable autour de E_n.

Les th. 1, 2 et 4 du § 5 nous donnent les propriétés suivantes des fonctions $ACGr$:

Th. 1. *La somme de deux fonctions $ACGr$ dans R_0 est du même type.*

Th. 2. *Toute fonction $ACGr$ dans R_0 est $ACGr$ dans chaque intervalle contenu dans R.*

Th. 3. *Toute fonction $ACGr$ et Ir dans R_0 est presque partout régulièrement dérivable dans R_0.*

En tenant compte du th. 7, § 5, on obtient le

Th. 4. *Soit F une fonction additive et $IACGr$ dans R. Si $\underline{D}_x F \geqslant 0$ presque partout dans R, on a $F(R) \geqslant 0$.*

En effet, soit E l'ensemble des points x tels que tout voisinage de x contient un intervalle I pour lequel $F(I) < 0$. Cet ensemble est fermé, il contient donc une portion ER autour de laquelle F est $IACr$. Nous avons donc, en vertu du th. 7, §5, $F(R) \geqslant 0$. Comme, il existe un point de E à l'intérieur de R, nous arrivons à une contradiction [3]).

[1]) En admettant que ces ensembles sont fermés, nous avons évité l'hypothèse de continuité de F.

[2]) l. c. I, p. 2048, II, p. 7.

[3]) voir Krzyżański, l. c. II, p. 31.

Par suite nous avons la proposition suivante:

Th. 5. *Si $F(I)$ est additive, $ACGr$ et régulièrement singulière dans R_0, elle est identiquement nulle.*

Il en résulte que deux fonctions additives et $ACGr$ ayant presque partout dans R les mêmes dérivées sont égales.

En se servant de la décomposition de l'intégrale de F, on prouve facilement le

Th. 6. *Toute fonction additive, $ACGr$ et VBr dans R est ACr.*

Th. 7. *Soit F une fonction additive et continue dans R. Si $\overline{D}_x F$ est fini à un ensemble dénombrable près, la fonction F est $SACGr$ et $I'r$.*

Pour le voir, considérons l'ensemble E_n des points x tels que $F(I) \leqslant n|I|$, quel que soit l'intervalle I contenant x de norme $< \frac{1}{n}$. Il est évident que

$$R = D_1 + E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots,$$

D_1 étant un ensemble dénombrable. Nous pouvons supposer que les ensembles E_n sont fermés: dans le cas contraire nous pourrions les remplacer par leurs fermetures, puisque F est continue. Divisons R en un nombre fini d'intervalles R_i de norme $< \frac{1}{n}$ et posons

$$E_{in} = R_i E_n.$$

Il est évident que F est $SACr$ autour de E_{in}, donc $SACGr$ dans R_0.

Soit maintenant H_p l'ensemble des points x tels qu'il existe un intervalle I_p de norme $< \frac{1}{p}$, contenant x et tel que $F(I_p) > -p|I_p|$, p étant un nombre naturel. Comme $\overline{D}_x F > -\infty$ à un ensemble dénombrable près, nous avons

$$R = D_2 + H_1 + H_2 + \dots + H_p + \dots$$

où D_2 est dénombrable.

Posons

$$H_{lnp} = R_l E_n H_p.$$

Lorsque I est contenu dans R_l et ne contient que les points de $R_l - H_p$, nous avons

$$F(I) \leqslant -p\,|I|.$$

Par suite, la fonction $\Phi = F + p\,|I|$ est non positive dans tout intervalle contenu dans $R_l - H_p$. Il en résulte que $\Phi_{H_{lnp}}$ est non croissante par division. Comme elle est de plus continue et VBr [1]) dans R, elle est régulièrement intégrable d'après le th. 3, § 3.

Donc F est régulièrement intégrable autour de H_{lnp} et par suite elle est $I'r$ dans R.

En appliquant le théorème démontré à la fonction $-F$, on en déduit le

Th. 8. *Si les dérivées extrêmes régulières d'une fonction additive et continue sont finies à un ensemble dénombrable près, cette fonction est $ACGr$* et *Ir*.

Les théorèmes 6 et 8 entraînent le th. 7 du §3, dû à M. Banach.

Le th. 7 du § 5 nous permet de démontrer le

Th. 9. *Une fonction $ACGr$ étant régulièrement intégrable autour d'un ensemble fermé E de mesure nulle, la valeur de l'intégrale régulière de cette fonction autour de E est nécessairement nulle.*

Considérons l'ensemble H contenu dans E et composé de points au voisinages desquels il existe un intervalle où l'intégrale de F_E n'est pas nulle. Comme cet ensemble est fermé, il contient une portion HB autour de laquelle F est ACr. En appliquant à l'intégrale de F_E le th. 7, § 5, on voit que cette intégrale s'annule identiquement dans R, ce qui est contradictoire avec la supposition que R contient à l'intérieur un point de H [2]).

[1]) puisque la fonction $F_n(I) = F(I) - n|I|$ est VBr autour de H_{lnp}; en effet, nous avons:

$$|F_n|_{H_{lnp}}(D) = -F_{H_{lnp}}(D) + n\,|D|_{H_{lnp}} \leqslant$$
$$\leqslant -F(R) - p\,[|R| - |D|_{H_{lnp}}] + n\,|D|_{H_{lnp}} \leqslant -F(R) + n|D|_{H_{lnp}}.$$

[2]) ce raisonnement m'a été communiqué par M. Saks.

8. Fonctions à variation bornée généralisée.

Une fonction sera dite *à variation régulière bornée généralisée* ou *$VBGr$ dans R*, lorsque l'intervalle R est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés autour desquels F est VBr et régulièrement intégrable, ou, ce qui revient au même, lorsque tout ensemble fermé contient une portion autour de laquelle F est ACr et régulièrement intégrable.

Ainsi l'oscillation et l'accroissement d'une fonction continue $F(x)$ dans l'intervalle linéaire I sont des fonctions $VBGr$ de I, dès que $F(x)$ est „à variation réductible autour de tout ensemble fermé" suivant l'expression de M. Denjoy [1]) ou VBG d'après la définition de M. Lusin [2]).

Les théorèmes 1, 2 et 3 du § 6 donnent les propriétés suivantes des fonctions $VBGr$:

Th. 1. *Toute fonction $VBGr$ dans R_0 est $VBGr$ dans tout intervalle contenu dans R_0.*

Th. 2. *La somme de deux fonctions $VBGr$ est une fonction $VBGr$.*

Th. 3. *Toute fonction $ACGr$ dans R_0 est $VBGr$ dans cet intervalle.*

Le théorème suivant donne une propriété caractéristique des fonctions continues $ACGr$ qui sont $VBGr$ et Ir.

Th. 4. *Pour qu'une fonction continue, $VBGr$ et Ir dans R_0 soit $ACGr$, il faut et il suffit que tout ensemble fermé de mesure nulle contienne une portion autour de laquelle l'intégrale régulière de F existe et est nulle.*

La *nécessité* de la condition est évidente. En effet, si F est $ACGr$ dans R_0, tout ensemble fermé de mesure nulle contient un segment sur lequel F est ACr, et par suite sur lequel l'intégrale régulière de F, et même de $|F|$, est égale à zéro.

Supposons inversement que F est $VBGr$ et Ir dans R_0 et que tout ensemble fermé de mesure nulle contienne une portion autour de laquelle l'intégrale régulière de F est $=0$. Pour prouver que F est $ACGr$, il suffit évidemment de démontrer qu'elle est ACr autour de chaque ensemble fermé E_0 autour duquel elle est VBr et réguliè-

[1]) l. c., p. 163.

[2]) Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 155, p. 1476.

rement intégrable ou, ce qui revient au même, que son intégrale indéfinie régulière

$$\Phi(R)=\int_{E_0 R} F$$

est ACr dans R_0.

Supposons par impossible que $\Phi(R)$ ne soit pas ACr dans R_0. La fonction $\Phi(R)$ étant continue, additive et VR au sens strict [1]), on peut l'étendre sur tous les ensembles mesurables par rapport à $\Phi(R)$, en particulier sur les ensembles mesurables (B) [2]).

Soit H un ensemble mesurable (B) et de mesure nulle, tel que $\Phi(H)\neq 0$. On peut poser $H=P+Q$, où P et Q sont des ensembles mesurables (B) tels que $\Phi(E)\geqslant 0$ pour tout ensemble mesurable E contenu dans P et $\Phi(E)\leqslant 0$ pour tout ensemble E contenu dans Q [3]). Supposons, pour fixer les idées, que $\Phi(P)>0$. L'ensemble P contient un sous-ensemble fermé P_0 tel que $\Phi(E)>0$ pour toute portion de P_0. Or, la fonction $\Phi(E)$ s'annulant identiquement sur les intervalles disjoints de E_0, il s'en suit que l'ensemble P_0 est contenu dans E_0 et par conséquent est de mesure nulle. Il contient donc une portion autour de laquelle l'intégrale régulière de F s'annule. D'autre part, sur toute portion de l'ensemble P_0, contenu dans E_0, l'intégrale régulière de F coïncide avec la valeur de Φ sur cette portion et par suite est positive. Nous aboutissons ainsi à une contradiction [4]).

Le théorème 9 du § 8 nous donne une condition nécessaire et suffisante:

Th. 5. *Pour qu'une fonction continue Ir et $VBGr$ soit $ACGr$, il faut et il suffit que l'intégrale régulière de cette fonction autour de chaque ensemble fermé de mesure nulle soit nulle quand elle existe.*

Nous allons encore démontrer la proposition suivante:

Th. 6. *Si $F(I)$ est continue additive et tout ensemble de mesure nulle contenu dans R_0 contient une portion autour de laquelle l'intégrale de F est finie, la fonction F est $VBGr$ et Ir dans R* [5]).

[1]) En effet $|\Phi|(S)\leqslant \overline{\int_S}|F_{E_0}|\leqslant \overline{\int_{R_0}}|F_{E_0}|<\infty$, quel que soit le système élémentaire S contenu dans R_0; donc Φ est VB au sens strict.

[2]) voir p. ex. Ch. J. de la Vallée Poussin, Intégrale de Lebesgue, 2-me éd. 1934, p. 88—95, ou S. Saks, l. c., p. 250.

[3]) de la Vallée Poussin, l. c., p. 100; Saks, l. c., p. 249.

[4]) cette démonstration m'a été communiquée par M. Saks.

[5]) voir Denjoy, l. c., p. 163.

En effet, supposons que F ne soit ni $VBGr$ ni Ir dans R_0. Soit E un ensemble fermé contenu dans R_0. Quelle que soit la portion RE, F n'est donc ni VBr ni régulièrement intégrable autour de RE. La fonction F étant additive, nous pouvons déterminer en vertu de la définition des fonctions VBr et du th. 7 du § 4 un système S_1 tel qu'on ait

$$p(S_1)\geqslant\frac{1}{2},\qquad n(S_1)<\frac{1}{n_1},\qquad |F(S_1)|>n_1$$

et que chaque intervalle de S_1 contienne un point de E. La fonction F étant continue, nous pouvons déplacer ce système de manière que chaque intervalle contienne intérieurement un point de E. Soit s_1 un système contenu dans S_1, ayant pour mesure un nombre inférieur à $\frac{1}{n_1}$ et tel que tout intervalle de s_1 contienne intérieurement un point de E. Nous allons, en remplaçant n_1 par $n_2>n_1$ appliquer à chacun de ces intervalles le procédé qui vient d'être appliqué à R_E. Soit S_2 le système ainsi obtenu pour le système s_1. Nous ferons correspondre ainsi à la suite $n_1<n_2<\ldots<n_p\to\infty$ une suite de systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots$ dont les normes et les mesures décroissent vers zéro. Soient: N l'ensemble de mesure nulle des points communs à tous ces ensembles élémentaires S_p, et RN une portion de cet ensemble telle que l'intégrale de F autour de RN soit nulle. Or, lorsque p est suffisamment grand, il existe un intervalle de S_p contenu dans R et contenant un point de N. Il existe donc aussi un système S contenu dans cet intervalle et tel que

$$p(S)\geqslant\frac{1}{2},\qquad n(S)<\frac{1}{n_{p+1}},\qquad |F(S)|>n_{p+1}.$$

Comme p peut être pris assez grand pour qu'on ait $\frac{1}{n_{p+1}}<\delta$ et $n_{p+1}>A$, il est évident que

$$\overline{\int_R} F_N=\infty \qquad \text{ou} \qquad \underline{\int_R} F_N=-\infty.$$

Nous arrivons ainsi à une contradiction [1]).

Le théorème démontré et le th. 4 nous permettent de caractériser les fonctions $ACGr$ de la manière suivante:

[1]) l'idée de ce raisonnement m'a été communiquée par M. Saks.

Th. 7. Pour qu'une fonction F qui est additive et continue soit $ACGr$ et Ir dans R_0, il faut et il suffit que tout ensemble fermé de mesure nulle contenu dans R_0 contienne une portion autour de laquelle l'intégrale de F est nulle [1].

Il résulte aussi du th. 6 qu'*une fonction continue, additive et Ir est $VBGr$ dans R_0.*

9. Intégration des fonctions de point.

Soit $f(x)$ une fonction de point x d'un espace à k dimensions. Nous dirons que la fonction $f(x)$ est *régulièrement intégrable dans R au sens de Denjoy* ou (D), lorsqu'il existe une fonction d'intervalle $F(R)$ continue, additive, $ACGr$, Ir et admettant $f(x)$ pour dérivée régulière presque partout dans R. La fonction F sera appelée *intégrale régulière de Denjoy* ou (D) et sera représentée par le symbole

$$(D)\int_R f\,dx.$$

Dans l'espace linéaire cette intégrale équivaut à l'intégrale spéciale (la totale complète) de Denjoy. Dans l'espace à deux dimensions cette intégrale embrasse celle de M. Krzyżański [2]).

On déduit des propriétés des fonctions $ACGr$ les propriétés suivantes des intégrales (D):

Th. 1. La somme de deux fonctions régulièrement intégrables (D) dans R_0 est elle même régulièrement intégrable (D) dans R_0 et on a

$$(D)\int_R (f_1+f_2)\,dx = (D)\int_R f_1\,dx + (D)\int_R f_2\,dx$$

pour tout R contenu dans R_0.

Th. 2. Si $f(x)$ est régulièrement intégrable (D) dans tous les intervalles formant une division de R, elle est régulièrement intégrable (D) dans R.

Il est clair qu'une fonction sommable est régulièrement intégrable (D), car toute fonction AC est $ACGr$. La réciproque est vraie pour les fonctions semi-bornées. Cela résulte du théorème suivant:

[1]) ou que F soit *complètement résoluble*, voir Denjoy, l. c., p. 173.
[2]) l. c., I et II.

Th. 3. Lorsqu'une fonction régulièrement intégrable (D) dans R est non négative, elle est sommable.

En effet, on a

$$F(R) = (D)\int_R f\,dx \geqslant 0,$$

quel que soit R dans R_0, en vertu du th. 4, § 7; donc F est VBr et, d'après le th. 6, § 7, elle est ACr dans R_0.

En se servant des théorèmes 1 et 3, on prouve le

Th. 4. Si $f(x)$ est régulièrement intégrable (D) et presque partout égale à la limite d'une suite monotone de fonctions $f_n(x)$ régulièrement intégrables (D) dans le même intervalle R, nous avons

$$(D)\int_R f\,dx = \lim_{n\to\infty}(D)\int_R f_n\,dx.$$

L'intégration régulière (D) nous permet de déterminer la primitive régulière d'une fonction $f(x)$. Nous avons en effet en vertu du th. 8 du § 7 le

Th. 5. Toute fonction $f(x)$ presque partout égale à la dérivée régulière d'une fonction $\Phi(R)$, est régulièrement intégrable (D) et

$$\Phi(R) = (D)\int_R f\,dx,$$

quel que soit R dans R_0, dès que les dérivées régulières extrêmes de Φ sont finies à un ensemble dénombrable près.

Pour obtenir une définition constructive de l'intégrale régulière (D), nous allons établir une propriété caractéristique de cette intégrale.

Th. 6. Pour qu'une fonction continue d'intervalle $F(I)$ soit l'intégrale régulière (D) de $F(x)$ dans R_0, il faut et il suffit que tout ensemble fermé E contenu dans R_0 et contenant un point intérieur à R_0 contienne une portion R_1E découpée par un sous-intervalle R_1 de R_0 et telle que:

1⁰ *$f(x)$ soit sommable sur R_1E,*
2⁰ *$F^E(I)$ soit régulièrement intégrable dans R_1,*
3⁰ *on ait dans R_1*

$$F(R) = \int_{RE} f\,dx + \int_R F^E.$$

La condition est *nécessaire*. Soit E un ensemble fermé contenu dans R_0 et contenant un point à l'intérieur de R_0. Comme l'intégrale régulière (D) est une fonction $ACGr$ et Ir, cet ensemble contient une portion R_1E autour de laquelle F est ACr et régulièrement intégrable. La fonction F étant additive, nous avons

$$F(R_1) = F_E(D) + F^E(D),$$

quelle que soit la division D de R_1. Donc la fonction auxiliaire F_E est régulièrement intégrable dans R_1 et nous avons l'égalité

$$F(R) = \int_{RE} F + \int_{R} F^E$$

pour R contenu dans R_1.

D'autre part, F étant ACr autour de RE, nous avons selon le th. 4, § 5

$$\int_{RE} F = \int_{RE} D_x F\, dx = \int_{RE} f\, dx.$$

Par conséquent

$$F(R) = \int_{RE} f\, dx + \int_{R} F^E$$

et la fonction F vérifie la condition demandée.

La condition est *suffisante*. Soit F une fonction satisfaisant à la condition de l'énoncé. Comme, en vertu du th. 7, § 5, l'intégrale régulière de F^E est ACr autour de R_1E et l'intégrale de $f(x)$ sur R_1E est ACr dans R_1, nous voyons que la somme de ces intégrales est ACr autour de R_1E. Elle est de plus régulièrement intégrable autour de E, puisque

$$\int_{RE} \int_{R} F^E = 0$$

d'après le th. 2 du § 4. Ainsi F est $ACGr$ et Ir dans R_0.

Reste à montrer qu'on a $D_xF = f(x)$ presque partout dans R_0.

Soit N l'ensemble des points où cette égalité n'a pas lieu. Si N n'est pas de mesure nulle, i contient un ensemble fermé E de mesure positive. Mais E contient, par hypothèse, une portion R_1E sur laquelle $f(x)$ est sommable et 3° a lieu; par suite $D_xF = f(x)$ en presque chaque point de R_1E. Or, ce n'est pas possible, puisque E est contenu dans N.

La condition établie peut servir de définition de l'intégrale régulière (D) de $f(x)$. Cette définition est analogue à celle de M. Romanovski[1]) dans l'espace linéaire et à celle de M. Krzyżański dans l'espace à deux dimensions[2]).

On peut aussi, en suivant la méthode de M. Saks, définir l'intégrale régulière (D) en tant que la plus faible des opérations intégrales complètes embrassant l'intégrale de Lebesgue[3]). Il suffit pour cela d'admettre qu'une opération intégrale $S(f, I)$ est complète, lorsqu'elle est continue et qu'elle satisfait à la condition suivante: si la fonction $f(x)$ est intégrable (S) sur toute la portion RE d'un ensemble fermé E et sur tout intervalle I contenu dans $R-E$, et si, en outre, la fonction $S^E(f, I)$ est intégrable régulièrement, la fonction $f(x)$ est intégrable (S) dans R et on a

$$S(f, R) = \int_{RE} f\, dx + \int_{R} S^E(f, I).$$

Enfin, on peut obtenir une définition constructive, en se servant des nombres transfinis, de la condition énoncée et de la continuité de l'intégrale.

10. Les intégrales de Perron et de Ridder.

Convenons de dire qu'une fonction $\Phi(I)$ est une *minorante régulière de $f(x)$ dans R_0 au sens de Perron*, lorsque:

1° $\Phi(I)$ est additive et continue dans R_0,

2° $\overline{D}_x\Phi < \infty$ à un ensemble dénombrable près dans R_0,

3° $\overline{D}_x\Phi \leqslant f(x)$ presque partout dans R_0.

On définit de la même manière une fonction *majorante régulière $\Psi(I)$ au sens de Perron*, en se servant des dérivées régulières inférieures. Ces définitions déterminent, dans l'espace linéaire, l'accroissement dans un intervalle I d'une minorante $\Phi(x)$ et d'une majorante $\Psi(x)$ au sens de Perron.

Dans l'espace à plusieurs dimensions ces fonctions ont été définies par M. Saks au moyen des dérivées de M. Banach[4]).

[1]) Essai d'une exposition de l'intégrale de Denjoy sans nombres transfinis, *Fund. Math.* 19 (1932), p. 38.

[2]) l. c., II p. 26.

[3]) S. Saks. Théorie de l'intégrale, p. 209, th. 7.

[4]) l. c., p. 129.

Nous dirons que $\Phi(I)$ est une *minorante régulière* de $f(x)$ dans R au *sens de Ridder*, lorsqu'elle satisfait aux conditions 1^0, 3^0 et à la condition suivante:

2′ $\Phi(I)$ est $SACGr$ dans R.

$\Psi(I)$ sera dite une *majorante régulière au sens de Ridder*, lorsque la fonction opposée $-\Psi$ est une minorante au même sens.

Dans l'espace linéaire ces fonctions sont respectivement les accroissements des fonctions $\varphi_2(x)$ et $\psi_2(x)$ définies par M. Ridder[1]).

On déduit immédiatement du th. 7, § 7 le

Th. 1. *Toute fonction Ψ majorante régulière au sens de Perron est une majorante régulière au sens de Ridder.*

En tenant compte du th. 4 du § 7, on établit aisément la proposition suivante:

Th. 2. *La différence d'une majorante et d'une minorante régulières à un des sens ici définis est une fonction non négative.*

En effet,

$$\underline{D}_x(\Psi-\Phi)\geqslant \underline{D}_x\Psi-\overline{D}_x\Phi\geqslant 0.$$

Or, d'après le th. 1, $\Psi-\Phi$ est une fonction $IACGr$, donc non négative d'après le th. 4 du § 7.

Nous dirons qu'une fonction d'intervalle $F(I)$ est *l'intégrale régulière de Perron* ou (P) d'une fonction $f(x)$ dans R, lorsque $F(R)$ est la valeur commune de la borne supérieure des minorantes et de la borne inférieure des majorantes dans R au sens de Perron. On définit de la même manière *l'intégrale régulière de Ridder* ou (R) au moyen des minorantes et des majorantes de Ridder.

Th. 3. *Toute fonction régulièrement intégrable* (R) *est régulièrement intégrable* (D).

En effet, d'après la définition de l'intégrale régulière (R) dans R_0, on a

$$\Phi(I)\leqslant F(I)\leqslant \Psi(I)$$

quel que soit I dans R_0.

Il est aisé à voir que F est une fonction continue et additive. Nous allons montrer que $D_xF=f(x)$ presque partout dans R_0. Déterminons Φ et Ψ de manière qu'on ait

$$\Psi(R_0)-\Phi(R_0)<\varepsilon^2. \tag{1}$$

[1]) Über Perronschen Integralbegriff, *Math. Zeitschr.* 34 (1934), p. 254.

Soit E_ε l'ensemble des points où $D_x(\Psi-\Phi)>\varepsilon$. Il est évident que

$$\Psi(R_0)-\Phi(R_0)>\varepsilon\,|E_\varepsilon|,$$

donc, en vertu de l'inégalite (1), nous avons $|E_\varepsilon|<\varepsilon$. Par conséquent, on a presque partout dans R_0

$$f(x)-\varepsilon\leqslant D_xF\leqslant f(x)+\varepsilon,$$

donc, E étant un nombre positif arbitraire, $D_xF=f(x)$ presque partout dans R_0. Enfin, F est $ACGr$ et Ir, puisque $0\leqslant\dfrac{\Psi(S)-F(S)}{F(S)-\Phi(S)}\leqslant$ $\leqslant\Psi(S)-\Phi(S)<\varepsilon^2$.

Il est aisé de prouver le théorème suivant, réciproque au précédent:

Th. 4. *Toute fonction régulièrement intégrable* (D) *est régulièrement intégrable* (R).

En effet, l'intégrale régulière (D) est en même temps une minorante et une majorante au sens de Ridder; elle est donc la plus grande des minorantes et la plus petite des majorantes.

Ainsi les intégrales régulières (D) et (R) sont équivalentes.

Th. 5. *Toute fonction régulièrement intégrable* (P) *est régulièrement intégrable* (D).

C'est une extension du théorème de MM. Aleksandroff et Looman[1]) aux fonctions de plusieurs variables. Nous ne savons pas si ce théorème admet une réciproque qui serait l'extension du théorème de M. Hake[2]).

Pour démontrer le th. 5, il suffit de remarquer que l'intégrale régulière (P) est presque partout régulièrement dérivable. Etant ACr autour d'une portion de chaque ensemble fermé (d'après la démonstration du th. 7, § 7), elle y est, en effet, régulièrement intégrable en vertu du th. 4 du § 5.

[1]) P. Aleksandroff, Ueber die Aequivalenz des Perronschen u. Denjoyschen Integralbegriffen. *Math. Zeitschr.* 20 (1924), p. 213—4. H. Looman, Ueber die Perronsche Integraldefinition. *Math. Annalen.* 93 (1925), p. 153—6.

[2]) Ueber de la Vallée Poussin Ober- u. Unterfunktionen einfacher Integrale u. Integraldefinition von Perron. *Math. Annalen* 83 (1921), p. 119—42.