Sur les fonctions continues dans des espaces topologiques.

Par

N. Vedenissoff (Moscou).

Nous allons nous occuper des fonctions définies dans tous les points x d'un espace topologique [1]) R, continues dans tous ces points et prenant des valeurs réelles. Nous les appellons dans la suite tout court „fonctions continues". M. Fréchet a attiré l'attention sur l'intérêt de définir la classe des espaces dans lesquels il existe des fonctions continues non constantes. Urysohn [2]) a fait un progrès considérable dans cette direction, en démontrant un théorème qui peut être énoncé comme il suit:

Pour qu'à tout couple d'ensembles fermés disjoints F, Φ d'un espace topologique R corresponde une fonction continue $f(x)$, égale à 0 sur F et à 1 sur Φ, et vérifiant dans tous les points de R l'inégalité

$$0 \leqq f(x) \leqq 1,$$

il faut et il suffit que R soit un espace normal.

Il est facile de voir que, dans ces conditions, on ne peut pas affirmer l'existence d'une fonction continue $f(x)$ égale à 0 *sur F et seulement sur F* et à 1 *sur Φ et seulement sur Φ*, autrement dit telle que l'on ait:

$$F = \underset{x}{\mathrm{E}}[f=0], \qquad \Phi = \underset{x}{\mathrm{E}}[f=1].$$

[1]) Pour la terminologie voir Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer, 1935.

[2]) Voir par exemple, Alexandroff-Hopf, l. c. Ch. I, § 5, 6.

Exemple. R est l'ensemble de tous les nombres transfinis non supérieurs à Ω, $F=\{0\}$, $\Phi=\{\Omega\}$.

Le but de l'article présent est de donner une condition pour l'existence d'une telle fonction.

Théorème. *Pour qu'à tout couple d'ensembles fermés disjoints F, Φ d'un espace topologique R corresponde une fonction continue $f(x)$ telle que*

$$F = \underset{x}{\mathrm{E}}[f=0], \qquad \Phi = \underset{x}{\mathrm{E}}[f=1],$$

il faut et il suffit que R soit parfaitement normal [3]).

La condition est nécessaire. En effet, R est normal en vertu du théorème cité d'Urysohn; montrons que tout ensemble fermé de l'espace R est un G_δ [3]). Soient: F un ensemble fermé, Φ un ensemble fermé quelconque sans points communs avec F (par exemple l'ensemble vide) et $f(x)$ une fonction continue telle que $F=\underset{x}{\mathrm{E}}[f=0]$, $\Phi=\underset{x}{\mathrm{E}}[f=1]$. Alors les ensembles $G_n=\underset{x}{\mathrm{E}}\left[|f|<\frac{1}{n}\right]$ sont évidemment ouverts et leur intersection est précisément F:

$$F = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n \cdot \ldots,$$

puisqu'on a aux points de cette intersection $|f(x)|<\frac{1}{n}$, quel que soit n. Donc $|f(x)|=0$ et la nécessité est démontrée.

La suffisance de notre condition sera déduite du suivant

Lemme. *Soient A et B deux ensembles fermés disjoints d'un espace parfaitement normal R. Il existe une fonction continue $g(x)$ égale à 1 sur B, vérifiant dans tout l'espace R l'inégalité*

(1) $$0 \leqq g(x) \leqq 1$$

et telle que $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[g=0]$.

[3]) Voir pour la définition E. Čech, Bull. Intern. de l'Acad. des Sciences de Bohême 1932. Un espace est *parfaitement normal*, s'il est normal et si tout ensemble ouvert de cet espace est un F_σ. Cette dernière condition équivaut évidemment à ce que tout ensemble fermé y soit un G_δ (voir aussi l'étude des espaces topologiques possédant la propriété $G=F_\sigma$) dans le *Mémoire sur les espaces compacts* de Alexandroff-Urysohn, Verh. Kon. Akad. Amsterdam XIII, 1928—29).

Remarque. Il est évident que les nombres 0 et 1 peuvent être remplacés dans cet énoncé par deux nombres quelconques a et $b \neq a$.

Démonstration du lemme. R étant parfaitement normal, on a

$$A = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n \cdot \ldots \tag{2}$$

où les ensembles G_n sont ouverts. On peut supposer en outre qu'ils n'ont pas de points communs avec B (en remplaçant G_n par $G_n \cdot (R-B)$ dans le cas contraire). Selon le théorème d'Urysohn, il existe pour tout n une fonction continue $g_n(x)$ telle que:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= 0 && \text{sur } A, \\ g_n(x) &= 1 && \text{sur } B_n = R - G_n, \\ 0 \leqq g_n(x) &\leqq 1 && \text{sur } R. \end{aligned}$$

La série

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x) \tag{3}$$

étant uniformément convergente, la fonction $g(x)$ est continue, définie sur tout l'espace R et vérifie dans tous les points de R l'inégalité (1). Nous avons $B \subset B_n$ pour tout n; pour $x \in B$ on a donc $g_n(x)=1$ et $g(x)=\sum_n \frac{1}{2^n}=1$. Pour $x \in A \subset G_n$ $(n=1,2,\ldots)$ on a $g_n(x)=0$, donc $g(x)=0$, d'où $A \subset \underset{x}{\mathrm{E}}[g=0]$. Pour démontrer l'inclusion inverse $A \supset \underset{x}{\mathrm{E}}[g=0]$, observons que si $x \operatorname{non} \in A$, on a pour un certain indice n, en vertu de (2), $x \operatorname{non} \in G_n$ et $x \in B_n$, donc $g_n(x)=1$. Les termes de la série (3) étant non négatifs, il s'en suit que $g(x) \geqq \frac{1}{2^n}$, d'où $x \operatorname{non} \in \underset{x}{\mathrm{E}}[g=0]$, c. q. f. d.

La démonstration du théorème s'achève comme il suit. Soient F, Φ deux ensembles fermés disjoints et $g(x)$ la fonction donnée par l'application du lemme aux ensembles $A=F$ et $B=\Phi$ (avec $a=0$ et $b=1$). Posons:

$$G=\underset{x}{\mathrm{E}}[g<\tfrac{1}{2}], \quad \Gamma=\underset{x}{\mathrm{E}}[g>\tfrac{1}{2}], \quad F^*=\underset{x}{\mathrm{E}}[g=\tfrac{1}{2}] \quad \text{et} \quad F^{**}=G+F^*.$$

On a

$$R=F^{**}+\Gamma=G+F^*+\Gamma, \qquad F^{**}\cdot\Phi=0.$$

En appliquant le lemme au cas $A=\Phi$, $B=F^{**}$, avec $a=1$ et $b=\frac{1}{2}$, on obtient une fonction continue $g^*(x)$ telle que $g^*(x)=\frac{1}{2}$ sur F^*, $\frac{1}{2} \leqq g^*(x) \leqq 1$ dans tous les points de R et $\Phi=\underset{x}{\mathrm{E}}[g^*=1]$. Définissons la fonction $f(x)$ par les conditions:

$$f(x)=g(x) \quad \text{sur } F^{**}, \qquad f(x)=g^*(x) \quad \text{sur } \Gamma.$$

On a évidemment

$$F=\underset{x}{\mathrm{E}}[f=0] \qquad \text{et} \qquad \Phi=\underset{x}{\mathrm{E}}[f=1].$$

Il nous reste à prouver la continuité de $f(x)$. Or, aux points des ensembles ouverts G, Γ elle est une conséquence immédiate de la coïncidence sur ces ensembles des valeurs de $f(x)$ avec celles des fonctions continues $g(x)$ et $g^*(x)$ respectivement. D'autre part, pour tout point $x \in F^*$, on a $g(x)=g^*(x)=\frac{1}{2}$. Les fonctions $g(x)$ et $g^*(x)$ étant continues, on peut donc trouver pour tout $\varepsilon>0$ des voisinages $U_1(x)$ et $U_2(x)$ tels que l'on ait $|g(y)-\frac{1}{2}|<\varepsilon$ pour $y \in U_1(x)$ et $|g^*(y)-\frac{1}{2}|<\varepsilon$ pour $y \in U_2(x)$. Il s'en suit que l'on aura pour tout $y \in U(x)=U_1(x)\cdot U_2(x)$ l'inégalité $|f(y)-\frac{1}{2}|<\varepsilon$, ce qui prouve la continuité au point x. Le théorème est ainsi démontré.

On peut aussi se demander quelles sont les conditions pour que tout ensemble fermé F de l'espace R puisse être mis sous la forme

$$F=\underset{x}{\mathrm{E}}[f=0],$$

la fonction f étant continue. Pour les espaces *compacts*, la réponse est immédiate:

Pour qu'à tout ensemble fermé F d'un espace topologique compact R corresponde une fonction continue telle que l'on ait

$$F=\underset{x}{\mathrm{E}}[f=0],$$

il faut et il suffit que R soit parfaitement normal.

La suffisance de cette condition est contenue dans le lemme. Pour en montrer la nécessité, admetons que $F=\underset{x}{\mathrm{E}}[f=0]$, la fonction f étant continue. Soit Φ un ensemble fermé dans R sans points communs avec F. L'ensemble Φ étant donc compact en soi, la fonction continue $|f|$ y atteint son minimum $\mu>0$.

Les ensembles

$$G=\mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[|f|<\frac{\mu}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \Gamma=\mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[|f|>\frac{\mu}{2}\right]$$

sont ouverts, disjoints et on a: $F\subset G$ et $\Phi\subset\Gamma$. Donc R est normal. Le fait que dans l'espace R tout ensemble ouvert est un F_σ se démontre comme tout à l'heure.

Enfin, pour les espaces *bicompacts*, on a l'énoncé suivant:

Pour qu'à tout ensemble fermé F d'un espace de Hausdorff bicompact corresponde une fonction continue $f(x)$ telle que l'on ait

$$F=\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f=0],$$

il faut et il suffit que tout ensemble ouvert de R soit un F_σ.

Sur le plongement des espaces dans les rétractes absolus.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

M. C. Kuratowski a démontré[1]) qu'étant donnée une fonction continue $y=f(x)$ définie dans un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable X, on peut prolonger cette fonction d'une manière continue sur l'espace X tout entier, en ajoutant à l'espace Y (espace des y) un polytope infini[2]) P (satisfaisant en outre à la condition $\dim P\leqslant\dim(X-A)$). Dans cet ordre d'idées, je vais démontrer dans cette Note que dans le cas où l'espace Y est compact, il existe un polytope infini P tel que l'ensemble $Y+P$ est un rétracte absolu. Par conséquent, l'existence du prolongement mentionné est assurée pour tous les A, X et f simultanément.

Lemme. *A_1 et A_2 étant des sous-polyèdres disjoints d'un polyèdre A et L désignant l'intervalle $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, il existe une fonction $f(x,t)$ de la forme $f(x,t)=(x,\theta(x,t))$ qui rétracte le polyèdre $A\times L$[3]) en sous-polyèdre de façon qu'on ait:*

$$f(x_0,t)\equiv(x_0,0) \qquad \textit{pour tout} \quad x_0\in A_1,$$
$$f(x_0,t)\equiv(x_0,t) \qquad \textit{pour tout} \quad x_0\in A_2.$$

---

[1]) Fund. Math. 24 (1935), p. 259.

[2]) Un polytope infini est un ensemble P qui admet une *décomposition simpliciale*, c. à d. une décomposition de la forme $P=\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i$ où Δ_i sont des simplexes géométriques assujettis aux conditions: 1) $\Delta_i\cdot\Delta_j$ est une face (de dimension $\geqslant -1$) de Δ_i et Δ_j; 2) aucun point de P n'est un point d'accumulation d'une suite de points appartenant à des différents termes de la suite $\{\Delta_i\}$. Comp. C. Kuratowski, l. c., p. 258.

[3]) $A\times L$ désigne le produit cartésien des espaces A et L.