Sur l'ensemble des valeurs asymptotiques d'une fonction méromorphe dans le cercle-unité.

Par

Stanisław Kierst (Warszawa).

M. Mazurkiewicz a démontré[1]) que l'ensemble des points singuliers[2]) d'une fonction analytique est un ensemble analytique (au sens de M. Lusin). En appliquant un raisonnement analogue à celui de M. Mazurkiewicz, on montre que l'ensemble des valeurs asymptotiques d'une transformation intérieure[3]) arbitraire est également un ensemble analytique[4]). Dans la Note présente, je démontre que, *pour tout ensemble analytique plan E, il existe une transformation intérieure d'un domaine plan fixe en plan entier telle que E en est l'ensemble des valeurs asymptotiques.* En m'appuyant sur les résultats de M. Stoïlow, je déduis de là le théorème suivant[5]):

Il existe pour tout ensemble analytique plan E une fonction méromorphe dans le cercle-unité de laquelle E est l'ensemble des valeurs asymptotiques.

1) S. Mazurkiewicz, *Sur les points singuliers d'une fonction analytique*, Fund. Math. XVII, pp. 26—29.

2) au sens de L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Band I, 3 Aufl. (1930), pp. 215—217.

3) S. Stoïlow, *Les propriétés topologiques des fonctions analytiques*, Annales de l'Institut Henri Poincaré 2 (1932), pp. 233—266. On appelle *intérieure* chaque transformation qui transforme les ensembles ouverts en ensembles ouverts et les continus en continus. Les fonctions analytiques sont des transformations intérieures. On appelle un nombre a (fini ou non) *valeur asymptotique* d'une transformation intérieure d'un domaine B, lorsqu'il existe dans B un rayon topologique (c. à. d. image homéomorphe d'une demi-droite) fermé dans B et sur lequel cette transformation tend vers a.

4) La démonstration n'est qu'une modification facile de celle de M. Mazurkiewicz, citée au renvoi 1). Il suffit d'y remplacer la fonction qui fait correspondre à un élément du champ de Riemann son centre sur le plan par une transformation intérieure arbitraire d'une surface arbitraire en un domaine plan. La relation entre les valeurs asymptotiques et les points singuliers d'une fonction analytique consiste en ce que tout point singulier non algébrique est une valeur asymptotique de la fonction inverse. L'ensemble des points singuliers algébriques est au plus dénombrable.

I.

1. Soient S le plan complété par le point à l'infini[6]) et E un ensemble analytique plan non vide arbitraire. En vertu du théorème de MM. Lusin et Sierpiński[7]), il existe une fonction complexe $f(x)$ de variable réelle définie dans l'intervalle $I=(0<x\leqq 1)$, continue partout du côté gauche et pour laquelle $f(I)=E$. Faisons correspondre à chaque système d'indices $i_1, i_2, \dots, i_n$, où $i_j=0, 1$, un segment rectiligne $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ situé dans S et ne contenant pas de point à l'infini. Désignons ses extrémités par $z'_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ et $z''_{i_1,i_2,\dots,i_n}$. Admettons que le système des segments $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ satisfait aux conditions suivantes:

(1) $\Delta_0 \Delta_1 = 0$,

(2) les segments $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$, $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n,0}$ et $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n,1}$ sont disjoints deux à deux pour chaque système $i_1, i_2, \dots, i_n$,

$$\lim_{n=\infty} \delta\left[f\left(\frac{i_1}{1}+\frac{i_2}{2^2}+\dots+\frac{i_n}{2^n}\right)+\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}\right]=0. \tag{3}$$

L'existence d'un tel système de segments est évidente. Entourons chaque segment $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ d'une ellipse $E_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ aux foyers situés dans les points $z'_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ et $z''_{i_1,i_2,\dots,i_n}$. Soit $D_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ le domaine fini, fermé et borné par l'ellipse $E_{i_1,i_2,\dots,i_n}$. Admettons que le rapport $\lambda_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ entre le petit axe et le grand axe de $E_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ soit assez petit pour que les conditions suivantes se trouvent remplies:

5) Ce théorème est en liaison avec des théorèmes de M. Urysohn et M. Poprougénko, contenus dans les ouvrages: P. Urysohn, *Exemple d'une série entière prenant sur son cercle de convergence un ensemble de valeurs non mésurable B*, C. R. (1925), p. 548 et G. Poprougénko, *Sur l'analycité des ensembles (A)*, Fund. Math. XVIII (1932), pp. 77—84, *Le principe de Dirichlet et les ensembles (A)*, Math. Zeitschr. 38 (1934), pp. 146—154.

6) c. à. d. le plan S métrisé d'une façon dite *complète*. Par la *distance* entre deux points, on comprend ici la distance entre leur projections stéréographiques. Le point à l'infini correspond au pôle nord de la sphère. Dans tout ce que suit, nous entendons par *plan* le plan S et par *ensemble plan* un sous-ensemble de S.

7) W. Sierpiński, *Introduction to general Topology*, Toronto 1934, p. 151, th. 77.

(1′) $D_0 D_1 = 0$,

(2′) les domaines $D_{i_1,i_2,\dots,i_n}$, $D_{i_1,i_2,\dots,i_n,0}$ et $D_{i_1,i_2,\dots,i_n,1}$ sont disjoints deux à deux pour chaque système $i_1, i_2, \dots, i_n$,

(3′) $\lim\limits_{n=\infty} \delta\left[f\left(\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2}+\dots+\frac{i_n}{2^n}\right)+D_{i_1,i_2,\dots,i_n}\right]=0.$

Définissons maintenant le domaine fixe B. Soit C l'ensemble des points x de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ de l'axe réel de la forme

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2(2i_j+1)}{9^j} \quad \text{où } i_j=0,1.$$

L'ensemble C est un discontinu dyadique. Posons $B=S-C$. L'ensemble B est donc un domaine et l'ensemble C en constitue la frontière.

Nous allons définir à présent des domaines et des fonctions auxiliaires. Posons à ce but pour $n=1, 2, \dots$ et pour chaque système $i_1, i_2, \dots, i_n$:

$$\varrho_n=\frac{1}{2\cdot 9^n},$$

$$\xi_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\varrho_n+\sum_{j=1}^{n}\frac{2(2^j+1)}{9^j},$$

$$C^0_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z-\xi_{i_1,i_2,\dots,i_n}|=\varrho_n\right], \qquad C^1_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z-\xi_{i_1,i_2,\dots,i_n}|=3\varrho_n\right],$$

$$Q=\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z-\xi_0|\geqq 3\varrho_1\right]\cdot\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z-\xi_1|\geqq 3\varrho_1\right],$$

$$P_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[\varrho_n\leqq|z-\xi_{i_1,i_2,\dots,i_n}|\leqq 3\varrho_n\right],$$

$$Q_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z_{i_1,i_2,\dots,i_n}|\leqq\varrho_n\right]\cdot\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z-\xi_{i_1,i_2,\dots,i_n,0}|\geqq 3\varrho_{n+1}\right]\cdot\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z-\xi_{i_1,i_2,\dots,i_n}|\geqq 3\varrho_{n+1}\right],$$

$$G=\overline{S-(D_0+D_1)},$$

$$G_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\overline{S-(D_{i_1,i_2,\dots,i_n}+D_{i_1,i_2,\dots,i_n,0}+D_{i_1,i_2,\dots,i_n,1})},$$

$$r_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\sqrt{\frac{1+\lambda_{i_1,i_2,\dots,i_n}}{1-\lambda_{i_1,i_2,\dots,i_n}}},$$

$$P^*_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[1/r_{i_1,i_2,\dots,i_n}\leqq|z|\leqq r_{i_1,i_2,\dots,i_n}\right],$$

$$\overset{*}{C}{}^0_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z|=1/r_{i_1,i_2,\dots,i_n}\right], \qquad \overset{*}{C}{}^1_{i_1,i_2,\dots,i_n}=\mathop{\mathrm{E}}_{z}\left[|z|=r_{i_1,i_2,\dots,i_n}\right].$$

Les ensembles Q et G sont des domaines fermés, doublement connexes, contenant à l'intérieur le point à l'infini. Pour le domaine G cela résulte de (1′). Chaque ensemble $P_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ est un domaine fermé, doublement connexe et borné. Chaque ensemble $Q_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ est un domaine fermé, triplement connexe et borné. Chaque ensemble $G_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ est un domaine fermé, triplement connexe, contenant à l'intérieur le point à l'infini; cela résulte de (2′). On a:

$$P_k Q=C^1_k, \qquad D_k G=E_k,$$

$$P_{i_1,i_2,\dots,i_n}Q_{i_1,i_2,\dots,i_n}=C^0_{i_1,i_2,\dots,i_n}, \qquad D_{i_1,i_2,\dots,i_n}G_{i_1,i_2,\dots,i_n}=E_{i_1,i_2,\dots,i_n},$$

$$P_{i_1,i_2,\dots,i_n k}Q_{i_1,i_2,\dots,i_n}=C^1_{i_1,i_2,\dots,i_n k}, \qquad D_{i_1,i_2,\dots,i_n k}G_{i_1,i_2,\dots,i_n}=E_{i_1,i_2,\dots,i_n k},$$

$$B=Q+\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n}P_{i_1,i_2,\dots,i_n}+\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n}Q_{i_1,i_2,\dots,i_n}.$$

Posons enfin:

$$\varphi_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z)=\frac{z'_{i_1,i_2,\dots,i_n}-z''_{i_1,i_2,\dots,i_n}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{z'_{i_1,i_2,\dots,i_n}+z''_{i_1,i_2,\dots,i_n}}{2}.$$

La fonction $\varphi(z)$ transforme l'anneau $P^*_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ en le domaine $D_{i_1,i_2,\dots,i_n}$. Cette transformation est une homéomorphie sur chaque circonférence $\overset{*}{C}{}^k_{i_1,i_2,\dots,i_n}$. Elle transforme $\overset{*}{C}{}^0_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ en l'ellipse $E_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ en conservant le sens de parcours, et la circonférence $\overset{*}{C}{}^1_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ en l'ellipse $E_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ avec le sens de parcours renversé. Cela résulte des propriétés de la fonction $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

2. Ces préliminaires étant faits, nous allons définir la transformation intérieure dans le domaine B, à savoir successivement dans les domaines Q, $P_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ et $Q_{i_1,i_2,\dots,i_n}$.

Soit $\psi_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z)$ une transformation homéomorphe du domaine B en l'anneau $P^*_{i_1,i_2,\dots,i_n}$, transformant la circonférence $C^k_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ en la circonférence $\overset{*}{C}{}^k_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ $(k=0,1)$ avec le même sens du parcours. La fonction

$$p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z)=\varphi_{i_1,i_2,\dots,i_n}(\psi_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z))$$

est alors une transformation intérieure de l'intérieur du domaine $D_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ et elle est une homéomorphie sur les circonférences $C^k_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ $(k=0,1)$, qu'elle transforme en l'ellipse $E_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ avec le signe de parcours égal ou opposé, suivant que $k=1$ ou $k=0$. Cela résulte des propriétés des fonctions $\varphi_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ et $\psi_{i_1,i_2,\dots,i_n}$.

Soit ensuite $q(z)$ une transformation homéomorphe du domaine Q en le domaine G assujettie aux conditions:

$$q(z) = p_0(z) \qquad \text{pour} \quad z \in C_0^1,$$
$$q(z) = p_1(z) \qquad \text{pour} \quad z \in C_1^1.$$

Soit enfin $q_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z)$ une transformation homéomorphe du domaine $Q_{i_1,i_1,\dots,i_n}$ en le domaine $G_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ assujettie pour $n>1$ aux conditions:

$$q_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z) = p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z) \qquad \text{pour} \quad z \in C^0_{i_1,i_2,\dots,i_n},$$
$$q_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z) = p_{i_1,i_2,\dots,i_n k}(z) \qquad \text{pour} \quad z \in C^1_{i_1,i_2,\dots,i_n k} \qquad (k=0,1).$$

L'existence des fonctions $q_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z)$ résulte des propriétés des fonctions $p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z)$.

En posant:

$$J(z) = p(z) \qquad \text{pour} \quad z \in P,$$
$$J(z) = p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z) \qquad \text{pour} \quad z \in P_{i_1,i_2,\dots,i_n},$$
$$J(z) = q_{i_1,i_2,\dots,i_n}(z) \qquad \text{pour} \quad z \in Q_{i_1,i_2,\dots,i_n},$$

nous obtenons la transformation demandée. Cette transformation est intérieure par ce qu'elle est localement homéomorphe dans les points appartenant aux frontières communes des domaines Q, $P_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ et $Q_{i_1,i_2,\dots,i_n}$.

3. Nous allons montrer que l'ensemble des valeurs asymptotiques $A(J)$ de la transformation $J(z)$ coïncide avec E.

Soit

$$z_0 = f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{i_j^0}{2^j}\right) \qquad \text{où} \quad i_j^0 = 0, 1$$

un point quelconque de E. Désignons par δ_n le plus court segment contenu dans $G_{i_1^0,i_2^0,\dots,i_n^0}$ et joignant l'ellipse $E_{i_1^0,i_2^0,\dots,i_n^0}$ à l'ellipse $E_{i_1^0,i_2^0,\dots,i_n^0,i_{n+1}^0}$. Posons $\sigma_n' = \overset{-1}{q}_{i_0^1,i_2^0,\dots,i_n^0}(\delta_n)$ et désignons par σ_n'' un arc simple arbitraire, situé dans l'anneau $P_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ et parcourant entre les extrémités es arcs simples σ_n' et σ_{n+1}'. L'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_n' + \sigma_n'')$ est un arc simple contenu dans B et dont une extrémité se trouve dans l'ensemble C. Il résulte de la définition des ellipses $E_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ (condition 3') et de la continuité du côté gauche de la fonction $f(x)$ que la fonction $J(z)$ tend sur cet arc vers z_0. L'inclusion $A(J) \supset E$ est donc établie.

Soit maintenant T un rayon topologique quelconque contenu dans B et fermé dans B. Chaque rayon topologique possédant ces propriétés devient arc simple, lorsqu'on le complète par un point ζ_0 appartenant à l'ensemble C, car la frontière C du domaine B est un ensemble ponctiforme. Considérons le développement

$$\zeta_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(2i_j^0+1)}{9^j} \qquad i_j^0 = 0, 1.$$

Pour $n>N$, l'arc simple T contient un point z_n^0 du domaine $P_{i_1^0,i_2^0,\dots,i_n^0}$ et nous avons $J(z_n^0) \in D_{i_1^0,i_2^0,\dots,i_n^0}$. Par conséquent, si la limite de la transformation $J(z)$ existe sur l'arc T, elle est égale à $f\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{i_j^0}{2^j}\right)$ et appartient à E. Nous sommes parvenus ainsi à l'inclusion inverse $A(J) \subset E$. Donc $A(J) = E$.

4. Le théorème subsiste dans le cas $E=0$. Les fonctions elliptiques doublement périodiques sont des fonctions méromorphes dans tout le plan et dépourvues de valeurs asymptotiques [8]). Il existe [9]) aussi des fonctions méromorphes dans le cercle-unité possédant cette singularité.

II.

5. Pour passer du théorème démontré au théorème concernant les fonctions analytiques, rappelons quelques notions et théorèmes de la théorie de l'uniformisation. Nous les énonçons ici dans une forme adaptée aux résultats de M. Stoïlow.

On appelle *variété à deux dimensions* un espace topologique localement homéomorphe avec le plan. Une variété à deux dimensions séparable et connexe est dite *surface* [10]). On sait que chaque surface F possède une universelle „Überlagerungsfläche" [11]). Cela veut dire que, pour chaque surface F, il existe une transformation φ d'une surface simplement connexe $\tilde{F}$ en F jouissant des propriétés suivantes:

---

[8]) M. Gross a construit une fonction méromorphe dans tout le plan et qui transforme chaque rayon topologique tendant vers l'infini en un ensemble dense dans le plan. Cf. W. Gross, *Über die Singularitäten analytischer Funktionen*, Monatshefte für Math. u. Phys. 29 (1918), pp. 3—47.

[9]) S. Kierst et E. Szpilrajn, *Sur certaines singularités des fonctions analytiqes uniformes*, Fund. Math. XXI (1933), pp. 276—294.

[10]) Cf. T. Radó, *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Szeged II (1924—26), pp. 101—121.

[11]) H. Weyl, *Die Idee Riemannschen Fläche.*

(a) φ est une transformation localement homéomorphe,

(b) pour tout point $p \epsilon F$, pour tout arc simple A contenant p et contenu dans F et pour tout point $\tilde{p} \epsilon \tilde{F}$ tel que $\tilde{p} = \varphi(p)$, il existe un arc simple $\tilde{A}$ contenant $\tilde{p}$, contenu dans $\tilde{F}$ et tel que $\varphi(\tilde{A}) = A$.

On peut évidemment supposer que $\tilde{F}$ est un domaine simplement connexe plan. On sait que $\tilde{F}$ est la surface d'une sphère topologique, lorsque F en est une, et réciproquement. Dans l'introduction du Mémoire cité de M. Stoïlow, il se trouve un théorème qui peut être considéré comme l'énoncé du théorème de Poincaré et Koebe sur la représentation conforme d'une surface de Riemann simplement connexe. Le voici:

Pour toute transformation intérieure $J(z)$ d'un domaine arbitraire B plan et simplement connexe en un domaine plan, il existe une transformation homéomorphe $h(z)$ de tout le plan, ou bien du plan sans le point à l'infini, ou bien du cercle-unité en B telle que la fonction $J(h(z))$ est méromorphe.

Soient à présent: $J(p)$ une transformation intérieure d'une surface F arbitraire en un domaine plan, $\tilde{F}$ sa „Überlagerungsfläche" universelle et φ la transformation correspondante de $\tilde{F}$ en F. Alors la transformation $J(\varphi(z))$ est aussi une transformation intérieure, puisque φ est une transformation localement homéomorphe. Le théorème de M. Stoïlow nous fournit une transformation homéomorphe $h(z)$ pour laquelle la fonction $J(\varphi(h(z)))$ est méromorphe dans un des trois domaines canoniques. La fonction $\varphi(h(z))$ possède évidemment les propriétés (a) et (b). Nous obtenons donc un théorème qui peut être considéré comme un énoncé du théorème de Poincaré et Koebe sur l'uniformisation, à savoir:

Pour toute transformation intérieure $J(p)$ d'une surface F arbitraire en un domaine plan, il existe une transformation $\varphi(z)$ en F de tout le plan, ou bien du plan sans le point à l'infini, ou bien du cercle-unité, possédant les propriétés (a) *et* (b) *et pour laquelle la fonction $J(\varphi(z))$ est méromorphe.*

6. Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant:

Il existe pour tout ensemble analytique plan E une fonction méromorphe dans le cercle unité et dont l'ensemble des valeurs asymptotiques coïncide avec E.

Dans le cas de $E = 0$, le théorème est vrai en vertu du nº **4.**

MM. Lusin et Privaloff ont construit[12]) une fonction $g_1(z)$ holomorphe dans le cercle-unité et qui possède une seule valeur asymptotique: ∞. Soit $\mu(z)$ la fonction modulaire dans le cercle-unité; la fonction $g_2(z) = \mu(z)[\mu(z) - 1]$ possède alors deux valeurs asymptotiques: 0 et ∞, et les transformations linéaires des fonctions $g_1(z)$ et $g_2(z)$ nous fournissent des fonctions possédant une ou deux valeurs asymptotiques arbitrairement données à l'avance.

[12]) N. Lusin et J. Privaloff, *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques*, Ann. de l'Ecole Norm. Sup. (3) 42 (1935), pp. 143—191, en particulier p. 147.

Admettons donc que l'ensemble E contient trois point a, b, c au moins. Appliquons le théorème sur l'uniformisation établi au nº **5** à la transformation $J(z)$ qui a été définie au nº **2.** Il résulte des propriétés (a) et (b) de la fonction $\varphi(z)$ que l'ensemble des valeurs asymptotiques de la fonction méromorphe $f(z) = J(\varphi(z))$ coïncide avec celui des valeurs asymptotiques de la transformation $J(z)$, donc, en vertu du nº **3**, avec E.

Modifions maintenant le domaine B et la transformation $J(z)$ de manière que la fonction correspondante devienne méromorphe, toujours dans le cercle-unité, et que l'ensemble de ses valeurs asymptotiques soit conservé le-même. Enlevons notamment du domaine B l'ensemble des points dans lesquels se présente une des trois égalités: $J(z) = a$, $J(z) = b$, $J(z) = c$. L'ensemble enlevé est isolé dans B. Nous obtenons donc un domaine B_1. En posant $J_1(z) = J(z)$ pour $z \epsilon B_1$, nous parvenons à la transformation intérieure cherchée. L'ensemble des valeurs asymptotiques de cette transformation, et par conséquent l'ensemble des valeurs asymptotiques de la fonction correspondante $f_1(z)$, est en effet identique à E, car l'ensemble $B - B_1$ est isolé dans B. Evidemment la fonction $f_1(z)$ n'est pas rationnelle. Elle est méromorphe dans le cercle-unité par ce que le cas du plan sans le point à l'infini est exclu en vertu du théorème de Picard.

En posant $a = \infty$, nous obtenons le corrollaire suivant:

Pour tout ensemble E analytique dans le plan euclidien, il existe une fonction holomorphe dans le cercle-unité et dont l'ensemble des valeurs asymptotiques finies coïncide avec E.