Supplément

(Correction à mon article „Transformations continues en circonférence et la topologie du plan“ [53])).

Le groupe $\mathfrak{B}_1(X)$, introduit p. 89, n'est pas nécessairement libre. Comme l'a remarqué M. J. Schreier, il y en est démontre seulement que ce groupe ne contient pas d'éléments d'ordre fini, ce qui ne suffit notoirement pas pour qu'un groupe soit libre. En particulier, il en est aussi de-même du groupe $\mathfrak{B}_1(X)$ en question, qui peut ne pas être libre, p. ex. lorsque X est un solénoide de van Dantzig [54]).

En conséquence, la définition du nombre $b_1(X)$ comme nombre d'éléments de la base du groupe $\mathfrak{B}_1(X)$, donnée également p. 89, est inexacte: la base peut notamment être en défaut. La définition exacte se trouve p. 221 de l'ouvrage de K. Borsuk et S. Eilenberg „*Über Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*“ [55]) et p. 157 de mon article présent „*Sur les espaces multicohérents*“, où le nombre $b_1(X)$ est défini comme le plus grand nombre d'éléments linéairement indépendants de $\mathfrak{B}_1(X)$, lorsque ce nombre est fini, et comme ∞ en cas contraire.

Ce changement de la définition comporte de petites modifications formelles, d'ailleurs évidentes, dans les démonstrations du lemme 5 et du th. 8 de mon article en question (p. 97—99), et nullepart ailleurs. La démonstration de la liberté du groupe $\mathfrak{B}_1(X)$ pour les sous-ensembles compacts X de S_2 y est contenu dans l'enoncé du lemme 2 (p. 91).

---

[53]) Fund. Math. 26 (1936), p. 61—112.
[54]) Fund. Math. 15 (1930), p. 102—125.
[55]) Fund. Math. 26 (1926), p. 207—223.

Sur un problème concernant les fonctions de première classe.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

$f(x)$ étant une fonction de classe 1 de Baire d'une variable réelle, le problème se pose: *existe-t-il dans tout ensemble linéaire indénombrable un sous-ensemble indénombrable sur lequel la fonction $f(x)$ est continue?*

Le but de cette Note est de démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu que la réponse à ce problème est *négative*.

Théorème: *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle de classe 1 de Baire et un ensemble linéaire indénombrable E, tel que la fonction $f(x)$ est discontinue sur tout sous-ensemble indénombrable de E.*

La démonstration sera basée sur quatre lemmes.

Lemme 1. *Si $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle semi-continue supérieurement, la fonction $\mathrm{E}f(x)$ l'est aussi* (Et désignant le plus grand entier qui ne dépasse pas t).

Démonstration. Posons pour tout x_0 réel donné

$$\varepsilon = \mathrm{E}f(x_0) + 1 - f(x_0); \tag{1}$$

c'est évidemment un nombre positif.

La fonction $f(x)$ étant par hypothèse semi-continue supérieurement, il existe pour x_0 un nombre positif δ tel que

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{pour } |x - x_0| < \delta,$$

d'où d'après (1):

$$f(x) < \mathrm{E}\, f(x_0) + 1, \qquad \text{pour } |x - x_0| < \delta$$

et par conséquent

$$\mathrm{E}\, f(x) \leqslant \mathrm{E}\, f(x_0), \qquad \text{pour } |x - x_0| < \delta,$$

ce qui prouve que la fonction $\mathrm{E}\, f(x)$ est semi-continue supérieurement au point x_0.

Le lemme 1 est ainsi démontré.

Lemme 2. *Etant donné une suite infinie de fonctions $f_n(x)$ (n=1, 2, 3, ...) d'une variable réelle semi-continues supérieurement, il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, de classe $\leqslant 1$ et telle qu'on a:*

$$(2) \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \qquad \text{pour } x \text{ réels},$$

$$(3) \qquad f(x) \neq f_n(x) \qquad \text{pour } x \text{ réels et } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue (p. e. un polynôme) telle que $\varphi(1)=2$, $\varphi(0)=1$ et $\varphi(k)=1$ pour $k=2, 3, \ldots, 9$.

Posons

$$(4) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \varphi(\mathrm{E}\, 10^k f_k(x) - 10\, \mathrm{E}\, 10^{k-1} f_k(x)).$$

Le nombre $\mathrm{E}\, 10\, t - 10\, \mathrm{E}\, t$ est pour tout t réel un chiffre décimal; le nombre $\varphi(\mathrm{E}\, 10\, t - 10\, \mathrm{E}\, t)$ est par conséquent égal à 1 ou à 2. La série (4) est donc uniformément convergente et on a les inégalités (2).

Les fonctions $f_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$), donc aussi les fonctions $10^k f_k(x)$ et $10^{k-1} f_k(x)$ ($k=1, 2, 3, \ldots$) étant semi-continues supérieurement par l'hypothèse, on conclut du lemme 1 que les fonctions $\mathrm{E}\, 10^k f_k(x)$ et $\mathrm{E}\, 10^{k-1} f_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots$) le sont également. Les fonctions $\mathrm{E}\, 10^k f_k(x) - 10\, \mathrm{E}\, 10^{k-1} f_k(x)$ sont donc de classe $\leqslant 1$ ainsi que les fonctions $\varphi(\mathrm{E}\, 10^k f_k(x) - 10\, \mathrm{E}\, 10^{k-1} f_k(x))$ ($k=1, 2, \ldots$), puisque la fonction φ a été supposée continue. La série (4) étant uniformément convergente, il en résulte que la fonction $f(x)$ est encore de classe $\leqslant 1$.

Or, soit n un nombre naturel et x un nombre réel donnés. Le développement du nombre $f_n(x)$ en fraction décimale infinie à une infinité de chiffres $\neq 9$ est, comme on sait,

$$(5) \qquad f_n(x) = \mathrm{E}\, f_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} (\mathrm{E}\, 10^k f_n(x) - 10\, \mathrm{E}\, 10^{k-1} f_n(x))$$

et un pareil développement du nombre $f(x)$ est évidemment la série (4). Si on avait $f(x)=f_n(x)$, les n-ièmes chiffres des développements (4) et (5) devraient coïncider et on aurait

$$\varphi(\mathrm{E}\, 10^n f_n(x) - 10\, \mathrm{E}\, 10^{n-1} f_n(x)) = \mathrm{E}\, 10^n f_n(x) - 10\, \mathrm{E}\, 10^n f_n(x),$$

ce qui est impossible, la fonction $\varphi(t)$ satisfaisant par définition à l'inégalité $\varphi(t) \neq t$ pour $t = 0, 1, 2, \ldots, 9$. On a donc l'inégalite (3) et le lemme 2 est démontré.

Il est à remarquer qu'on ne peut pas remplacer dans le lemme 2 les mots »*de classe* 1« par »*semi-continue supérieurement*«, puisqu'il existe une fonction d'une variable réelle, semi-continue supérieurement et dont l'image géométrique a des points communs avec celle de toute fonction semi-continue supérieurement d'une variable réelle. L'existence d'une telle fontion résulte sans peine du lemme 4 qui va suivre [1]).

Appelons, d'après M. C. de la Vallée Poussin *polygone rationnel* toute fonction $P(x)$ définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et dont l'image géométrique est une ligne polygonale à un nombre fini de sommets ayant pour coordonnées des nombres rationnels.

L'ensemble de tous les polygones rationnels $\geqslant 0$ est, comme on voit sans peine, dénombrable et il existe une suite infinie

$$P_1(x), \; P_2(x), \; P_3(x), \ldots$$

de polygones rationnels $\geqslant 0$ contenant tout polygone rationnel $\geqslant 0$ une infinité de fois.

Lemme 3. *Toute fonction $f(x)$ semi-continue supérieurement et telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ peut être représentée sous la forme*

$$(6) \qquad f(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x),$$

où $n_1, n_2, n_3, \ldots$ est une suite infinie croissante de nombres naturels.

Démonstration. La fonction $f(x)$ est par hypothèse la limite d'une suite de fonctions continues

$$(7) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) \qquad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

où

$$(8) \qquad f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1 \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } n=1, 2, \ldots$$

[1]) cf. L. Kantorovitch, Journ. de la Soc. Phys. Math. de Leningrad, t. II (1929), p. 20.

Il existe évidemment pour tout n naturel un polygone $R_n(x)$ (pas nécessairement $\geqslant 0$) tel que

$$(9)\qquad |f_n(x) - R_n(x)| < 1/n \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

d'où

$$R_n(x) + 1/n > f_n(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

et, d'après (7) et (8),

$$(10)\qquad R_n(x) + 1/n > f(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

D'autre part, on a d'après (9)

$$(11)\qquad \lim_{n=\infty} (R_n(x) + 1/n) = f(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Posons pour $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$(12)\qquad S_n(x) = \min (1,\ R_1(x) + 1/1,\ \ R_2(x) + 1/2, \ldots,\ \ R_n(x) + 1/n).$$

Ce sont, encore comme on voit sans peine, des polygones rationnels et on a d'après (10), (7) et (8):

$$R_n(x) + 1/n \geqslant S_n(x) \geqslant f(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

donc en vertu de (11)

$$(13)\qquad \lim_{n=\infty} S_n(x) = f(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Or, on a d'après (12)

$$(14)\qquad S_{n+1}(x) \leqslant S_n(x) \leqslant 1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Posons

$$(15)\quad Q_1(x)=1-S_1(x) \quad \text{et} \quad Q_n(x)=S_{n-1}(x)-S_n(x) \quad \text{pour} \quad n=2,\ 3,\ 4, \ldots$$

Ce sont encore, comme on voit sans peine, des polygones rationnels. On a d'après (14)

$$(16)\qquad Q_n(x) \geqslant 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad n=1,\ 2,\ 3, \ldots$$

et d'après (15)

$$S_n(x)=1-Q_1(x)-Q_2(x)-\ldots-Q_n(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad n=1,2,\ldots,$$

d'où selon (13)

$$(17)\qquad f(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} Q_n(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Or, la définition de la suite $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ entraine en raison de (16) l'existence d'une suite infinie croissante de nombres naturels n_1, $n_2, \ldots$ telle que

$$(18)\qquad Q_k(x) = P_{n_k}(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad k=1,\ 2, \ldots$$

Les formules (17) et (18) donnent la formule (6) et le lemme 3 se trouve démontré.

Lemme 4. *Il existe une suite infinie de fonctions de deux variables réelles $F_n(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$, ne prenant que les valeurs $\geqslant 0$ et $\leqslant 1$, et semi-continues supérieurement, qui est infiniment universelle pour les fonctions définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et ne prenant que les valeurs $\geqslant 0$ et $\leqslant 1$ et semi-continues supérieurement,*

c. à. d. telle que $f_k(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ étant une suite infinie quelconque de fonctions semi-continues supérieurement, définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et telles que $0 \leqslant f_k(x) \leqslant 1$, il existe toujours un nombre réel a $(0 \leqslant a \leqslant 1)$ tel que

$$(19)\qquad f_k(x)=F_k(x,\ a) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad k=1, 2, \ldots.$$ [1]

Démonstration. Soit

$$(20)\qquad x_n=g_n(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1, \quad n=1,\ 2, \ldots)$$

une courbe continue remplissant le cube fondamental à $\aleph_0$ dimensions [2]).

Soit $\theta(t)$ la fonction égale à t pour $t \leqslant 1$ et à 1 pour $1 < t \leqslant +\infty$.

Posons maintenant pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $k=1, 2, \ldots$:

$$(21)\qquad F_k(x, y) = 1 - \theta\Big(\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, g_{2^k(2n-1)}(y)\Big).$$

[1]) L'existence d'une fonction $F(x, y)$ semi-continue supérieurement et universelle pour les fonctions semi-continues supérieurement d'une variable réelle a été démontrée par M. L. V. Kantorovitch, Journ. de la Soc. Phys.-Math. de Leningrad t. II (1929), p. 13—21 (en russe); cf. aussi la note du même auteur dans Fund. Math. t. 18, p. 178—181. L'idée de notre démonstration diffère de celle de M. Kantorovitch.

[2]) Comme j'ai démontré récemment (Wiadomości Matematyczne t. 42, p. 1), on peut facilement déduire l'existence d'une telle courbe de la courbe continue de Peano $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ remplissant le carré: il suffit notamment de poser

$$g_n(t) = \varphi\, \psi^{n-1}(t) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

où $\psi^k(t)$ désigne la k-ième itérée de la fonction ψ et $\psi^0(t) = t$.

Je dis que la suite infinie des fonctions $F_k(x, y)$ $(k=1, 2, \ldots)$ satisfait au lemme 4.

Les fonctions $P_n(x)$ (voir p. 193) et $g_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ étant par définition continues et $\geqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on voit sans peine que les fonctions (21) sont semi-continues supérieurement (pour $k=1, 2, \ldots$) et que l'on a

$$0 \leqslant F_k(x, y) \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1 \ \text{et} \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit maintenant $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ une suite infinie quelconque de fonctions semi-continues supérieurement, définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et telles que $0 \leqslant f_k(x) \leqslant 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $k=1, 2, \ldots$ D'après le lemme 3, il existe donc pour tout nombre naturel k une suite infinie croissante de nombres naturels $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \ldots$, telle que

$$(22) \qquad f_k(x) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P_{n_i^{(k)}}(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{et} \ k=1, 2, \ldots$$

Il résulte de la définition de la courbe (20) qu'il existe un nombre a $(0 \leqslant a \leqslant 1)$ tel que

$$(23) \qquad g_{2^k(2n-1)}(a) = 1 \quad \text{pour} \quad n = n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \ldots$$

et $=0$ pour autres n naturels.

Je dis que la condition (19) est satisfaite. En effet, on a évidemment d'après (23)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, g_{2^k(2n-1)}(a) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{n_i^{(k)}}(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{et} \ k=1, 2, \ldots,$$

d'où selon (22)

$$(24) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, g_{2^k(2n-1)}(a) = 1 - f_k(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{et} \ k=1, 2, \ldots$$

Or, comme $f_k(x) \geqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $1 - f_k(x) \leqslant 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc, d'après la définition de la fonction θ,

$$\theta(1 - f_k(x)) = 1 - f_k(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{et} \ k = 1, 2, \ldots$$

La formule (24) donne par conséquent

$$\theta\Big(\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, g_{2^k(2n-1)}(a)\Big) = 1 - f_k(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{et} \ k=1, 2, \ldots$$

ce qui entraine (19) en vertu de (21).

Le lemme 4 est ainsi démontré.

Démonstration du théorème. Soit maintenant $F_n(x, y)$ $(n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie de fonctions satisfaisant au lemme 4. Posons

$$(25) \qquad f_n(x) = F_n(x, x) \quad \text{pour} \quad n=1, 2, \ldots \ \text{et} \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

et $f_n(x)=0$ pour tous les autres x réels. Ce sont donc des fonctions semi-continues supérieurement. D'après le lemme 2 il existe par conséquent une fonction $f(x)$ de classe $\leqslant 1$, telle que:

$$(26) \qquad f(x) \neq f_n(x) \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots \ \text{et} \ x \ \text{réel}$$

et

$$(27) \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \ x \ \text{réel}.$$

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Il en résulte l'existence d'une suite transfinie du type Ω formée de tous les nombres réels

$$(28) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots, \qquad (\xi < \Omega)$$

et d'une suite transfinie du type Ω

$$(29) \qquad \varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots, \ \varphi_\omega(x), \ \varphi_{\omega+1}(x), \ldots, \ \varphi_\xi(x), \ldots, \qquad (\xi < \Omega)$$

formée de toutes les fonctions semi-continues supérieurement d'une variable réelle à valeurs $\geqslant 0$ et $\leqslant 1$.

Soit α un nombre ordinal quelconque $\omega \leqslant \alpha < \Omega$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\alpha$ étant donc dénombrable, il existe une suite infinie

$$\xi_1^{(\alpha)}, \ \xi_2^{(\alpha)}, \ \xi_3^{(\alpha)}, \ldots$$

formée de tous ces nombres.

La suite des fonctions $F_n(x, y)$ $(n=1, 2, \ldots)$ étant infiniment universelle il existe un nombre réel p_α, $0 \leqslant p_\alpha \leqslant 1$, tel que

$$(30) \qquad \varphi_{\xi_n^{(\alpha)}}(x) = F_n(x, p_\alpha) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{et} \ n=1, 2, \ldots$$

Soit E l'ensemble de tous les nombres p_α où $\omega \leqslant \alpha < \Omega$. Je dis que la fonction $f(x)$ et l'ensemble E satisfont au théorème.

L'ensemble E est indénombrable. En effet, admettons que ce n'est pas le cas et soit

$$u_1, \ u_2, \ u_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les éléments de E (le même élément pouvant être répété une infinité de fois).

Les fonctions

(31) $$h_n(x)=f(u_n) \qquad \text{pour } x \text{ réels et } n=1,2,\ldots$$

étant continues, $\geqslant 0$ et $\leqslant 1$, il existe d'après la définition de la suite (29) un nombre ordinal α, $\omega\leqslant\alpha<\Omega$, tel que l'on trouve parmi les termes de la suite (29) aux indices $\xi<\alpha$ toutes les fonctions (31) (et peut-être encore d'autres). Il existe donc pour tout n naturel un indice k_n tel que

$$\varphi_{\xi^{(\alpha)}_{k_n}}(x)=h_n(x)=f(u_n) \qquad \text{pour } x \text{ réels et } n=1,2,\ldots$$

d'où l'on tire selon (30) pour $x=p_\alpha$

$$F_{k_n}(p_\alpha,p_\alpha)=f(u_n) \qquad \text{pour} \quad n=1,2,3,\ldots$$

Il en résulte d'après (25) et (26)

$$f(p_\alpha)\neq f_{k_n}(p_\alpha)=F_{k_n}(p_\alpha,p_\alpha)=f(u_n) \qquad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots,$$

donc $f(p_\alpha)\neq f(u_n)$ et $p_\alpha\neq u_n$ pour $n=1,2,\ldots$, ce qui est impossible, la suite infinie $u_1,u_2,u_3,\ldots$ contenant tous les éléments de l'ensemble E.

Soit maintenant N un sous-ensemble indénombrable de E et supposons que la fonction $f(x)$ soit continue sur N. Il existerait alors, comme on sait [1]) une fonction semi-continue supérieurement, définie pour tous les x réels et ne prenant que des valeurs $\geqslant 0$ et $\leqslant 1$ (d'après (27). Cette fonction serait donc un terme $\varphi_\lambda(x)$ de la suite (29) tel que

(32) $$\varphi_\lambda(x)=f(x) \qquad \text{pour} \quad x\in N.$$

L'ensemble N étant un sous-ensemble indénombrable de E, il existe un élément p_α de N pour lequel $\alpha>\lambda$. Vu la définition de la suite $\xi^{(\alpha)}_n$ $(n=1,2,\ldots)$, il existerait donc un nombre naturel m tel que

$$\varphi_{\xi^{(\alpha)}_m}(x)=\varphi_\lambda(x) \qquad \text{pour } x \text{ réels},$$

donc, d'après (32) et comme $p_\alpha\in N$,

(33) $$\varphi_{\xi^{(\alpha)}_m}(p_\alpha)=f(p_\alpha).$$

Or, on a selon (30), (25) et (26)

$$\varphi_{\xi^{(\alpha)}_m}(p_\alpha)=F_m(p_\alpha,p_\alpha)=f_m(p_\alpha)\neq f(p_\alpha),$$

ce qui est incompatible avec (33). Ainsi la fonction $f(x)$ ne peut pas être continue sur N et le théorème est démontré.

---

[1]) Voir G. v. Alexits, Fund. Math. t. 15, p. 54.

Disons qu'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$, si tout ensemble linéaire indénombrable contient un sous-ensemble indénombrable sur lequel la fonction $f(x)$ est continue.

Il résulte tout de suite de la démonstration du théorème établi tout à l'heure que l'on peut énoncer la proposition suivante:

On sait définir effectivement une fonction de première classe de Baire dont on peut démontrer en admettant l'hypothèse du continu, qu'elle ne jouit pas de la propriété $\boldsymbol{P}$.

Il est à remarquer qu'en remplaçant dans l'énoncé du théorème démontré les mots „*de classe* 1" par les mots „*de classe* $\leqslant 2$", la démonstration pourait être rendue beaucoup plus courte par l'application d'un résultat dû à M. N. Lusin [1]).

M. N. Lusin a défini notamment [2]) sur l'ensemble S de tous les nombres irrationnels y de l'intervalle $0<y<1$ une fonction continue $Z(y)$ dont il a démontré que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble indénombrable $H\subset S$ jouissant de la propriété $\boldsymbol{L}$ [3]) et tel que l'ensemble $E=Z(H)$ est toujours de première catégorie. Or, j'ai démontré [4]) que la fonction $\varphi(x)$ inverse de $Z(y)$, définie sur l'ensemble $K=Z(S)$, est de classe $\leqslant 1$ sur K.

D'autre part, toute fonction de classe $\leqslant 1$ sur un ensemble linéaire peut, comme on sait, être prolongée à une fonction de classe $\leqslant 2$ d'une variable réelle [5]). Il existe donc une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, de classe $\leqslant 2$ et qui coïncide avec $\varphi(x)$ sur K. Je dis que la fonction $f(x)$ est discontinue sur tout sous-ensemble indénombrable de l'ensemble E.

En effet, supposons le contraire et soit E_1 un sous-ensemble indénombrable de E sur lequel la fonction $f(x)$ est continue. La fonction $Z(y)$ étant inverse de $\varphi(x)$ et continue sur S, on conclut sans peine, en vertu des relations $E_1\subset E=Z(H)\subset Z(S)=K$, que la fonction $f(x)$ (coïncidant avec $\varphi(x)$ sur K) établit une homémorphie entre

---

[1]) Cf. ma note dans les C. R. de l'Acad. des Sc. de l'URSS. (à paraître).

[2]) cf. N. Lusin, Fund. Math. t. 21, p. 119—122 et W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografje Matematyczne t. IV, Warszawa—Lwów 1934, p. 65.

[3]) On dit qu'un ensemble jouit de la propriéte $\boldsymbol{L}$, s'il ne contient aucun sous-ensemble indénombrable non dense. Cf. Fund. Math. t. 26, p. 137.

[4]) Fund. Math. t. 22, p. 263—265.

[5]) Voir p. ex. Fund. Math. t. 16, p. 81.

E_1 et l'ensemble $f(E_1) = \varphi(E_1) \subset \varphi(E) = H$. Comme l'image homéomorphe d'un ensemble toujours de première catégorie, l'ensemble $f(E_1)$ l'est donc aussi. Or, c'est impossible, puisque $f(E_1)$, en tant que sous-ensemble de l'ensemble H jouissant de la propriété $\boldsymbol{L}$, jouit également de cette propriété et par suite, en tant que indénombrable, ne jouit pas de la propriété de Baire [1]).

La fonction $f(x)$ est donc de classe $\leqslant 2$ et elle est discontinue sur tout sous-ensemble indénombrable de l'ensemble E, c. q. f. d.

[1]) Voir p. ex. mon livre cité, p. 41.

On continuous transformations in the plane *).

By

Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Introduction.

The purpose of this paper is to present certain remarks which occurred to me while studying the important papers of Schauder and Banach on continuous transformations [1]). While the methods of Banach and Schauder are such that their results are obviously valid in spaces of any finite number of dimensions, it might be of interest to observe that in the two-dimensional case, which is quite important for the applications, it is possible to obtain more complete information. This is essentially due to the existence of transformations which are defined, in terms of complex numbers, by equations of the form $w = z^n$, n an integer. An immediate consequence is the simple lemma in 1.3. Roughly speaking, the lemma states that the image of a plane region, under a continuous transformation, is similar in some respects to the Riemann surfaces employed in the theory of functions of a complex variable [2]). The inference from the lemma is

*) Presented to the American Math. Society at the meeting in Chicago, April 1936.

[1]) S. Banach, *Sur les lignes rectifiables et sur les surfaces dont l'aire est finie*, Fundamenta Mathematicae, vol. 7 (1925), pp. 225—236; J. Schauder, *Über stetige Abbildungen*, Fundamenta Mathematicae, vol. 12 (1928), pp. 47—74.

[2]) The reader will notice that our use of the transformation $w = z^n$, in proving the lemma in 1.3, corresponds to the process of *local uniformization* in the theory of Riemann surfaces. The manner in which the topological index is used in 1.3 is of course familiar to students of the theory of functions of a complex variable, where a similar reasoning is applied to discuss the transformation $w = f(z)$, $f(z)$ an analytic function, in the vicinity of a point where $f'(z) = 0$. — An interesting application of the transformation $w = z^n$ to *the special case of two dimensions* is discussed by S. Saks, *Sur une inégalité de la théorie des fonctions*, Acta Szeged, vol. 44 (1928), pp. 51—55, in particular corollary 2, p. 53.